

电磁场 与电磁波的理论 及计算方法研究

DIANCICHANG YU DIANCIBO
DELILUNJIJISUANFANGFAYANJIU

董康军 赵 喆 郭晓霞 编著

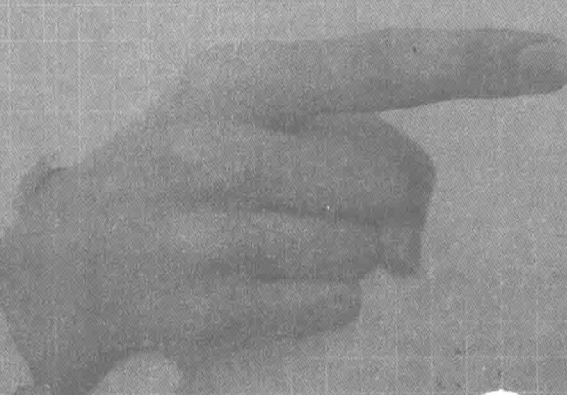


中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

电磁场 与电磁波的理论 及计算方法研究

DIANCICHANG YU DIANCIBO
DELILUNJIJISUANFANGFAYANJIU

董康军 赵 喆 郭晓霞 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书在撰写过程中注重内容体系的连接,包括矢量分析与场论、静电场分析、恒定电流的电场与磁场研究、静态场边值问题的解法、时变电磁场分析、平面电磁波的传播、平面电磁波的反射与折射、导行电磁波理论探析、电磁波的辐射与接收、电磁场数值计算方法研究、电磁场与电磁波的相关研究进展等内容。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波的理论及计算方法研究 / 董康军,
赵喆, 郭晓霞编著. --北京:中国水利水电出版社,
2013.4

ISBN 978-7-5170-0842-2

I. ①电… II. ①董… ②赵… ③郭… III. ①电磁场
—计算方法②电磁波—计算方法 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 089114 号

策划编辑:杨庆川 责任编辑:杨元泓 封面设计:崔 蕾

书 名	电磁场与电磁波的理论及计算方法研究
作 者	董康军 赵 喆 郭晓霞 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座100038) 网址:www.waterpub.com.cn E-mail:mchannel@263.net(万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话:(010)68367658(发行部)、82562819(万水) 北京科水图书销售中心(零售) 电话:(010)88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京鑫海胜蓝数码科技有限公司
印 刷	北京市登峰印刷厂
规 格	184mm×260mm 16开本 16.75印张 407千字
版 次	2013年5月第1版 2013年5月第1次印刷
定 价	56.00元



凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

进入 21 世纪的信息时代,电子与信息科学技术飞速发展,在通信、广播、电视、导航、雷达、遥感、测控、电子对抗、电子仪器、测量系统、家用电器、工业自动化、地质勘探、电力、交通以及其他所有涉及电子信息技术的领域,电磁场与电磁波的特性、分析方法及其应用都成为了必要的基础。但由于电磁场与电磁波理论性强,内容抽象,计算公式多而复杂,往往使人望而生畏,为此本书汲取国内外同类研究书籍的经验,强调电磁场与电磁波的工程应用,力争将抽象的理论与具体的工程技术相结合,通过典型直观的物理现象来论述电磁场与电磁波理论,深入浅出,便于理解,也便于工程技术人员查阅。

本书在撰写过程中注重内容体系的链接,重点对解决问题思路的体现和对导出结论深入定性的说明。同时,本书还参考了国内外最近几年不同风格的学术资料。撰写采用数理并重的方式,在经典的范围内,从静态场一直到电磁波的辐射,推演出电磁场与电磁波的物理和数学特性,对其定理及场的基本方程的描述,不但有严格的数学推导演义,而且也详细的罗列了物理意义的描述。为使该书适用于不同层次的读者,增加了各向异性媒质中的平面波、电磁波的反射、折射和辐射等部分内容。

