现代物理基础丛书 60

宇宙学基本原理

龚云贵 编著

科学出版社

现代物理基础丛书 60

宇宙学基本原理

龚云贵 编著

科学出版社

内 容 简 介

宇宙早期暴涨引起的原初密度扰动是我们现在观测到的大尺度结构的种子. 对宇宙微波背景辐射的更加深入的分析研究有助于我们深刻理解宇宙的演化历史, 同时宇宙暴涨机制的理论模型也对粒子物理基本理论提出了挑战. 另外, 天文学家在 1998 年通过超新星的观测发现了宇宙现在处于加速膨胀阶段, 从而表明宇宙中存在一种看不见的反引力的、被称为暗能量的物质; 而星系的旋转曲线及宇宙中的引力透镜等观测结果表明了宇宙中还存在大量的不发光的暗物质. 本书同时从物理学和天文学的角度来理解宇宙学的基本原理, 包括了天文学及物理学中的宇宙学内容, 如宇宙学场方程的热力学对应、距离测量及数据拟合方法、宇宙原初核合成、密度扰动的自求解方法及增长因子、暴涨宇宙学模型及原初扰动谱的计算、宇宙微波背景辐射各向异性的计算、宇宙加速膨胀的超新星观测证据、暗能量参数化、吸引子解的动力学分析等.

本书可以帮助有兴趣的研究者很快进入该领域并开展高水平的研究工作.

图书在版编目(CIP)数据

宇宙学基本原理/龚云贵编著. —北京：科学出版社, 2013
(现代物理基础丛书；60)
ISBN 978-7-03-039038-7

Ⅰ. ①宇…　Ⅱ. ①龚…　Ⅲ. ①宇宙学　Ⅳ. ①P159

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 258551 号

责任编辑: 钱　俊　鲁永芳 / 责任校对: 张小霞
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 1 月第　一　版　开本: 720 × 1000 1/16
2014 年 1 月第一次印刷　印张: 11 1/4
字数: 212 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

爱因斯坦 1915 年提出广义相对论后, 宇宙学才真正有了一个理论基础. 哈勃定律的发现表明了宇宙在向外膨胀, 而宇宙微波背景辐射的发现证实了宇宙在大尺度上是均匀各向同性的这一宇宙学原理, 对宇宙微波背景辐射的进一步精确测量发现了宇宙中的微小的各向异性, 从而支持了 20 世纪 80 年代提出的暴涨宇宙学模型. 超新星的观测在 1998 年发现了宇宙现在处于加速膨胀阶段, 从而表明宇宙中存在一种看不见的反引力的被称为暗能量的物质; 而星系的旋转曲线及宇宙中的引力透镜等观测结果表明了宇宙中还存在大量的不发光的暗物质. 这些都对物理学提出了挑战. 对宇宙微波背景辐射的更加深入的分析有助于我们深刻理解宇宙的演化历史, 而暗物质及暗能量的研究也许会带来物理学的革命, 所以详细而全面地介绍这些宇宙学的内容将帮助年轻一代更快地进入这一领域并开展这方面的研究工作.

目前国内的宇宙学方面的书籍很少[1~4], 而且大部分为科普性的读物; 少数几本宇宙学方面的书籍对于暴涨宇宙学及微波背景辐射这些宇宙学的重要内容的介绍不是很全面, 更没有详细介绍宇宙的加速膨胀及暗能量等方面的内容. 现代宇宙学发展的两个里程碑是宇宙的暴涨及现在的加速膨胀. 正由于有宇宙早期的暴涨导致的原初密度扰动, 才有我们现在的大尺度结构, 即宇宙早期暴涨引起的原初密度扰动是现在观测到的大尺度结构的种子. 现代天文观测精确测量到的宇宙中很小的各向异性可以用来验证暴涨模型; 另外, 最近的观测结果表明宇宙现在处于加速膨胀阶段. 这些最新的进展在国内的宇宙学书中没有进行详细的讨论; 本书的目的就是要弥补这方面的缺陷, 为从事宇宙学研究的研究生及科研工作者提供一本相对全面的基础理论著作. 本书的主要内容包括: 大爆炸标准模型、天文观测结果、宇宙的热演化历史、宇宙学微扰理论、暴涨宇宙学模型、宇宙微波背景辐射、暗能量模型等. 重点阐述宇宙的演化过程、原初轻元素的合成、宇宙中的距离测量及数据拟合方法、宇宙中的物质密度扰动、暴涨宇宙学模型及原初扰动谱的计算、宇宙微波背景辐射的各向异性的计算、宇宙加速膨胀的超新星观测证据、暗能量参数化、吸引子解的动力学分析等.

