

平面幾何學要覽

二冊

中華民國八年五月初版

(平面幾何學要覽二冊)

(上冊定價大洋貳角伍分)

(外埠酌加運費匯費)

編譯者 泰和匡文濤

校訂者 紹興駱師曾

發行者 商務印書館

印刷所 上海北河南路北首寶山路
商務印書館

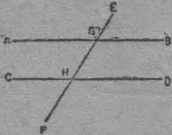
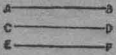
總發行所 上海棋盤街中市
商務印書館

分售處 商務印書分館

長沙 常德 成都 重慶 瀘縣 福州
廣州 潮州 香港 桂林 梧州 雲南
貴陽 張家口 新嘉坡

此書有著作權翻印必究

平行線之定理及問題 (其二) (平面幾何學上 11)

定 理	證 明	問 題
(定理 6) 一直線交於二平行線上其錯角必相等	 (題意) EF 與互相平行之 AB, CD 相交於 G, H 二點(假設) 則 $\left. \begin{aligned} \angle AGH &= \angle GHD \\ \angle BGH &= \angle GHC \end{aligned} \right\} \text{(終結)}$ (證明) 過 G 點作等於 $\angle GHD$ 之錯角之直線則與 CD 平行 (定理 5) 然 $AB \parallel CD$ 而過 G 平行於 CD 之直線只一個 (公理 4) 是過 G 作等於 $\angle GHD$ 之直線僅有 AB 直線 $\therefore \angle AGH = \angle GHD$ 其他亦得同樣證之	(1) 一直線與二平行線相交則其同位角相等同側之內角為補角 (2) 一直線交於二平行線之一則必交於其他 (3) 相交二直線之二垂線亦必相交
(定理 7) 平行於同一直線之二直線互為平行	 (題意) $AB \parallel EF, CD \parallel EF$ (假設) 則 $AB \parallel CD$ (終結) (證明) 試令 AB, CD 不平行而相交則過其交點得作平行於 EF 之二直線是與公理 4 不合故 AB, CD 不相交即平行	

(平面幾何學上 12) 平行線問題之解答 (其二)

(1) (定理 6 之圖) (題意) EF 交平行線 AB, CD 之點爲 G, H (假設) 則

$$\angle EGB = \angle GHD$$

$$\angle EGA = \angle GHC$$

$$\angle BGH + \angle GHD = 2R\angle$$

$$\angle AGH + \angle GHC = 2R\angle$$

(終結)

(證明) $\angle AGH = \angle GHD$ (定理 6)

$$\angle AGH = \angle EGB \text{ (定理 4)}$$

$$\therefore \angle EGB = \angle GHD$$

同樣得 $\angle EGA = \angle GHC$

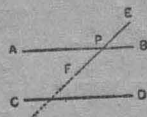
又 $\angle AGH + \angle BGH = 2R\angle$ (定理 2)

$$\angle AGH = \angle GHD \text{ (定理 6)}$$

$$\therefore \angle GHD + \angle BGH = 2R\angle$$

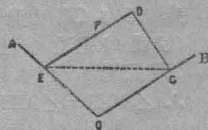
同樣得 $\angle AGH + \angle GHC = 2R\angle$

(2) (題意) $AB \parallel CD$, EF 交 AB 於 P (假設) 則 EF 又交 CD (終結)



(證明) 令 EF, CD 互爲平行是得作平行於 CD 之二平行線 A EF 與公理不合故 EF 與 CD 交

(3) (題意) 相交之二直線 AO, BO 其垂直線 EF, CD 亦相交



(證明) $\angle OOD = R\angle$

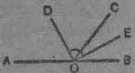
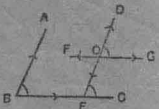
$$\angle OEF = R\angle$$

$$\therefore \angle OCD + \angle OEF = 2R\angle$$

連結 E, C 則 $\angle CEF + \angle ECD$

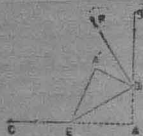
小於 $\angle OEF + \angle OCD$ 即小於 $2R\angle$

