普通高等教育“十一五”国家级规划教材

航空、航天、航海系列

TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION

机械结构有限元分析及应用软件

主编 赵汝嘉 曹岩

西北工業大學出版社

机械结构有限元分析及应用软件

主编　赵汝嘉　曹　岩

编者　赵汝嘉　曹　岩　贺朝霞　李宇燕

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书从工程实际出发，将机械结构分析理论与有限元方法紧密结合，进行机械产品结构设计及静、动、热特性分析，并通过诸多实例，加深对基本概念及方法的理解。其主要内容包括有限元分析的弹性力学基本知识，有限元方法基本概念，机械结构分析有限元方法的实施技术，机械产品静、动、热特性分析的有限元方法，以及CAD/CAM集成系统中机械结构有限元分析过程。在附录中提供了教学示范程序及供读者练习的习题。

本书可作为机械类研究生教材或教学参考书，也可供机械产品设计人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

机械结构有限元分析及应用软件/赵汝嘉，曹岩主编．—西安：西北工业大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-5612-3488-4

Ⅰ.①机… Ⅱ.①赵…②曹… Ⅲ.①机械—结构分析—有限元分析—研究生—教材
Ⅳ.①TH112

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第233468号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西兴平报社印刷厂
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：18
字　　数：438千字
版　　次：2012年10月第1版　　2012年10月第1次印刷
定　　价：40.00元

前　言

本书是机械类专业的研究生教材。初稿完成于1980年，在多年使用过程中，几经修改与增删，现根据西安交通大学研究生院对研究生系列教材的要求重新修订完成。

机械结构有限元分析在机械产品设计及其性能分析中的应用日益广泛，日趋成熟，已成为机械产品计算机辅助设计系统中的重要程序块之一。它为在设计阶段掌握产品性能提供了一个可靠的方法，成为机械产品设计师和性能分析研究工作者必须掌握的工具。本书亦可供他们阅读使用。

《机械结构有限元分析》原为西安交通大学研究生系列教材之一，出版后受到欢迎，为众多院校采用，其书中内容亦为许多著作引用。目前，西安交通大学研究生院仍每年开设该课程，外校亦有联系询问该书。经过这次修订后，本书不仅用于研究生教材，而且亦可作为工程类本科生教材。而机电产品设计中的工程分析，已成为当前工程技术人员必须掌握的工具，这次修订亦充分考虑到这一发展要求，使其成为工程技术人员的再学习、再提高的教材。

在掌握弹性力学基本知识基础上，结合机械产品结构特点介绍有限元分析，在国内此类书籍甚少，且本书对三种国外著名应用软件及其有限元分析过程进行介绍，这样系统的书籍在国内尚未见到。

在编写本书过程中，笔者考虑到机械类研究生一般都学过计算方法，从教学角度对有限元方法的基本理论及求解过程有一定了解；同时考虑到机械产品设计及性能分析工作人员的实际情况，他们对机械产品设计与性能分析有丰富的经验，故不从数学角度阐述有限元方法，而是立足于物理及几何概念的描述，即从实际与直观出发，借助于弹性力学的基本知识，掌握有限元方法的本质。基于以上考虑，本书的体系不同于常规的有限元方法体系，而是以机械结构分析为主线，使有限元方法与机械结构分析融为一体，着重阐述有限元方法在机械产品设计及机械结构性能分析中的应用，并结合机械结构分析理论介绍有限元分析的相关技术。

全书内容分为3大部分：

(1) 有限元分析的力学基础。这部分主要介绍弹性力学的基本知识，以及从弹性力学的变分原理出发来掌握有限元分析的基本概念。这部分内容在第1章中介绍。

(2) 机械结构有限元分析。结合机械产品结构特点，介绍平面有限元分析和空间结构有限元分析以及机械产品结构静、动、热特性分析。这部分内容是在原西安交通大学研究生系列教材《机械结构有限元分析》(赵汝嘉编)的基础上进行修订的。这部分共7章。第2,3章主要介绍一般概念，并通过机械结构平面问题的分析及各种单元分析，掌握有限元方法的基本理论及其共性问题，了解广义的通用计算公式及规格化的计算过程；第4,5章主要介绍有限元方法的实施；第6,7,8章主要介绍机械产品动、静、热特性的有限元分析。