全书共 12 章,第 1 章为矢量分析与场论,较为完整地介绍了矢量分析,包括矢量的各种运算的定义、运算法则和有关场论的若干定理,强调了梯度、散度(通量)和旋度(环量)的物理意义及其在正交坐标系中的计算式,指出了矢量场的一般分析方法。第 2 章为静电场,介绍了电场强度和电位的计算方法。第 3 章和第 4 章为恒定电场与恒定磁场,介绍了它们的基本规律和性质。第 5 章为静态场的解,基于前述的三种静态场的位函数可将其归结为同类别的边值问题,故可用同样的方法求解。第 6 章为时变电磁场,介绍了它的基本规律及反映宏观电磁现象的麦克斯韦方程组。第 7 章为均匀平面电磁波,介绍了平面电磁波在各种媒质中传播的特性。第 8 章为电磁波的反射和折射。第 9 章专门介绍导行波,包括平面波在矩形波导、圆波导、同轴线、谐振腔等导波装置中的模式场。第 10 章为电磁波的辐射及天线基础。第 11 章介绍了电磁场数值计算方法,将积分公式转化为可编程的数值积分公式,还对工程上常用的两种电磁场数值的分析方法进行了阐述。第 12 章为电磁场与电磁波的相关研究进展。

全书由董康军(渭南师范学院)、赵喆(沈阳药科大学)、郭晓霞(集宁师范学院)撰写。由于作者学识和水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者和专家批评指正,提出宝贵意见和建议。

作 者

2013 年 3 月

目 录

第 1 章 矢量分析与场论	1
1.1 矢量及其运算分析	1
1.2 正交曲面坐标系	4
1.3 标量场的梯度	9
1.4 矢量场的散度	12
1.5 矢量场的旋度	15
1.6 亥姆霍兹定理	17
第 2 章 静电场分析	19
2.1 库仑定律与电场强度	19
2.2 高斯定理	22
2.3 电 位	25
2.4 电偶极子	27
2.5 静电场中的导体与电介质	31
2.6 静电场的边界条件	38
2.7 导体系统的电容	40
2.8 静电场能量与静电力	44
第 3 章 恒定电流的电场研究	47
3.1 电流与电流密度	47
3.2 欧姆定律与焦耳定律	50
3.3 恒定电场的基本方程	53
3.4 恒定电场的边界条件	56
3.5 恒定电场与静电场的比拟	59
第 4 章 恒定电流的磁场研究	63
4.1 磁感应强度	63
4.2 恒定磁场的基本方程	67
4.3 矢量磁位与标量磁位	71
4.4 磁偶极子	75
4.5 磁介质中的场方程	76
4.6 恒定磁场的边界条件	80
4.7 电 感	81

第 5 章 静态场边值问题的解法	85
5.1 边值问题的分类	85
5.2 唯一性定理	86
5.3 镜像法	87
5.4 分离变量法	92
5.5 复变函数法	96
5.6 格林函数法	99
5.7 有限差分法	102
第 6 章 时变电磁场分析	106
6.1 法拉第电磁感应定律	106
6.2 位移电流	109
6.3 麦克斯韦方程组	111
6.4 时变电磁场的边界条件	115
6.5 坡印廷定理与坡印廷矢量	118
6.6 正弦电磁场	121
6.7 波动方程	122
6.8 动态矢量位与标量位	124
第 7 章 平面电磁波的传播	126
7.1 理想介质中的平面电磁波	126
7.2 导电媒介中的平面电磁波	131
7.3 电磁波的极化	135
7.4 电磁波的色散与群速度	138
第 8 章 平面电磁波的反射与折射	141
8.1 平面电磁波向平面分界面的垂直入射	141
8.2 平面电磁波向多层介质分界面的垂直入射	146
8.3 平面电磁波向平面分界面的斜入射	150
8.4 平面电磁波的全折射与全反射	154
第 9 章 导行电磁波理论探析	159
9.1 导行电磁波的一般分析方法	159
9.2 矩形波导	164
9.3 圆波导	172
9.4 波导中的能量传输与损耗	181
9.5 同轴线	184
9.6 谐振腔	188
第 10 章 电磁波的辐射与接收	194
10.1 滞后位	194
10.2 电基本振子的辐射场	197
10.3 对偶原理与磁基本阵子的辐射场	202