作者从 2007 年在重庆邮电大学开始本书的编著工作, 并最终在华中科技大学完稿. 在本书的编写过程中, 作者参考了宇宙学方面的相关书籍[5~16], 在此对这些书籍的作者表示感谢. 本书在 2007 年完成初稿后提供给重庆邮电大学理论物理专业的研究生阅读, 同时根据他们的反馈意见进行修改. 在编著过程中, 国内多位宇

宙学专家对本书提出了很多的宝贵意见. 在此特别感谢中国科学院理论物理研究所的张元仲研究员和蔡荣根研究员、北京师范大学朱宗宏教授、上海交通大学王斌教授、重庆邮电大学陈希明教授、张益副教授, 以及我的研究生林建忙、费寝、赵宓、徐春、郜青. 最后我感谢家人对我工作的长期支持及帮助.

由于作者的知识和水平有限, 错误和疏漏之处在所难免, 希望读者批评指正.

龚云贵

2013 年 6 月于华中科技大学

目　　录

第 1 章　标准宇宙学模型

《圣经》中记载上帝创造了天、地、人和万物. 上帝在第一天创造了白天和黑夜, 然后创造了水和万物, 并且在最后一天, 即第六天按照自己的模样创造了人. 然而我们不禁要问: 上帝又是怎么来的? 这在《圣经》中是一个不可回答的问题, 而我们也不试图回答宇宙的起点问题, 但是我们在本书中要学习宇宙产生后的演化历史及规律.

中国是世界上天文学发展最早的国家之一, 几千年来积累了大量宝贵的天文资料. 中国古代天文学萌芽于原始社会, 到战国秦汉时期形成了以历法和天象观测为中心的完整的体系. 什么是宇宙? 战国时期的尹佼认为“四方上下曰宇, 古往今来曰宙”, 即宇宙包括了所有的空间和时间. 而古代关于宇宙的学说有盖天说、浑天说、宣夜说三种学说, 这些在《晋书・天文志》中有记载:“古言天者有三家, 一曰盖天, 二曰宣夜, 三曰浑天.”盖天说可以追溯到殷周时代, 据《晋书・天文志》记载:“其言天似盖笠, 地法覆盘, 天地各中高外下. 北极之下为天地之中, 其地最高, 而滂沲四, 三光隐映, 以为昼夜. 天中高于外衡冬至日之所在六万里. 北极下地高于外衡下地亦六万里, 外衡高于北极下地二万里. 天地隆高相从, 日去地恒八万里. ”这种盖天说后来被简化为天圆地方说, 这在《周髀算经》中被表述为“天圆如张盖, 地方如棋局”.

浑天说则认为天如球形, 地球位于其中心. 其代表性人物有发明了可以演示日、月、星辰运动的浑天仪的落下闳, 以及发明了地动仪的张衡. 张衡在《浑天仪图注》中写道:“浑天如鸡子. 天体圆如弹丸, 地如鸡子中黄, 孤居于天内, 天大而地小. 天表里有水, 天之包地, 犹壳之裹黄. 天地各乘气而立, 载水而浮. 周天三百六十五度又四分度之一, 又中分之, 则半一百八十二度八分度之五覆地上, 半绕地下, 故二十八宿半见半隐. 其两端谓之南北极. 北极乃天之中也, 在正北, 出地上三十六度. 然则北极上规径七十二度, 常见不隐. 南极天地之中也, 在正南, 入地三十六度. 南规七十二度常伏不见. 两极相去一百八十二度强半. 天转如车毂之运也, 周旋无端, 其形浑浑, 故曰浑天. ”