(3) CAD/CAM集成系统中机械结构有限元分析过程。这部分主要介绍HyperWorks，Nastran及ANSYS的特点及其有限元分析过程，在第9章中介绍。

本书所用的数学工具对机械类研究生来讲是非常熟悉的，并认为已掌握了弹性力学的基本知识；对机械产品设计师及性能分析工作者来讲，亦无太多困难。读者在学完第 5 章后，可以结合一个简单的任务，总结机械结构有限元分析的基本过程。附录中的一些习题可供练习使用。

本书内容适用于 40～60 课内学时。对于低学时者，可根据实际情况，结合课题研究方法，选学后 3 章中的某一部分。

本书由赵汝嘉、曹岩主编。具体编写分工：李宇燕编写第 1 章，赵汝嘉、曹岩编写第 2～8 章，贺朝霞编写第 9 章。

在编写本书过程中，参阅了参考文献中的有关资料，在此向这些作者表示衷心的感谢。本书原稿承蒙蒋璐、黄艾香两位教授认真审阅和仔细修改，编者对此表示衷心感谢。陈鸿珍老师、李小丽老师以及多位研究生做了大量文字图表的输入和校勘工作，在此一并表示感谢。

本书涉及范围广泛，限于水平，错误和不足之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

2012 年 3 月

目　　录

第 1 章　有限元分析的弹性力学基本知识

1.1　有限元方法的基本概念

有限元方法是结构分析的一种数值计算方法，它在 20 世纪 50 年代初期随着计算机的发展应运而生，并得到广泛应用。这一方法的理论基础牢靠，物理概念清晰，解题效率高，适用性强，目前已成为机械产品动、静、热特性分析的重要手段，它的程序包是机械产品计算机辅助设计常用方法库中不可缺少的内容之一。

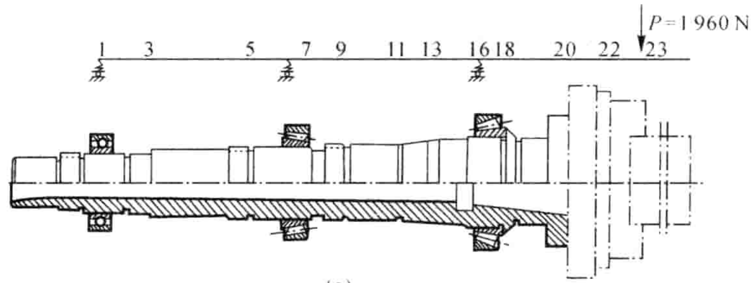
在机械产品设计中，经常有两类问题需要解决：一类是强度问题。例如，在机床结构设计中，对齿轮的弯曲强度、疲劳强度、接触强度的计算。通常物体的强度是靠控制它内部的最大应力来保证的，即 $\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$（$[\sigma]$ 为材料的许用应力）。另一类问题是刚度问题。例如，车床在加工过程中，机床由于切削力作用而产生变形，使得刀具和工件的相对位置发生变化，有可能满足不了加工精度的要求，因而必须控制机床的零、部件在受力后的变形值，使它在允许范围内。当进行机床结构设计时，刚度问题比强度问题更为重要，这也是在以后各章中主要计算变形值的原因。弹性力学原则上可以提供关于应力和位移的计算方法，但实际上，由于机械产品结构的复杂性，特别是机床基础大件的结构复杂性，因此，长期以来主要应用经验类比设计，对机床的动、静、热特性只能作定性分析和经验类比估算。当决定实际结构时，取较大的安全因数，结果使产品“傻大粗”，材料的潜力不能充分发挥，产品性能也难以把握。只有等到样机制成，进行各种性能试验时才能有所了解，对薄弱环节提出改进方案，这样必然导致设计、制造周期长，成本高。