10.4	天线的电参数·····	205
10.5	对称线天线与天线阵·····	207
10.6	互易原理·····	212
第 11 章	电磁场数值计算方法研究 ·····	214
11.1	数值积分法·····	214
11.2	有限差分法·····	222
11.3	有限元法·····	226
11.4	矩量法·····	229
第 12 章	电磁场与电磁波的相关的研究进展 ·····	236
12.1	超导电现象与唯象理论·····	236
12.2	激光冷却原子与玻色—爱因斯坦凝聚·····	241
12.3	光子晶体与左手材料·····	244
12.4	磁流体与等离子体电动力学·····	250
参考文献	·····	258

第 1 章 矢量分析与场论

1.1 矢量及其运算分析

1.1.1 矢量及其表示方法

各种物理量可分为标量与矢量两大类。只有大小特征的量称为标量,如时间、电势温度、能量等。既有大小又有方向特征的量称为矢量,如力、速度、电场强度等。习惯上用黑体符号或在符号上加矢量号来表示矢量。如 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 或 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 。本书中的所有矢量均采用黑体表示。模为 1 的矢量称为单位矢量,常用于表示矢量的方向,如任一矢量 $\mathbf{A}$ 可用其大小和方向表示为

$$\mathbf{A} = e_A A \quad (1-1)$$

式中, A 为矢量 $\mathbf{A}$ 的大小(或称模值); e_A 为矢量 $\mathbf{A}$ 的单位长度方向,称为单位矢量。一般也可利用矢量 $\mathbf{A}$ 及其模值 A 表示该矢量方向的单位矢量为

$$e_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1-2)$$

例如,在直角坐标系中,矢量 $\mathbf{A}$ 的三个分量分别表示为 A_x 、 A_y 、 A_z , 利用三个单位矢量 e_x 、 e_y 、 e_z 可以将其表示成

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1-3)$$

其中 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$, $e_A = \frac{e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$ 。

1.1.2 矢量的代数运算分析

1. 矢量的加减法

两矢量之和(或差)的直角坐标分量等于两矢量对应坐标分量的和(或差),即

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = e_x (A_x \pm B_x) + e_y (A_y \pm B_y) + e_z (A_z \pm B_z) \quad (1-4)$$

在几何上,两矢量的和矢量与差矢量分别与以两矢量为邻边的平行四边形的两条对角线重合,

如图 1-1 所示。

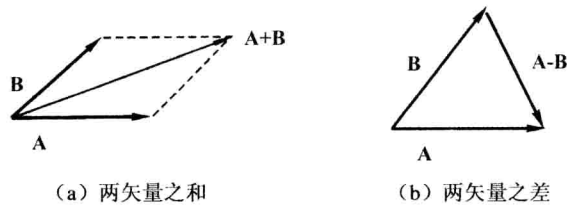


图 1-1 两矢量的和与差

矢量相加满足交换律与结合律,即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{1-5}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{1-6}$$

2. 标量乘以矢量

标量乘矢量其积为矢量。标量 α 乘矢量 $\mathbf{A}$ 满足以下关系,即

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha e_x A_x + \alpha e_y A_y + \alpha e_z A_z \tag{1-7}$$

若 $\alpha > 0$, 则矢量 $\alpha \mathbf{A}$ 与原矢量 $\mathbf{A}$ 同方向,大小是原矢量 $\mathbf{A}$ 的 α 倍;若 $\alpha < 0$, 则模值是原矢量的 $|\alpha|$ 倍不变,方向与原矢量 $\mathbf{A}$ 相反。

3. 矢量的标量积

任意两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的标量积,仍然是一个标量,其大小等于两个矢量的模值相乘,再乘以它们的夹角 θ (取小角,即 $\theta \leq \pi$) 的余弦,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \tag{1-8}$$

标量积又称为点积或内积,其物理意义为一个矢量在另一个矢量上的投影与另一个矢量大小的乘积。显然,相互垂直的矢量之间投影为零。由此不难得出结论,如果两个大小不为零的矢量的标量积为零,则二者一定相互垂直。或者说,两个相互垂直的矢量其点积一定等于零。

例如,直角坐标系中的单位矢量满足以下关系式:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \tag{1-9}$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \tag{1-10}$$

任意两矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的标量积,在直角坐标系下用矢量的三个分量表示则为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1-11}$$