即 $\angle CEF + \angle ECD$ 非補角故 OD, EF 相交

定 理	證 明	問 題
(1) 二直線所成隣角之二等分線互為垂線	 (題意) 二直線 AB, CO 交於 O 其隣角 $\angle AOC, \angle BOC$ 之二等分線為 DO, EO (假設) 則 $\angle DOE = R\angle$ (終結) (證明) $\angle AOC = 2\angle DOC, \angle BOC = 2\angle COE$ 然 $\angle AOC + \angle BOC = 2R\angle$ $\therefore 2\angle DOC + 2\angle COE = 2R\angle$ $\therefore \angle DOC + \angle COE = R\angle$ 即 DO, EO 互為垂直	(1) 返折紙隅則其緣之二部分成角此角之二等分線與折邊必成直角 (2) OM 為 $\angle AOB$ 之二等分線 ON 為角內一直線則 $\angle MON$
(2) 此角之二邊各與他角之二邊平行則此二角相等或互為補角	 (題意) 有 $\angle ABC, \angle DOG$ 其 $AB \parallel DO, BC \parallel OG$ (假設) 則 $\angle ABC = \angle DOG$ $\angle ABC + \angle GOE = 2R\angle$ (終結) (證明) 令 DO 延長至 E 與 BC 相交又延長 GO 至 F 則 $\angle ABC = \angle OEC = \angle DOG = \angle EOF$ $\angle DOG + \angle GOE = 2R\angle, \angle DOG + \angle DOF = 2R\angle$ $\therefore \angle ABC + \angle GOE = 2R\angle, \angle ABC + \angle DOF = 2R\angle$	$= \frac{1}{2}(\angle AON \sim \angle BON)$ 又 ON' 為角外一直線則 $\angle MON'$ $= \frac{1}{2}(\angle AON' + \angle BON')$ (3) 二角之邊各各平行則其二等分線平行或垂直

(平面幾何學上 14) 角及平行線應用問題之解答

(1) (題意) 返折紙端 BAC 折邊為 DE 則 DA'E

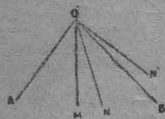


由 DAE 而來而線 A'D 與 BD 成 $\angle BDA'$ 此角之二等分線 DF 與 DE 成直角

(證明) $\angle A'DE$ 因 $\angle ADE$ 返折而移其位置故相等即 DE 二等分 $\angle A'DA$ 又 DF 二等分 $\angle A'DB$

$\therefore \angle FDE$ 為直角即 DF 與折邊 DE 垂直

(2) (證明) ON 在 $\angle BOM$ 之內則 $\angle AOM = \angle BOM$



$$\angle AON = \angle AOM + \angle MON$$

$$\angle BON = \angle BOM - \angle MON$$

$$\therefore \angle AON - \angle BON$$

$$= (\angle AOM + \angle MON)$$

$$- (\angle BOM - \angle MON)$$

$$= 2\angle MON$$

$$\therefore \angle MON = \frac{1}{2}(\angle AON - \angle BON)$$

同樣 ON 在 AOM 之內則得證之如次

$$\angle MON = \frac{1}{2}(\angle BON - \angle AON)$$

故無論如何 $\angle MON = \frac{1}{2}(\angle AON - \angle BON)$

又 ON' 在 OB 與 OA 反對之側 則

$$\angle AON' = \angle AOM + \angle MON'$$

$$\angle BON' = \angle MON' - \angle BOM$$

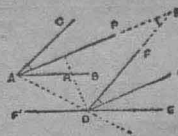
$$\therefore \angle AON' + \angle BON'$$

$$= (\angle AOM + \angle MON') + (\angle MON' - \angle BOM)$$

$$= 2\angle MON'$$

$$\therefore \angle MON' = \frac{1}{2}(\angle AON' + \angle BON')$$

(3) (題意) $AC \parallel DE$, $AB \parallel DE$ 延長 DE 至 F', AP,



DQ, DR 為 $\angle BAC$, $\angle EDF$, $\angle F'DF$ 之二等分線 (假設)