在当前科学技术及生产技术发展日新月异的情况下，市场的需求是瞬息万变的，机械产品以多品种、小批量生产为主，这就要求新产品设计、制造周期短，质量高，成本低，具有较强的竞争能力。传统的设计方法已越来越适应不了发展的需要。因此，近 30 年来，伴随着计算机的应用，正在设计领域中进行着一场深刻的革新。例如，用理论设计代替经验设计，用精确设计代替近似设计，用优化设计代替一般设计，用动态分析代替静态分析，等等。而有限元方法为在设计阶段掌握产品性能提供了强有力的工具，可以认为，有限元计算是利用计算机对机械产品动、静、热特性进行了模拟试验。随着计算机及计算技术的发展，机械产品设计必然进入到一个新的阶段。国外机械产品设计已进入计算机辅助设计及自动设计时代，目前它正以有限元-优化设计为中心不断地向前发展。

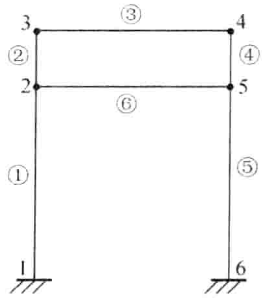
有限元方法是数值计算中的一种离散化方法，用数学术语来说，就是从变分原理出发，通过分区插值，把二次泛函（能量积分）的极值问题化为一组多元性代数方程来求解。人们知道，直接从一个微分方程推导出它的泛函，常常是很复杂的，有时甚至是不可能的，因此，当求泛函时，常借助于所研究问题的物理特性。诸如金属切削机床这类机械产品的刚性问题，属于小变形弹性问题，因而弹性力学中的最小位能原理为研究刚性问题提供了极大的方便。关于

这方面内容请参阅弹性力学的变分法章节。

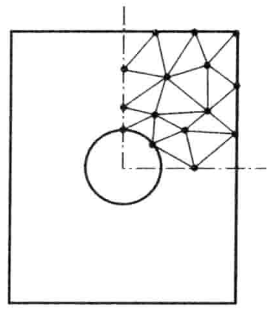
从物理或几何概念来说，有限元方法是结构分析的一种计算方法，是矩阵方法在结构力学和弹性力学等领域中的发展和应用。其基本思想是将弹性连续体划分成有限个小单元体，它们在有限个节点上相互连接，如图1-1所示。在一定精度要求下，对每个单元用有限个参数来描述它的力学特性，而整个连续弹性体的力学特性，可认为是这些小单元体力学特性的总和，从而建立起连续体的力的平衡关系。



(a)



(b)



(c)

图 1-1

图1-1(a)所示是机床主轴部件划分图，根据主轴截面情况，从后支承到主轴前端部划分为22个单元，由23个节点连接。图1-1(b)所示是机床龙门框架简化的模型图，即把实际的立柱、横梁用一根通过它们的几何中心线的梁来处理。框架划分为6个单元体，其中节点2,3,4,5都是相邻单元的连接点。在进行单元及节点编号后，对每个单元体进行力学分析，建立起单元体的平衡方程，然后按“按点叠加”的原则建立起整个弹性体的平衡方程，从而求得变形及应力。

1.2 有限元方法的发展及其在各领域中的应用

有限元这一概念早在20世纪40年代就提出来了，50年代初期曾将这种方法应用于结构设计，即所谓结构分析的矩阵方法，但由于计算过分繁琐，缺乏先进的计算工具，未获广泛使用。直到60年代，随着计算机的飞速发展，有限元方法才如虎添翼，目前已成为现代工程设计中的重要支柱之一。可以说，有限元方法是计算机时代的产物。