标量积满足交换律与结合律,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{1-12}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{1-13}$$

4. 矢量的矢量积

两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的矢量积还是一个矢量,其大小等于两个矢量的模值相乘,再乘以它们

间夹角 θ ($\theta \leq \pi$) 的正弦, 其方向为两矢量所在面的法向, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = nAB \sin \theta \quad (1-14)$$

矢积的方向 n 符合右手螺旋定则, 即右手四指从 $\mathbf{A}$ 旋转到 $\mathbf{B}$, 拇指的方向为矢积的方向, 如图 1-2 所示。可以看出, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的大小是以两矢量为邻边的平行四边形的面积。由此可以认为, 矢积的几何意义为以两矢量为邻边的平行四边形围成的有向面。如果 $\mathbf{B}$ 表示作用在一物体上的力, 而 $\mathbf{A}$ 表示力臂矢量时, 则矢积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示作用给物体的力矩。

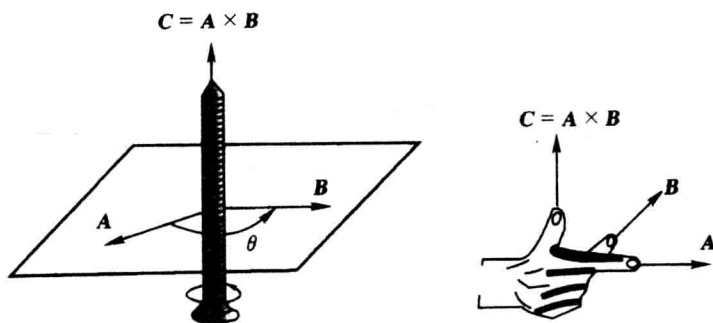


图 1-2 矢量的方向

矢量积又称为叉积。如果两个不为零的矢量的叉积等于零, 则这两个矢量必然相互平行。或者说, 两个相互平行的矢量其叉积一定等于零。

例如, 直角坐标系中的单位矢量满足以下关系式:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1-15)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \quad (1-16)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 的叉积在直角坐标系下可用行列式形式展开为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-17)$$

矢量的叉积不满足交换律, 但满足结合律, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1-18)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-19)$$

5. 矢量的三重积

矢量的三连乘有两种, 即标量三重积和矢量三重积。

标量三重积为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-20)$$

需要注意的是, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的模就是 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 所形成的平行四边形的面积, 因此, $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 就是该平行四边形与 $\mathbf{C}$ 所构成的平行六面体的体积。 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 和 $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ 也都等于 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 所构成的平行六面体的体积。

矢量三重积为

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-21)$$

由于 $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 垂直于 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 所组成的平面, $\mathbf{A}$ 与它叉乘必位于该面内, 因而 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 可用沿 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 方向的两个分量表示。将左边和右边分别用分量式展开, 可证明此式成立。为便于记忆, 根据公式右边的形式 $\mathbf{BAC} - \mathbf{CAB}$, 可称其为 Back-cab(返程车)法则。

1.2 正交曲面坐标系

为了分析场在空间中的分布和变化规律, 必须引入坐标系。而且, 常根据被研究对象的几何形状不同采用不同的坐标系, 使问题得到简化。在电磁场问题中, 常用的坐标系是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1.2.1 直角坐标系