則 $AP \parallel DQ$ } (終結)
 $AP \perp DR$ }

(證明) AP, DF 之交點為 K 則

$$\angle CAP = \angle PKF \text{ (錯角)}$$

$$\angle CAP, \angle FDQ \text{ 各等於等角之 } \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle AKD = \angle KDK \therefore AP \parallel DQ$$

$$\text{又 } DR \perp DQ, DR \perp AP$$

定

義

〔平面形, 直線形〕 平面形者以線包圍平面之一部分也其以直線圍成者曰直線平面形或單稱直線形

〔多角形〕 直線形一名多角形亦稱多邊形

〔三角形〕 以三直線包圍之平面形曰三角形

〔邊〕 多角形之邊即所包圍部分之直線限界也

〔內角〕 多角形之內角即二邊所夾形內之角凡單稱直線形之角者均指內角而言

〔外角及內對角〕 多角形之一邊與其隣邊之延長線所成之角曰外角其不與外角相接之內角曰其外角之內對角

〔對角線〕 多角形之角頂就其不相隣者連結之直線曰對角線

〔正多角形〕 凡邊及角皆相等之多角形曰正多角形

〔凸多角形, 凹多角形〕 多角形之內角均小於二直角者曰凸多角形若其內角有一大於二直角者則曰凹多角形

〔周〕 多角形各邊之和曰周

〔面積〕 以平面形之周為界則其界限內之量為面積

〔多角形之種類〕 有四邊之多角形曰四邊形有五邊之多角形則曰五邊形六邊以上仿此稱謂又就角之數而言稱為四角形五角形等

〔底邊〕 三角形之邊可任以一邊曰底邊

〔頂點〕 對於三角形底邊之角頂曰頂點

〔二等邊三角形〕 三角形有二邊相等則曰二等邊三角形其二等邊所夾之角曰頂角其餘之第三邊曰底邊

(平面幾何學上 16) 關於直線形之定義 (其二)

定

義

〔正三角形〕 卽三邊相等之三角形

〔直角三角形〕 卽內有一角爲直角之三角形而對於直角之邊曰斜邊

〔鈍角三角形〕 其內角有一爲鈍角之三角形

〔銳角三角形〕 其內角均爲銳角之三角形

〔距離〕 點與直線之距離卽從其點至直線之垂線之長也

〔中線〕 三角形之中線卽頂點與對邊中點相連結之直線

〔平行四邊形〕 卽兩雙對邊平行之四邊形

〔梯形〕 一雙相對之邊互爲平行之四邊形

〔矩形〕 平行四邊形之各角爲直角者曰矩形

〔菱形〕 平行四邊形之各邊相等者曰菱形

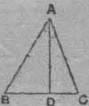
〔正方形〕 卽各邊相等之矩形

〔二平行線之距離〕 此卽垂直之直線在平行線間部分之長

〔點對稱〕 從一直線上之一點在反對之側有等距離之二點在其直線上則此二點曰關於其點爲對稱又就平面形之各點有一點爲對稱之點則本圖形曰關於其點爲對稱而其點曰對稱之中心

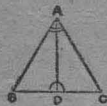
〔線對稱〕 依一直線返折而此一圖形全重合在他圖形之上則此圖形曰對於其直線爲對稱其直線曰對稱軸

三角形之定理及問題 (其一) (平面幾何學上 17)