在电子计算机广泛应用于工程设计之前，也有许多数值计算方法。例如有限差分法，其应

用范围也较广，它基于直交网格系列计算格式比较简便，但边界的适应性较差。有限元方法由于节点可任意配置，对复杂形状的物体可以使边界节点完全落在区域边界上，因而在边界上给出良好的逼近，对由几种材料组合而成的物体，可以把单元的一边取在分界面上而得到较好的处理，并可根据实际需要，在一部分求解区域中(如应力集中处)配置较密集的节点，而在另一部分求解区域中配置较稀疏的节点，使其在不过分增加节点总数的情况下，提高计算精度，而这些优点，对采用直交网格的有限差分法是难以实现的。又如李兹法，它是古典变分法，这种方法对具有复杂形状的区域，由于光滑的坐标函数(它必须满足某些边界条件)实际上无法选取，因此很难采用。而有限元法则通过离散化处理，用构造分块光滑的(有时是近似的)坐标函数克服了这一困难，可以说使古典变分法经过改造获得了新生。由此可见，有限元方法与以往的数值计算方法比较，既有许多共同之处，亦有其特殊优点，主要表现在以下几点：

(1) 节点可任意配置，边界适应性良好，能用不同形态、不同大小和不同类型的单元划分任意几何形状的结构物。

(2) 能够适应任意支承条件和任意载荷，包括温度载荷。

(3) 能够模拟由不同结构元件组成的复合结构，例如带加强筋板的壳体是板、梁、块体的组合体。

(4) 有限元方法计算过程已形成一定的规格，国内外已有大型通用结构分析程序可供使用，掌握亦较容易。

上述特点，为它的应用与发展开辟了广阔的前景。

这一方法最初应用于宇航工程，之后迅速推广于造船、土木建筑、机电工业等部门。表 1-1 给出了有限元方法在平衡或稳态问题、特征值问题以及动态或瞬态问题等方面的应用实例。

表 1-1　有限元方法在工程中的应用实例

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
1. 结构工程学 结构力学 宇航工程	梁、板、壳结构的分析 复杂或混杂结构的分析 二维与三维应力分析 棱柱体的扭转 接触问题	结构的稳定性 结构的固有频率和振型 线性黏弹性阻尼	应力波的传播 结构对非周期载荷的动态响应 耦合热弹性力学与热黏性力学黏弹性问题
2. 土木工程学 基础工程学 岩石力学	二维和三维应力分析 填筑与开挖问题 边坡稳定性问题 土壤与结构的相互作用 坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的分析 流体在土壤和岩石中的渗流	土壤-结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非定常渗流 在可变形多孔介质中流动-固结应力波在土壤和岩石中的传播 土壤与结构的动态相互作用
3. 热传导	固体和流体中的稳态温度分析		固体和流体中的瞬态热流

续 表

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
4. 流体动力学 水利工程学 水原学	流体的势流 流体的黏性的流动 蓄水层和多孔介质中的定常渗流 水工结构和大坝的分析	湖泊和港湾的波动(固有频率和振型) 刚性和柔性容器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究(扩散问题) 沉积物的推移 流体的非定常流动 波的传播 多孔介质和蓄水层中的非定常渗流
5. 核子工程学	反应堆安全壳结构的分析 反应堆和反应堆安全壳结构中的稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析 反应堆结构的热黏性分析 反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布

有限元方法经过近多年的发展,作为一种结构分析技术来讲,不可能期望再有别的戏剧性的发展或突破,未来的发展主要是在各工程领域中的应用、提高,并完善有限元方法的基本技巧。随着计算机辅助设计(CAD)在工程设计中日益广泛的应用,有限元方法程序包已成为CAD常用计算方法库中不可缺少的内容之一,并与优化设计形成集成系统,即通过计算机建立计算模型→有限元分析→最优结构设计→结果图形显示→判断决策→修改结构形状→有限元分析……如此重复进行,直至满足设计要求为止。上述集成有限元分析系统反映了当今世界上有限元方法的发展及应用水平。但是,准确地掌握这种集成系统的使用方法,并正确无误地确定分析策略和对分析结果作出正确的判断,需要有丰富的工程设计经验;总结这些经验,利用人工智能技术,形成智能性的有限元分析系统,即形成有限元分析专家系统。

1.2.1 有限元法的发展和现状

有限元法是在当今工程分析中获得最广泛应用的数值计算方法。由于它的通用性和有效性,因而受到工程技术界的高度重视。近30多年来,伴随着电子计算机科学和技术的快速发展,有限元法作为工程分析的有效方法,在理论方法的研究、计算机程序的开发以及应用领域的开拓诸方面均取得了根本性的发展。下面对发展比较成熟的方面进行简要的概括。