如图 1-3 所示, 直角坐标系中的三个坐标变量是 x 、 y 、 z 。它们的变化范围分别是

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{aligned}$$

空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ 三个坐标曲面的交点。

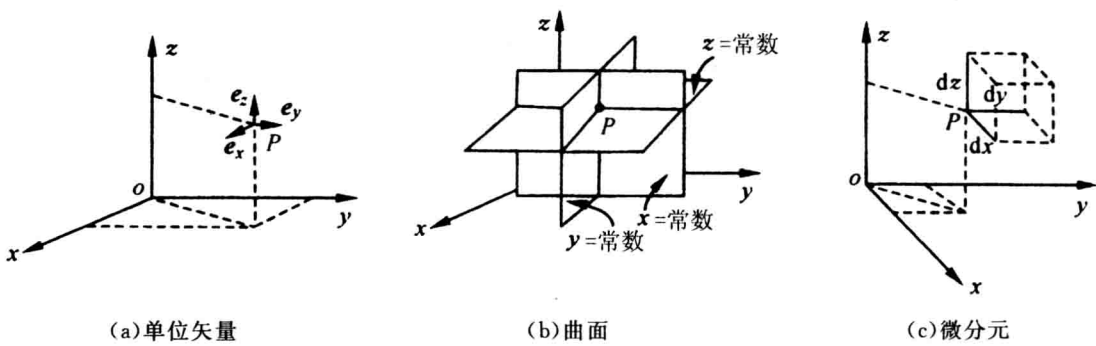


图 1-3 直角坐标系

在直角坐标系中, 过空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别是 x 、 y 、 z 增加的方向, 且遵循右手螺旋法则, 即

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (1-22)$$

$\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 的方向不随 P 点位置的变化而变化, 这是直角坐标系的一个重要特征。

直角坐标系中, 任意矢量 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1-23)$$

式中, A_x, A_y, A_z 分别是矢量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 方向上的投影。

在直角坐标系中, 位置矢量可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z \quad (1-24)$$

位置矢量的微分元为

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1-25)$$

它在 x, y 和 z 增加方向的微分元分别为 dx, dy 和 dz , 而与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_x = dydz \quad (1-26)$$

$$dS_y = dx dz \quad (1-27)$$

$$dS_z = dx dy \quad (1-28)$$

体积元可表示为

$$dV = dx dy dz \quad (1-29)$$

1.2.2 圆柱坐标系

如图 1-4 所示, 圆柱坐标系中的三个坐标分量是 ρ, φ, z , 与直角坐标系相同, 圆柱坐标系中也有 z 变量。各变量的变化范围分别是

$$0 \leq \rho < +\infty$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\infty < z < +\infty$$

空间任一点 $P(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ 是三个坐标曲面的交点: $\rho = \rho_0$ 的圆柱面、包含 z 轴并与 xz 平面构成夹角为 $\varphi = \varphi_0$ 的半平面、 $z = z_0$ 的平面。

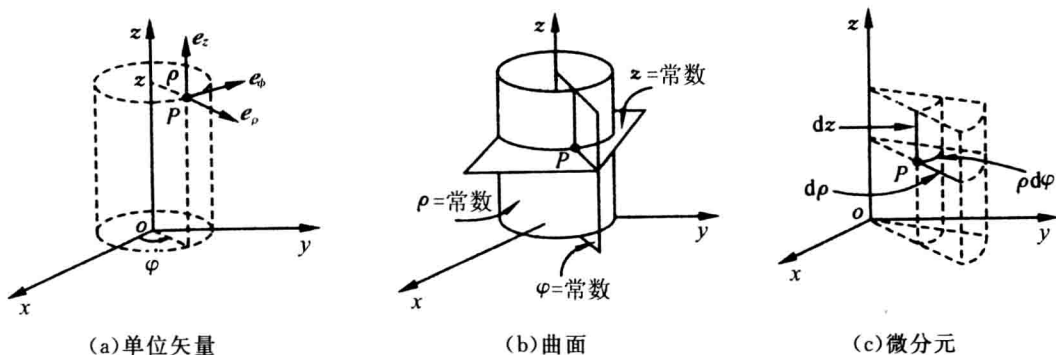


图 1-4 圆柱坐标系

在直角坐标系中, 过空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ 分别是 ρ, φ, z 增加的方向, 且遵循右手螺旋法则, 即

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (1-30)$$

值得注意的是,除 e_z 外, e_ρ 和 e_φ 的方向都随 P 点的变化而变化,且满足

$$\begin{cases} \frac{\partial e_\rho}{\partial \varphi} = e_\varphi \\ \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -e_\rho \end{cases} \quad (1-31)$$

圆柱坐标系中,任意矢量 $\mathbf{A}$ 在可表示为

$$\mathbf{A} = e_\rho A_\rho + e_\varphi A_\varphi + e_z A_z \quad (1-32)$$

式中, A_ρ 、 A_φ 、 A_z 分别是 $\mathbf{A}$ 在 e_ρ 、 e_φ 、 e_z 方向上的投影。

在圆柱坐标系中,位置矢量可表示为

$$\mathbf{r} = e_\rho \rho + e_z z \quad (1-33)$$

位置矢量的微分元为

$$d\mathbf{r} = d(e_\rho \rho) + d(e_z z) = e_\rho d\rho + e_\varphi \rho d\varphi + e_z dz \quad (1-34)$$