定 理	證 明	問 題
(定理 8) 兩三角形有一角與其夾邊相等則爲全等形即對於等邊之角及對於等角之邊亦相等	(甲) (乙) (題意) $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ $\angle BAC=\angle B'A'C'$ (假設) 則 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$ $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $BC=B'C'$ (終結) (證明) 以乙置於甲之上即 A' 在 A 之上 $A'B'$ 在 AB 之上 $\because AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$, $\therefore B'$ 與 B 重合 $A'C'$ 與 AC 重合 $\because AC=A'C'$ $\therefore C'$ 重合在 C 之上 $B'C'$ 全與 BC 重合 $\therefore \triangle ABC=\triangle A'B'C'$	(1) 二等分三角形一角之直線若爲其對邊之垂線則其三角形爲二等邊三角形 (2) 二等邊三角形其頂角二等分線上之任一點與底邊之兩端等距離
系 二等邊三角形 ABC 之頂角之二等分線爲底邊之垂線且二等分底邊	(證明) $AB=AC$, AD 共有 $\angle BAD=\angle CAD$ $\therefore \triangle BAD=\triangle CAD$ 從而知 AD 垂直於 BC 且二等分 	(3) 二等邊三角形之二中線相等
(定理 9) 兩三角形有二角及其頂點間之邊相等則爲全等形即等角之對邊及等邊之對角亦等	(題意) (定理 8 圖) $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ (假設) $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$, $AC=A'C'$, $AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$ (終結) (證明) 與定理 8 同樣置乙於甲之上 $B'C'$ 全與 BC 重合則 $A'B'$, $A'C'$ 全與 AB, AC 重合 $\therefore \triangle ABC=\triangle A'B'C'$	(4) 二等邊三角形之二垂線相等

(平面幾何學上 18) 三角形問題之解答(其一)

(1) (題意) $\angle BAD = \angle CAD$, $AD \perp BC$ (假設)



則 $AB = AC$ (終結)

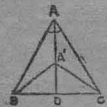
(證明) 於 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$

$\angle BAD = \angle CAD$

$\angle ADB = \angle ADC$

且 AD 共有 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ 從而 $AB = AC$

(2) (題意) $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$ (假設)



則 $A'B = A'C$ (終結)

(證明) 由定理 8 之系

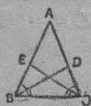
$BD = DC$ 且 $AD \perp BC$

故知 $\triangle A'BD$, $\triangle A'CD$ 之二邊及

夾角相等

$\therefore \triangle A'BD \cong \triangle A'CD$ 從而 $A'B = A'C$

(3) (題意) $AC = AB$



D, E 各為 AC, AB 之中點 (假設)

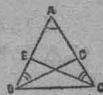
則 $BD = CE$ (終結)

(證明) 以 $AB = AC$, $AD = AE$

故於 $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ 其 $\angle A$ 兩形共有而夾邊相等

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ 從而 $BD = CE$

(4) (題意) $AB = AC$, $BD \perp AC$, $CE \perp AB$ (假設)



則 $BD = CE$ (終結)

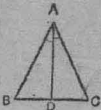
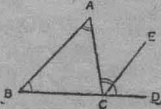
(證明) $\angle ABD$ 及 $\angle ACE$ 為 $\angle A$ 之餘角而相等

$\therefore$ 於 $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ 其

$AB = AC$, $\angle A$ 共有, $\angle ABD = \angle ACE$

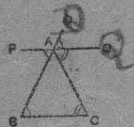
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ 從而 $BD = CE$

三角形之定理及問題 (其二) (平面幾何學上 19)

定 理	證 明	問 題
(定理 10) 三角形之二邊相等則其相對之角亦相等 系 三角形之三邊相等則其三角亦等	 (題意) $AB=AC$ (假設) 則 $\angle B=\angle C$ (終結) (證明) 引 $\angle A$ 之二等分線 AD $\therefore AB=AC, AD$ 共有 $\angle BAD=\angle CAD$ 則 $\triangle ABD=\triangle ACD \therefore \angle B=\angle C$	(1) 過二等邊三角形之頂點作直線與底邊平行必二等分頂點之外角 (2) 二等邊三角形其底角之二等分線相等 (3) 同一底邊上作二個二等邊三角形連結其頂點之直線必為底邊之垂線且二等分
(定理 11) 三角形之二角相等則其對邊亦等 系 三角形之三角相等則其三邊亦等	(題意) (前圖) $\angle B=\angle C$ (假設) 則 $AC=AB$ (終結) (證明) 作 $AD \perp BC$ 則 $\angle ADB=\angle ADC=\angle R$ 又 $\angle B=\angle C$ 則其餘角 $\angle BAD=\angle CAD$ 且 AD 共有 $\therefore \triangle ABD=\triangle ACD \therefore AB=AC$	(4) 二個三角形之二角兩兩相等則其餘一角亦相等 (5) O 為 $\triangle ABC$ 內之一點則 $\angle BOC = \angle BAC + \angle ABO + \angle ACO$
(定理 12) 三角形之外角等於其內對角之和而其內角之和等於二直角	 (題意) 邊 BC 延長至 CD (假設) 則 $\angle ACD=\angle A+\angle B$ $\angle A+\angle B+\angle C=2R^\circ$ (終結) (證明) 作 $CE \parallel AB$ 則 $\angle ACE=\angle BAC, \angle ECD=\angle ABC$ $\therefore \angle ACD=\angle A+\angle B$ 又 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACD+\angle ACB=2R^\circ$	