1. 单元的类型和形式

为了扩大有限元的应用领域,新的单元类型和形式不断涌现。例如,等参元采用和位移插值相同的表示方法,将形状规则的单元变换为边界为曲线(二维)或曲面(三维)的单元,从而可以更精确地对形状复杂的求解域(或结构)进行有限元离散。

2. 有限元法的理论基础和离散格式

在提出新的单元类型,扩展新的应用领域和应用条件的同时,为了给新单元和新应用提供可靠的理论基础,研究工作的进展包括将Hellinger-Reissner原理、Hu-Washizu原理等多场变量的变分原理用于有限元分析,发展了混合型(单元内包括多个场变量)、杂交型(某些场变量

仅在单元交界面定义）的有限元表达格式，并研究了各自的收敛性条件；将与微分方程等效的积分形式——加权余量法，用于建立有限元的表达格式，从而将有限元的应用扩展到不存在泛函或泛函尚未建立的物理问题；有限元解的后验误差估计和应力磨平方法的研究进展，不仅改进了有限元解的精度，更重要的是为发展满足规定精度的要求，以细分单元网格或提高插值函数阶次为手段的自适应分析方法提供了基础。

3. 有限元方程的解法

现在用于大型复杂工程问题的有限元分析，自由度达几十万个甚至上百万个已是经常的情况，这是与计算机软、硬件发展相配合的大型方程组解法的研究进展密不可分的。有限元求解的问题从性质上可以归结为以下三类。

(1) 独立于时间的平衡问题（或稳态问题）。最后归结为求解系数矩阵元素在对角线附近稀疏分布的线性代数方程组。对于常见的结构应力分析问题，求解的是对应给定载荷的结构位移和应力。此类问题至今主要是采用直接解法，先后发展了循序消去法、三角分解法、波前法等。

(2) 特征值问题。它也是稳态问题，但是求解的是齐次方程，解答的是方程存在非零解的特征值和与之对应的特征模态。在实际应用中，它们代表的可能是振动的固有频率和振型，或是结构屈曲的临界载荷和屈曲模态等。针对求解大型矩阵特征值问题，先后发展了幂迭代法、同步迭代法、子空间迭代法等。

(3) 依赖于时间的瞬态问题。由于这类问题的方程是节点自由度对于时间的一阶、二阶导数的常微分方程组，求解的是在随时间变化的载荷作用下的结构内位移和应力的动态响应，或是波动在介质中的传播、反射等。因此，此类问题的求解主要是采用对常微分方程组直接进行数值积分的时间逐步积分法。

上述三类问题，从方程自身性质考虑，还存在对应的非线性情形。非线性可以是由材料性质、变形状态和边界接触条件引起的，分别称为材料、几何、边界非线性。求解非线性有限元问题的算法研究主要有以下几种。

(1) 采用 Newton-Raphson 方法或修正 Newton-Raphson 方法等将非线性方程转化为一系列线性方程进行迭代求解，并结合加速方法提高迭代收敛的速度。

(2) 采用预测-校正法或广义中心法等对材料非线性本构方程进行积分，决定加载过程中材料的应力应变的演化过程。

(3) 采用广义弧长法等时间步长控制方法和临界点搜索、识别方法，对非线性载荷-位移的全路径进行追踪。

(4) 采用拉格朗日乘子法、罚函数法或直接引入法，将接触面条件引入泛函，求解接触和碰撞问题。

4. 有限元法的计算机软件

有限元法是通过计算机实现的，因此，它的软件研发工作一直是和它的理论、单元形式和算法的研究以及计算环境的演变平行发展的。从 20 世纪 50 年代以来，软件的发展按目的和用途可以区分如下：

(1) 专用软件。在有限元发展的早期，专用软件是为一定结构类型的应力分析（例如平面问题、轴对称问题、板壳问题）而编制的程序。而后，专用软件更多的是为研究和发展新的离散方案、单元形式、材料模型、算法方案、结构失效评定和优化等而编制的程序。