它在 ρ 、 φ 、 z 增加方向的微分元分别是 $d\rho$ 、 $\rho d\varphi$ 、 dz ,如图 1-4(c)所示。而与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_\rho = \rho d\varphi dz \quad (1-35)$$

$$dS_\varphi = d\rho dz \quad (1-36)$$

$$dS_z = \rho d\rho d\varphi \quad (1-37)$$

体积元可表示为

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1-38)$$

1.2.3 球坐标系

如图 1-5 所示,球坐标系中的三个坐标分量是 r 、 θ 、 φ ,它们的变化范围分别是

$$0 \leq r < +\infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

空间任一点 $P(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 是三个坐标曲面的交点:球心在原点、半径 $r = r_0$ 的球面;顶点在原点、轴线与 z 轴重合且半顶角 $\theta = \theta_0$ 的圆锥面;包含 z 轴并与 xz 平面构成夹角为 $\varphi = \varphi_0$ 的半平面。

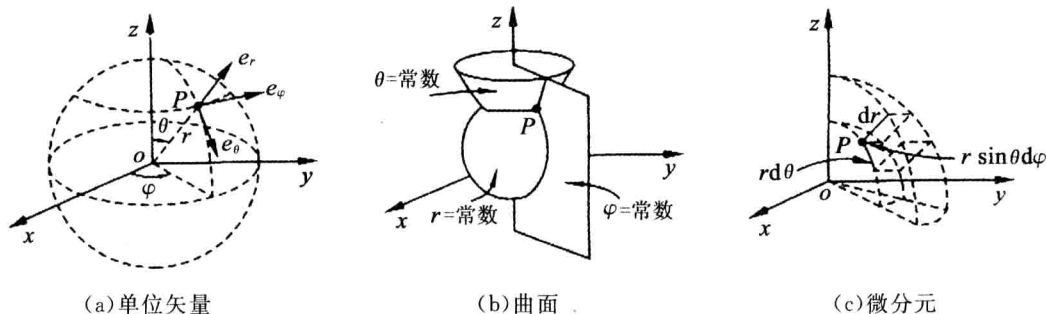


图 1-5 球坐标系

在球坐标系中,三个相互正交的坐标单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$ 分别是 r 、 θ 、 φ 增加的方向,且遵循右手螺旋法则,即

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (1-39)$$

值得注意的是, $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$ 的方向是随 P 点的位置变化而变化的,且满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \sin \theta \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \cos \theta \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r \sin \theta - \mathbf{e}_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (1-40)$$

在球坐标系中,任意矢量 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi \quad (1-41)$$

式中, A_r 、 A_θ 、 A_φ 分别是 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$ 方向上的投影。

在球坐标系中,位置矢量可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r \quad (1-42)$$

位置矢量的微分元为

$$d\mathbf{r} = d(\mathbf{e}_r r) = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi \quad (1-43)$$

它在球坐标系中沿三个坐标的长度元分别为 dr 、 $r d\theta$ 、 $r \sin \theta d\varphi$,如图 1-5(c)所示。而与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1-44)$$