(平面幾何學上 20) 三角形問題之解答(其二)

(1) (證明) $\angle CAD$ 爲頂角之外角 PAQ 爲與 BC 平行之直線則



$$\angle DAQ = \angle ABC$$

$$\angle QAC = \angle ACB$$

$$\text{然 } \angle ABC = \angle ACB$$

$$\therefore \angle DAQ = \angle QAC$$

(2) (題意) 令 $AB=AC$ 而 BD, CE 爲底角 B, C 之二等分線 (假設)



則 $BD=CE$ (終結)

(證明) $\angle DCB = \angle ECB$, BC 共有

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \angle C = \angle ECB$$

$$\therefore \triangle BDC = \triangle CEB \text{ 從而 } BD=CE$$

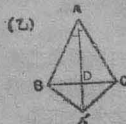
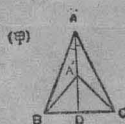
(3) (證明) 於 $\triangle ABC$ $\angle ABC = \angle ACB$

同樣 $\angle A'BC = \angle A'CB$

$$\therefore \angle ABA' = \angle ACA' \text{ (甲爲差乙爲和)}$$

$$\therefore \text{於 } \triangle ABA', \triangle ACA'$$

$$AB=AC, A'B=A'C$$



$\angle ABA' = \angle ACA'$ 故兩形全等

而 $\angle BAA' = \angle CAA'$ 故知 AA' 爲 BC 之垂線且二等分之

(4) (證明) 三角形內角之和均爲 $2R^\circ$ 而相等今二角既各各相等則其所餘之一角不得不等

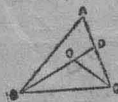
(5) (證明) 延長 BO 與 AC 相交於 D

$$\text{則 } \angle BOC = \angle ODC + \angle OCA$$

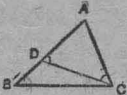
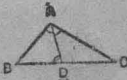
$$\text{又 } \angle ODC = \angle BAC + \angle OBA$$

$$\therefore \angle BOC$$

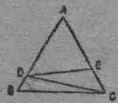
$$= \angle BAC + \angle OBA + \angle OCA$$



三角形之定理及問題 (其三) (平面幾何學上 21)

定 理	證 明	問 題
(定理 I3) 三角形之二邊不等則其對大邊之角大於其對小邊之角	 (題意) 有 $\triangle ABC$, $AB > AC$ (假設) 則 $\angle ACB > \angle ABC$ (終結) (證明) 過 C 作直線交 AB 於 D 令 $AD = AC$ 則 $\angle ACD = \angle ADC = \angle ABC + \angle BCD$ $\therefore \angle ACD > \angle ABC$ 從而 $\angle ACB > \angle ABC$	(1) 兩端在正三角形二邊上之直線必比三角形之一邊小 (2) 三角形 ABC 之 $\angle A$ 之二等分線為 AD 若 $AB > AC$, 則 $BD > CD$
(定理 I4) 三角形之二角不等則對大角之邊大於對小角之邊	(題意) (前圖) 有 $\triangle ABC$, $\angle C > \angle B$ (假設) 則 $AB > AC$ (終結) (證明) $AC > AB$ 則 $\angle B > \angle C$, $AC = AB$ 則 $\angle B = \angle C$ 皆與假設不合 故不得不 $AC < AB$	(3) $\triangle ABC$, $AB > AC$ AD 為中線 則 $\angle CAD > \angle BAD$
(定理 I5) 三角形二邊之和 大於他之一邊 三角形二邊之差 小於他之一邊	 (證明) 引 $\angle BAC$ 之二等分線 AD 而 $\angle BDA > \angle DAC = \angle BAD$ $\therefore BD < BA$ 同樣 $\angle CDA > \angle CAD$ $\therefore DC < AC$ $\therefore BD + DC < AB + AC$ 即 $BC < AB + AC$	(4) 二等邊 $\triangle ABC$ 之底之中點為 I, AC 上之一點為 M 則 $IB \sim IM < AB - AM$