(2) 大型通用商业软件。从20世纪70年代开始，基于有限元法在结构线性分析方面已经成熟并被工程界广泛采用，一批由专业软件公司研制的大型通用商业软件(NASTRAN，ASKA，SAP，ANSYS，MARC，ABAQUS，JIFEX等)公开发行和应用。它包含众多的单元形式、材料模型及分析功能，并具有网格自动划分、结果分析和显示等先后处理功能。现在大型通用软件已为工程技术界广泛应用，并成为CAD/CAM系统不可缺少的组成部分。

1.2.2 有限元方法的未来

经过近50年特别是近30年的发展，有限元方法的基础理论和方法已经比较成熟，已成为当今工程技术领域中应用最为广泛、成效最为显著的数值分析方法。但是，面对21世纪全球在经济和科技领域的激烈竞争，基础产业(例如汽车、船舶和飞机等产业)的产品设计和制造需要引入重大的技术创新，高新技术产业(例如宇宙飞船、空间站、微机电系统和纳米器件等产业)更需要发展新的设计理论和制造方法。而这一切都为以有限元方法为代表的计算力学提供了广阔的天地，并提出了一系列新的课题。

(1) 为了真实地模拟新材料和新结构的行为，需要发展新的材料本构模型和单元形式。例如，对于特种合金、复合材料、陶瓷材料、机敏材料、智能材料、生物材料以及纳米材料等，建立能真实地描述它们各自的力学、物理性质和特征行为，并适合数值计算的本构模型和相应的单元形式，以及优化设计材料性能的计算方法。这方面现在是，未来仍将继续是一个重要的研究课题，因为这是计算分析和优化它们自身性能及由它们所组成的结构在不同环境中的响应分析的前提。

(2) 为了分析和模拟各种类型和形式的结构在复杂载荷工况和环境作用下的全寿命工程的响应，需要发展新的数值分析方案。例如常见的下述情况：

1) 高温结构在随时间变化的载荷和环境的作用下，从损伤的孕育、萌生，到其成长、集聚、扩展，直至最后失效和破坏的全寿命过程的数值模拟。其中包括损伤和应力及环境的相互作用，不同性质和形式的损伤彼此之间的相互作用。

2) 汽车在碰撞或重物压挤作用下，其失稳、过屈曲直至压溃或破裂的全过程的数值模拟。从失稳到破坏可能在很短的时间内发生，其中还涉及变形过程和材料性能以及载荷的相互作用。

(3) 有限元软件和CAD/CAM/CAE等软件系统共同集成完整的虚拟产品发展(VPD)系统，是从1990年开始的技术方向。VPD系统是计算力学、计算数学以及相关的计算物理、计算工程科学和现代计算机科学技术、信息技术(IT)、知识工程(KBE)相结合而形成的集成化、网络化和智能化的信息处理系统，并通过网络将科学家、设计工程师、制造商、供应商及有关咨询顾问连接起来协同工作。它强烈地影响着未来工程系统的设计、制造和运行，主要表现在：

1) 它能提供对所设计的工程系统从加工制造到运行，直至失效和破坏的全寿命过程的更深入认识，从而能更好地识别它的属性和特征。

2) 它能够鉴定和评估所设计对象的性能和质量，并允许以最低的费用在设计过程中就对所设计的对象进行修改和优化。

3) 它能显著地缩短工程对象设计和投产的周期，降低生产成本，提高市场竞争力。

现代工业的进步，完全得力于计算机科技的突飞猛进，因此，由20世纪进入21世纪，引导人类科技再次的进步将是与计算机结合的科技。而计算机软件的应用与发展也得力于计算机

科技的进步，将计算机、计算机软件用于产品的开发、设计、分析与制造，已成为近代工业提升竞争力的主要方法。计算机辅助设计(CAD)是使用计算机软件直接从事图形的绘制与结构的设计。计算机辅助工程(CAE)是用工程上分析的过程及计算方法来辅助工程师做设计后的分析或进行同步工程。而计算机辅助制造(CAM)则是直接用计算机来辅助操纵各式各样的精密工具，以制造不同的零件。