宣夜说认为, 所谓“天”, 并没有一个固体的“天穹”, 而只不过是无边无涯的气体, 日月星辰就在气体中飘浮游动. 据《晋书・天文志》记载:“汉秘书郎郗萌记先师相传云:‘天了无质, 仰而瞻之, 高远无极, 眼瞀精绝, 故苍苍然也. 譬之旁望远道之黄山而皆青, 俯察千仞之深谷而窈黑, 夫青非真色, 而黑非有体也. 日月众星, 自

然浮生虚空之中, 其行其止皆须气焉. 是以七曜或逝或住, 或顺或逆, 伏见无常, 进退不同, 由乎无所根系, 故各异也. 故辰极常居其所, 而北斗不与众星西没也. 摄提、填星皆东行, 日行一度, 月行十三度, 迟疾任情, 其无所系著可知矣. 若缀附天体, 不得尔也.' ”宣夜说指出宇宙在空间上是无边无际的, 而且还进一步提出宇宙在时间上也是无始无终的、无限的思想. 而且宇宙中的天体由气体构成. 因此, 宣夜说是中国古代一种朴素的无限宇宙观念, 这在古代众多的宇宙学说中是非常难得的.

现代宇宙学是在爱因斯坦广义相对论的基础上建立起来的, 通常也称为大爆炸宇宙学. 按照这个理论, 宇宙是在过去有限的时间之前, 由一个密度极大且温度极高的原初状态演变而来的, 并经过不断的膨胀到达今天的状态. 比利时神父、物理学家勒梅特 (Lemaître) 首先提出了关于宇宙起源的大爆炸理论, 但他本人将其称作“原生原子的假说”[17]. 苏联物理学家弗里德曼 (Friedmann) 假设了宇宙在大尺度上均匀和各向同性并利用广义相对论及理想流体的描述给出了这一模型的场方程[18]. 这个方程的解往回推的时候, 会有一个起点. 在这个起点的时候, 宇宙的尺寸为零且物质的密度及温度为无穷大, 通常称为大爆炸的起点. 大爆炸一词首先是由英国天文学家霍伊尔 (Hoyle) 采用的, 他在 1949 年 3 月英国广播公司的一次广播节目中将勒梅特等的理论称作“这个大爆炸的观点”. 40 年代伽莫夫 (Gamow) 等在大爆炸理论框架下提出了原初元素合成的理论[19, 20], 并进一步发展和完善了热大爆炸理论. 阿尔菲 (Alpher) 和赫尔曼 (Herman) 在伽莫夫的工作基础上[21] 预言了宇宙微波背景辐射的存在, 只是他们当时预言的温度为 5 K[22].

1.1　宇宙学原理

自从哥白尼冲破地心说的束缚提出日心说后, 人们便逐渐认识到宇宙并没有一个特殊的中心, 即宇宙中没有哪一个位置是特别优越的. 或者说, 宇宙中所有的位置本质上都是等价的. 现代宇宙学正是建立在这样的假设基础上.

要研究宇宙学, 首先需要知道宇宙学所基于的基本物理学原理. 显然宇宙学是把整个宇宙作为研究对象的, 而在宇宙这么大尺度上, 电中性物质的相互作用主要为引力相互作用, 所以宇宙学的基本物理学理论是广义相对论. 由于爱因斯坦场方程非常复杂, 而且宇宙中的物质分布也是一个未知数, 为了求解场方程, 宇宙学家提出了宇宙学原理的假设. 宇宙学原理指出在大尺度上 (大于 3 亿光年) 及所有时间里, 宇宙是均匀各向同性的. 均匀性意味着空间中每一点都相同, 各向同性是指从任意方向上都看到相同的宇宙. 当然这是指在典型星系邻域中以该星系平均速度运动的观测者在可以通过空间坐标转动相联系的任意点上同时观察到相同的结果. 由于空间中的任意两点都可以通过一系列的转动变换联系起来, 如果宇宙中没有一个特殊的位置, 则各向同性意味着均匀性. 目前各向同性在 10^{-5} 精度上被宇

宙微波背景辐射实验所证实.