- (1) (題意) 正三角形 ABC , DE 爲兩端在 AB, AC 上之直線 (假設)



則 $BC > DE$ (終結)

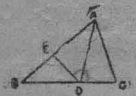
(證明) $\angle BDC > \angle DAC = \angle DBC$

$\therefore BC > DC$

又 $\angle DEC > \angle DAE = \angle BCE > \angle DCE$

$\therefore DC > DE \therefore BC > DE$

- (2) (證明) 於 AB 上取 AE 令等於 AC 連結 DE



則 $\triangle ADC \cong \triangle ADE$

$\therefore AC = AE, AD$ 共有

$\angle CAD = \angle EAD$

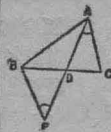
$\therefore \angle ADC = \angle ADE$

又 $\angle ADC > \angle ABC, \angle ADE < \angle BED$

$\therefore \angle BED > \angle ABC$, 即 $\angle BED > \angle EBD$

$\therefore ED > DE = CD$ 即 BD 比 CD 大

- (3) (證明) 延長 AD 令 $DE = AD$ 又連結 BE 以二邊與夾角相等



則 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ 從而 $AC = BE$

$\angle DAC = \angle DEB$

$\therefore \triangle ABE, AB > BE$

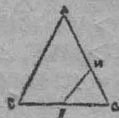
$\therefore \angle AEB > \angle EAB$ 即 $\angle CAD > \angle BAD$

- (4) (證明) 於 $\triangle IMC$

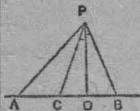
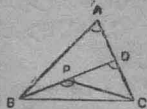
$IC - IM < MC = AC - AM$

以 $BI = IC, AC = AB$

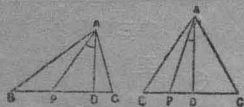
$\therefore IB - IM < AB - AM$



三角形之定理及問題(其四) (平面幾何學上 23)

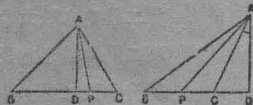
定 理	證 明	問 題
(定理 16) 從直線外一點至此線所引諸直線以垂線為最短而與垂線成等角之直線相等與垂線成大角之直線大於其成小角之直線	 (題意) $PO \perp AB$, $\angle BPO = \angle CPO$ $\angle APO > \angle CPO$ (假設) $PO < PB$, $PB = PC$, $AP > PC$ (終結) (證明) 於 $\triangle BPO$ 其 $\angle PBO < \angle POB$ $\therefore PO < PB$ 又 $\triangle POB$, $\triangle POC$ 其 $\angle POB = \angle POC$ $\angle BPO = \angle CPO$, PO 為共有故兩形全等 $PB = PC$ 又 $\angle APO > \angle BPO$ 雙方從 $\angle$ 減之 則 $\angle PAO < \angle PBO$ 從而 $PA > PB = PC$	(1) 自三角形之一頂點至對邊作直線則此直線小於在頂點相會二邊中之較大者若二邊相等則此直線皆小於二邊 (2) 從三角形 ABC 內之一點 O 至各頂點作直線 OA, OB, OC 則此三直線之和小於三角形之周而大於其半周
(定理 17) 從三角形一邊之兩端至形內一點所作直線之和比他二邊之和小而其所夾之角較大	 (題意) $\triangle ABC$ 內之一點為 P (假設) 則 $BP + PC < BA + AC$, $\angle BPC > \angle BAC$ (終結) (證明) 試延長 BP 交 AC 於 D 則 $PC < PD + DC$ 雙方加 BP 則 $PB + PC < PB + PD + DC$ 即 $PB + PC < BD + DC < BA + AD + DC = BA + AC$ 又 $\angle BPC > \angle BDC > \angle BAC$	