传统的工业以经验作出初步的设计，再由此初步的设计去做出原始模型，再做出成品；成品完成以后，便进行实验以确保产品的可靠性。此种方法基本上称为试误法，即初级成品经测试不能满足工程或品质上的需求时，再回去修改原设计图，再做试品，然后再做测试。此种方法费时且成本相当高。若使用CAE，则在设计图完成后即连接CAE，作各式各样的分析，并且导入最优化成品，即可在短时间内完成产品。

CAE的技术种类很多，这其中包括有限元法、边界元法、有限差分法等。每一种方法各有其应用的领域，而其中有限元法应用的领域越来越广，现已应用于结构力学(包括线性与非线性)、结构动力学、热力学、流体力学、电路学、电磁学等。由于有限元分析涉及十分复杂的数值计算，因此由手工进行是不可能的。任何形式的有限元分析都必须借助于计算机软件，这类软件称为有限元分析系统。目前在工业和软件业界，由于有限元法已成为工程计算和分析的主要手段，因此有限元分析系统也成了CAE系统的代名词。

有限元法与矩阵理论和数值方法的发展密切相关，其应用的深入和普及依赖于计算机技术的发展。20世纪90年代中期以后，计算机性能显著提高，一些著名的有限元分析系统也都相继推出了Windows计算机版，如I-DEAS，ANSYS，NASTRAN等。目前，计算机平台上的有限元分析已成为应用主流。

有限元方法在今后若干年内发展的主要趋势是：

(1) 在完善各种特殊领域内的线性有限元方法软件的同时，大力研制高效率的非线性有限元方法软件。

(2) 逐步完善大型有限元方法软件的自适应性，以提高其运行效率，并尽量减少设计人员对软件系统的干涉。

(3) 配备功能较强的前、后置处理程序块。没有前、后置处理及不包含CAD技术的大型有限元软件，将会逐步失去竞争力。

(4) 结构分析的有限元-优化一体化程序的发展，其中心是减少在结构优化计算过程中重做有限元分析的次数，缩短计算时间，提高计算效率，减少计算费用。

另外，从长远来看，将会有更多的有限元方法软件引进人工智能技术，形成比较完善的专家系统，实现有限元分析智能化。

1.3 有限元分析的弹性力学基本知识

弹性力学是材料力学课程的延续。它是固体力学的一个分支学科，是研究可变形固体在温度变化和边界约束等作用下的弹性变形与应力状态的科学。在这门课程中，仅限于讨论理想弹性体，即应力与应变之间的关系为线性函数，也就是满足大家所熟知的胡克定律。当外力未超过某一限度时，大多数固体材料都具有这种属性。

实际上，在"材料力学"课程中已经用胡克定律讨论了简单的构件。在该课程中采用了一

系列几何和物理的简化假定，得到了能满足一般工程应用的应力和位移的计算公式。弹性力学可不使用某些未加证明的假定，便可以得到比材料力学更加精确的解答。一般说来，所讨论的物体的形状可以是任意的。

应当指出，这并不是说，弹性力学不再需要引进某些假设，相反，若不对具体工程对象进行抽象化，弹性力学仍然是寸步难行的。实际上，在弹性力学中仍必须引进某些假设并采取简化模型的形式进行研究。当然，这种模型应当能反映在一定条件下该研究对象的基本形态的主要力学特征。在弹性力学课程中，一般做以下基本假定：① 连续性假定；② 均匀性假定；③ 各向同性假定；④ 小变形假定。在以上四个假定的基础上，建立弹性力学的基本理论。超出以上范围的问题将有专门学科进行研究，例如，非线性弹性力学、塑性力学、各向异性体弹性力学等。