要理解大尺度下的均匀性, 可以拿一个由很多相同图案构成的地毯作类比. 如果在小于单个图案的尺度上看地毯, 则地毯的图案分布是不均匀的. 但是如果选取整个图案作为一个单元, 则地毯的图案分布是均匀的. 也就是说, 宇宙的均匀性并不适用于宇宙的细节, 如太阳系、银河系, 甚至星系团等, 它是对于直径为 3 亿光年的区域平均后得到的"抹匀的"宇宙而言. 宇宙学原理最初是由爱因斯坦在马赫原理的基础上引进的一个假设, 当时并没有任何实验证据来支持这一假设. 马赫原理假设惯性参考系由宇宙中的物质的运动及分布来决定, 所以在远离宇宙物质的地方, 时空几何是闵可夫斯基 (Minkowski) 的. 假设宇宙中的物质分布是均匀各向同性, 则一个粒子不能运动到离宇宙中其他物质无穷远的地方去, 宇宙的运动规律由宇宙中的物质分布来决定.

1.2 牛顿宇宙学

由于宇宙在大尺度上是均匀各向同性的, 所以球对称性告诉我们宇宙中物质的运动只受球体内物质引力的作用, 而与球体外物质的引力无关. 考虑一个点粒子在一个球心位于 O 点, 半径为 l, 质量为 m 的球体表面的运动, 由牛顿力学可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{l^2}. \tag{1.1}$$

用 $\dot{l}$ 代表对时间的导数 $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$, 在上式两边同乘以 $\dot{l}$, 便得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{l}^2}{2}\right) = -\frac{Gm}{l^2}\dot{l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Gm}{l}\right), \tag{1.2}$$

积分后得到

$$\dot{l}^2 = \frac{2Gm}{l} + C = \frac{8\pi G}{3}\rho l^2 + C. \tag{1.3}$$

哈勃发现宇宙是膨胀的, 在共动坐标系下, 物质和宇宙是一起膨胀的, 所以上面的物理距离和共动坐标距离并不相同. 在膨胀的宇宙中, 物理距离 l 和共动距离 d_c 之间的关系是

$$l = a d_c. \tag{1.4}$$

把式 (1.4) 代入方程 (1.3), 而且令 $K = -C/d_c^2$, 则可以得到弗里德曼方程

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2.$$

上式的推导是利用万有引力定律及牛顿第二定律得到的, 而并没有用到广义相对论. 当然包含弗里德曼方程在内的宇宙学的演化方程的更严格的推导应该从爱因斯

坦场方程得到. 这里只是说明弗里德曼方程在某种意义上利用牛顿力学就可以得到.

1.3 罗伯逊–沃克度规

根据宇宙学原理, 在大尺度上, 宇宙是均匀各向同性的, 而描述均匀各向同性宇宙的最一般的时–空度规是罗伯逊–沃克 (Robertson-Walker, RW) 度规

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\right), \tag{1.5}$$

式中 $a(t)$ 是一个具有长度量纲的时间的未知函数, 也称为宇宙标度因子或膨胀参数, t 是宇宙标准时, 而 r 与 K 是无量纲的, 曲率参数 K 是一常数, 坐标 r、θ、ϕ 是共动球坐标系中的坐标. 本书中除特别说明外, 光速 c 取为 $c=1$. 通过适当选择 r 的度量, 可使得 K 取值为 $+1$、0、或 -1, 分别对应于闭宇宙、平坦宇宙及开宇宙. 如果 $K=1$, 则 r 取值范围为 0 到 1.

如果把 RW 度规写成 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\bar{g}_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, 则非零的仿射联络为

$$\Gamma^t_{ij} = a\dot{a}\bar{g}_{ij} = a\dot{a}\left(\delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1-Kx^2}\right), \tag{1.6}$$

$$\Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \tag{1.7}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} \equiv \frac{1}{2}\bar{g}^{il}\left(\frac{\partial \bar{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \bar{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial x^l}\right). \tag{1.8}$$

由粒子运动的测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{1.9}$$

可知, 在此坐标系中静止的粒子 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s = 0$, 将保持静止状态, 因为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} = -\Gamma^i_{00}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0.$$

也就是说, RW 度规给出的是共动坐标系.