(1) (題意) P 爲 $\triangle ABC$ 之底 BC 上之點 (假設)



則 AP 小於 AB, AC 中之較大者

又若 $AB=AC$ 則 AP 皆小於此二邊 (終結)

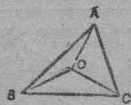


(證明) 從 A 作 BC 之垂線 AD 則 D 在 BC 或其延長線上 P 在 CD 或 BD 上故

$\angle PAD$ 小於 $\angle CAD$ 或 $\angle BAD$ 從而小於此二角中之較大者故 PA 小於與 AD 成大角之邊即大邊又 $AB=AC$

則 $\angle PAD$ 皆小於 $\angle BAD, \angle CAD$ 即 PA 小於 AB, AC

(2) (證明) 於 $\triangle ABC$ 依定理 17



$$OB+OC < AB+AC$$

$$OC+OA < AB+BC$$

$$OA+OB < AC+BC$$

各邊相加得

$$2(OA+OB+OC) < 2(AB+BC+CA)$$

$$\therefore OA+OB+OC < AB+BC+CA$$

又於 $\triangle OBC$ 依定理 15

$$OB+OC > BC$$

同樣從 $\triangle OCA, \triangle OAB$ 得

$$OC+OA > CA$$

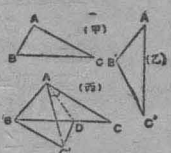
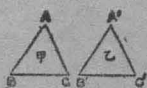
$$OA+OB > AB$$

各邊相加得

$$2(OA+OB+OC) > AB+BC+CA$$

$$\text{即 } OA+OB+OC > \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

三角形之定理及問題(其五) (平面幾何學上 25)

定 理	證 明	問 題
(定理 18) 此三角形之二邊各與他三角形之二邊相等惟夾角異則其大角之對邊大於他之對邊	 (題意) $AB=A'B'$ $AC=A'C'$ $\angle A > \angle A'$ (假設) 則 $BC > B'C'$ (終結) (證明) 移乙重合於甲則 $A'B'$ 與 AB 重合如(丙)作 $\angle CAC'$ 之二等分線 AD 交 BC 於 D 則 $\triangle ADC = \triangle ADC'$ 從而 $DC = DC'$ $\therefore BC = BD + DC > BC' = B'C'$	(1) D 爲 $\triangle ABC$ 之邊 BC 之中點 $\angle ADB$ 爲鈍角則 $AB > AC$ (2) D 爲 $\triangle ABC$ 之邊 BC 之中點而 $AB > AC$ 則 $\angle ADB$ 爲鈍角
(定理 19) 此三角形之二邊各與他三角形之二邊相等惟第三邊異則其大邊之對角大於他之對角	(題意) (前圖) 有 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ $AB=A'B', AC=A'C', BC > B'C'$ (假設) 則 $\angle A > \angle A'$ (終結) (證明) 若 $\angle A < \angle A'$ 則 $BC < B'C'$ 是與假設不合 $\therefore \angle A > \angle A'$	(3) 同一底邊上作二個二等邊三角形連結其頂點作直線則此直線分其各項角爲二等分
(定理 20) 此三角形之三邊各與他三角形之三邊相等則此兩個三角形爲全等	 (題意) 有 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 其 $AB=A'B', BC=B'C', CA=C'A'$ (假設) 則 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (證明) 於 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 其 $\angle A, \angle A'$ 之二邊等若 $\angle A \neq \angle A'$ 則 $BC \neq B'C'$ 與假設不合 $\therefore \angle A = \angle A'$ 從而 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$	