$$dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi \quad (1-45)$$

$$dS_\varphi = r dr d\theta \quad (1-46)$$

体积元可表示为

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1-47)$$

1.2.4 三种坐标系之间的关系

如图 1-6 所示,在空间中任意一点 P ,它的直角坐标系的坐标是 (x, y, z) ,圆柱坐标系

的坐标是 (ρ, φ, z) ,球坐标系的坐标是 (r, θ, φ) ;依据各坐标之间的关系可以得到

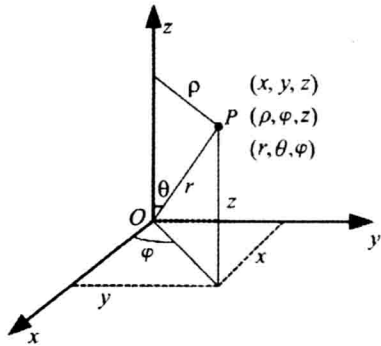


图 1-6 三种坐标系相互关系示意图

(1)直角坐标系与圆柱坐标系的关系为

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{1-48}$$

或

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \tag{1-49}$$

(2)直角坐标系与球坐标系的关系为

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \tag{1-50}$$

或

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \tag{1-51}$$

(3)圆柱坐标系与球坐标系的关系为

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases} \tag{1-52}$$

或

$$\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-53)$$

1.3 标量场的梯度

标量场的梯度用以表征标量场随空间坐标的变化规律,是进行标量场分析的十分重要的数学工具。

1.3.1 标量场的等值面

对于不均匀标量场,空间各点的标量值一般不等。为了形象地描述标量场的分布规律,通常把某一标量值相同的点用光滑的曲线或曲面连起来,这些点构成的空间曲线或曲面称为标量场的等值线或等值面。

一般按相同标量差值画出一族曲线(面),根据等值线分布的疏密程度即可定性判断空间标量函数的分布规律。标量场的等值线在工程及日常生活中都会遇到,如测绘地图上的等高线、天气预报图中的等温线等。

在直角坐标系中,标量场 u 的等值线面方程可写为

$$u(x, y, z) = C \quad (C \text{ 为任意常数}) \quad (1-54)$$

不难看出,等值面具有如下几个特点:

- (1) 常数 C 取不同的数值,便可得到不同的等值面,从而构成等值面簇。
- (2) 由于 u 是空间坐标的单值函数,显然等值面互不相交,场中一点只有一个等值面通过。

图 1-7 所示为某一温度场等温线分布的等标量线,从图中可以清楚地看出中心区域 A 处温度最高,一定是热源所在区间。此外,东南方向等温线稀疏,西北方向等温线较密,说明东南方向温度变化慢,西北方向温度变化快。因此,若某人位于中心区域,如欲迅速脱离热源,理论上的最佳路径一定是沿着温度变化最快的 AB 方向,而不是 AC 方向。

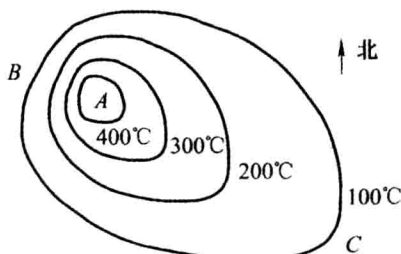


图 1-7 等标量线

由此可见,对标量场的变化规律的分析也是非常重要并具有工程实际需要的。

1.3.2 标量场的方向导数

标量场的等值面只描述了标量量 u 的分布状况,而场中某点的标量沿着各个方向的变化率可能不同,为了描述标量场的这种变化特性,需要引入方向导数的概念。标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向上的变化率。

如图 1-8 所示,标量场 u 在点 P 处沿 l 方向上的方向导数定义为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(Q) - u(P)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$$

(1-55)

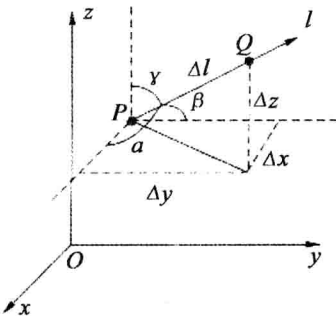


图 1-8 标量场的方向导数

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P$ 就称为标量场 u 在点 P 处沿 l 方向上的方向导数。若 $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, 则说明标量场 u 沿 l 方向是增加的;若 $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, 则说明标量场 u 沿 l 方向是减小的;若 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 则说明标量场 u 沿 l 方向无变化。

在直角坐标系中,有

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Delta l$$

式中, $\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}, \cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}, \cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}$ 是 l 方向的方向余弦。

于是,按式(1-55),直角坐标系中方向导数的表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

(1-56)

1.3.3 标量场的梯度

在标量场中,从一个给定点出发有无穷多个方向。一般而言,标量场在给定点沿不同方向的变化率是不同的。为了描述标量场在哪个方向变化率最大,需要引入标量场梯度的概念。