为了理解三维空间度规的意义, 先讨论一个三维球. 在四维平直空间中, 三维球定义为

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \tag{1.10}$$

其空间度规为 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \mathrm{d}x_4^2$, 这里标度因子具有距离量纲. 利用球面的定义式 (1.10) 可消掉坐标 x_4, 并得到

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \frac{(x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2 + x_3\mathrm{d}x_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \tag{1.11}$$

引入球坐标 $x_1 = ar\sin\theta\cos\phi$, $x_2 = ar\sin\theta\sin\phi$, $x_3 = ar\cos\theta$, 其中 r 是无量纲的数, 则度规式 (1.11) 可以写成

$$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right].$$

这正是 RW 度规空间部分 $K=1$ 时的形式. 如果让 $r=\sin\chi$, 则上述度规还可以写成

$$\mathrm{d}l^2 = a^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)].$$

三维球的体积是 $V = \int \mathrm{d}^3x\sqrt{\bar{g}}a^3 = 2\pi^2a^3$.

对于三维的超曲面, 只要把式 (1.10) 中的坐标 x_4 换成 $\mathrm{i}x_4$, 球的半径 a 换成 $\mathrm{i}a$, 则在式 (1.11) 中把 a 换成 $\mathrm{i}a$ 后得到

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 - \frac{(x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2 + x_3\mathrm{d}x_3)^2}{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{1.12}$$

利用球坐标, 则得到

$$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1+r^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right].$$

这样得到的便是 RW 度规空间部分取 $K=-1$ 的形式. 取 $r=\sinh\chi$, 上述度规也可以写成

$$\mathrm{d}l^2 = a^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)].$$

1.4 弗里德曼方程

由 RW 度规式 (1.5) 及仿射联络式 (1.6) 和里奇 (Ricci) 张量的定义

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_\mu\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}, \quad R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}. \tag{1.13}$$

可以得到里奇张量的非零分量

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad {}^{(3)}R_{ijkl} = K(\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl} - \bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}), \tag{1.14}$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)\bar{g}_{ij}. \tag{1.15}$$

则里奇标量 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$,

$${}^{(3)}R = 6K, \quad R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2}\right). \tag{1.16}$$

所以爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 的非零分量是

$$G_{00} = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right], \quad G_{ij} = -(\dot{a}^2 + K + 2a\ddot{a})\bar{g}_{ij}. \tag{1.17}$$

另一方面, 能量–动量张量具有理想流体形式

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)U_\mu U_\nu, \tag{1.18}$$

式中能量密度 ρ 和压强 p 仅为 t 的函数, 四维共动速度矢量

$$U^t = 1, \quad U^i = 0. \tag{1.19}$$

把 RW 度规式 (1.5) 代入理想流体方程 (1.18), 则得到非零能量–动量张量分量

$$T_t^t = -\rho, \quad T_j^i = p\delta_j^i, \quad T = -\rho + 3p. \tag{1.20}$$

联立方程 (1.17) 和方程 (1.20), 由爱因斯坦场方程 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ 的时间–时间分量得到弗里德曼方程[18]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{1.21}$$

由场方程的空间–空间分量得到方程

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G p. \tag{1.22}$$

联立方程 (1.21) 和方程 (1.22), 可以得到加速度运动方程

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{1.23}$$

由弗里德曼方程 (1.21) 和加速度方程 (1.23) 可以得到物质能量守恒方程

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{1.24}$$

上述能量守恒方程也可以从 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 直接得到. 上面三个微分方程 (1.21), 方程 (1.23), 方程 (1.24) 只有两个是互相独立的. 而方程中有 $a(t)$, $\rho(t)$ 及 $p(t)$ 三个未知数, 所以还需要加上一个方程及初始条件才能求解宇宙的演化方程, 通常加上物态方程 $p = f(\rho)$ 及宇宙学参数现在的取值作为初始条件. 为了求解方程方便, 选取一阶微分方程, 弗里德曼方程 (1.21) 和物质能量守恒方程 (1.24), 再加上物态方程 $w = p/\rho$ 及宇宙学参数现在的取值作为初始条件来求解宇宙的演化. 如果物态方程参数 $w = p/\rho$ 是一个常数, 则能量守恒方程可以解得 $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.

对于尘埃物质,

$$w = 0, \quad \rho \propto a^{-3}. \tag{1.25}$$

对于辐射物质,

$$w = 1/3, \quad \rho \propto a^{-4}. \tag{1.26}$$

定义哈勃参数和减速参数如下:

$$H(t) \equiv \dot{a}/a = \frac{\mathrm{d}a/\mathrm{d}t}{a}, \tag{1.27}$$

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{1}{aH^2}\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.28}$$

则宇宙的运动方程可以写为

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{1.29}$$

宇宙现在的年龄可以通过以下积分得到

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{\mathrm{d}a}{aH(a)}. \tag{1.30}$$

在本书中, 除特别说明外, 下标 0 表示物理量取现在的值. 定义宇宙临界密度

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{1.31}$$

及无量纲密度比重参数 Ω

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}. \tag{1.32}$$

则现在的临界密度是

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.1 \times 10^{-29}\left(\frac{H_0}{75\ \mathrm{km/s/Mpc}}\right)^2\ \mathrm{g/cm}^3, \tag{1.33}$$

及现在的密度比重参数 Ω_0 为

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}. \tag{1.34}$$

定义曲率密度比重参数 Ω_k 为

$$\Omega_k \equiv \frac{-K}{a^2H^2}. \tag{1.35}$$

利用代表宇宙中所有物质总和的密度比重参数 Ω_{tot}, 弗里德曼方程可以写成

$$\Omega_k + \Omega_{\mathrm{tot}} = 1. \tag{1.36}$$

在天文观测上, 通过测量 Ω_{tot} 的值并与 1 进行比较, 便可知道宇宙空间的几何. 另外, 宇宙的加速方程可以写成

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3H^2} = \frac{1}{2}(1 + 3w_{\mathrm{tot}})\Omega_{\mathrm{tot}}. \tag{1.37}$$

式中 $w_{\mathrm{tot}} = p_{\mathrm{tot}}/\rho_{\mathrm{tot}}$. 如果宇宙中物质包含普遍尘埃物质、辐射及宇宙学常数, 则 $q = \Omega_r - \Omega_\Lambda + \Omega_m/2$.

1.5　物质为主的宇宙

如果宇宙中的能量密度贡献主要来自物质, 则称宇宙处于物质为主时期, 这种宇宙学模型也称为物质为主的模型. 对于物质, $p=0$, 其物态方程参数 $w=p/\rho=0$. 能量守恒方程 (1.24) 的解为

$$\rho_m=\rho_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \tag{1.38}$$

式中 ρ_{m0} 是物质现在的能量密度, a_0 是标度因子现在的值. 在物质为主时期, 宇宙的运动方程为

$$H^2+\frac{K}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho_m, \tag{1.39}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\rho_m. \tag{1.40}$$

从加速度方程 (1.37) 及方程 (1.40) 可以得到

$$q_0=\frac{4\pi G\rho_{m0}}{3H_0^2}=\frac{\Omega_{m0}}{2}. \tag{1.41}$$

而从弗里德曼方程 (1.39) 可以得到

$$H_0^2+\frac{K}{a_0^2}=\frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}=\Omega_{m0}. \tag{1.42}$$

联立方程 (1.41) 和方程 (1.42) 则可得到

$$\Omega_{k0}=-\frac{K}{a_0^2H_0^2}=1-2q_0. \tag{1.43}$$

对于平坦宇宙, $q_0=1/2$ 及 $\Omega_{m0}=1$; 对于开宇宙, 则 $\Omega_{k0}>0$, $\Omega_{m0}<1$ 及 $q_0<1/2$; 对于闭宇宙, 则 $\Omega_{k0}<0$, $\Omega_{m0}>1$ 及 $q_0>1/2$.

把方程 (1.38), 方程 (1.41) 和方程 (1.43) 代入方程 (1.39) 则可得到

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2=H_0^2\left[1-2q_0+2q_0\left(\frac{a_0}{a}\right)\right]. \tag{1.44}$$

更一般地, 对于物态方程参数为常数 w 的物质为主的宇宙, 利用方程 (1.37), 方程 (1.41) 可推广为

$$q_0=\frac{4\pi G(1+3w)\rho_{w0}}{3H_0^2}=\frac{1+3w}{2}\Omega_{w0}, \tag{1.45}$$

方程 (1.43) 推广为

$$\Omega_{k0}=1-\frac{2q_0}{1+3w}, \tag{1.46}$$