近代弹性力学可认为始于柯西在 1828 年引进的应变与应力的概念，建立了平衡微分方程、边界条件、应变与位移的关系。它的发展促进了数学和自然科学基本理论的建立和发展，特别是对促进造船、航空、建筑、水利、机械制造等工业技术的发展起了相当重要的作用。柯西的工作是近代弹性力学以及近代连续介质力学的一个起点。之后，世界各国的一大批学者相继做了大量的工作，使得弹性力学迅速发展起来，并根据实际的需要形成了一些专门分支学科，如热弹性力学、弹性动力学、弹性系统的稳定理论、断裂力学、损伤力学等。

弹性力学虽是一门古老的学科，但现代科学技术的发展给弹性力学提出了越来越多的理论问题和工程应用问题，弹性力学在不少重要领域展现出它的重要性。

本节主要介绍弹性力学的基本知识，以及从弹性力学的变分原理出发的有限元分析的基本概念。

1.3.1 平衡方程

为简单起见，当建立平衡方程时，首先考虑平面问题，在掌握了平面问题以后，再讨论空间问题就比较容易了。

物体处于平衡状态时，从各点应力及体力的相互关系来导出平衡方程。

假定从处于平面应力状态的物体中取出一个微小矩形单元 abcd，如图 1-2 所示。其两边的长度分别为 dx，dy，厚度就是原物体的厚度 δ。这里 $dx\delta$，$dy\delta$ 为微小面元，可以把 $dx\delta$，$dy\delta$ 上的应力看成是均匀分布的，故面元上任意点的应力分量值，可以用该面元中点的应力分量表示，如图 1-3 所示。在此微小单元体上，不同的边上，应力分量的值也不相同。例如，ab 边上的正应力分量为 σ_x；而 cd 边上，由于距 y 轴的距离增加了 dx，因此，其正应力分量应随之变化。应力分量的这种变化可用泰勒级数展开来求，即有

$$\sigma_x\big|_{cd}=\sigma_x\big|_{ab}+\left.\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right|_{ab}dx+\left.\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right|_{ab}dy+o(dx^2,dy^2) \tag{1-1}$$

注意到 ab 线元与 cd 线元上的应力分量，皆可用相应线元中点处的应力分量来表示，故可写出

$$\sigma_x\big|_{cd}=\sigma_x\big|_{x+dx},\quad \sigma_x\big|_{ab}=\sigma_x\big|_{x}$$

略去二阶以上微量，有

$$\sigma_x\big|_{x+dx}=\sigma_x\big|_{x}+\left.\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right|_{x}dx \tag{1-2}$$

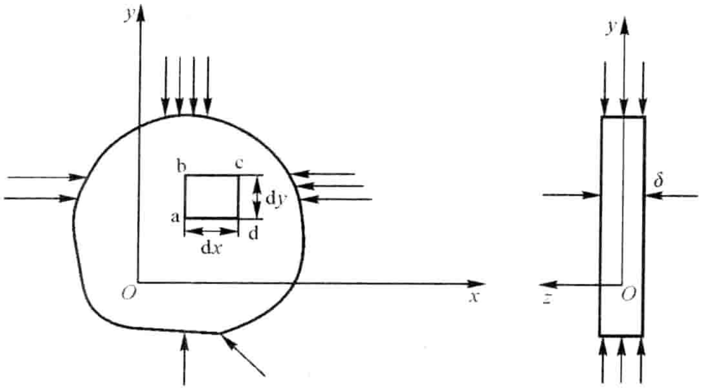


图　1-2

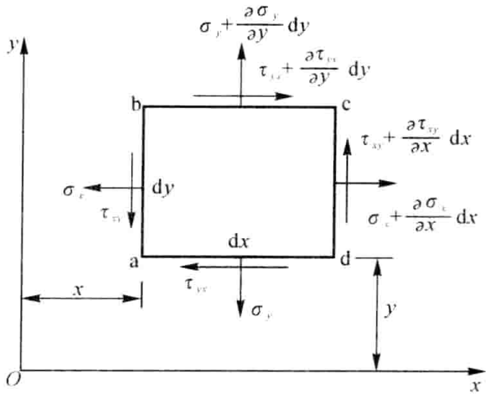


图　1-3

亦即，如 ab 边上的正应力为 σ_x，则 cd 边上的正应力为 $\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$。

同理，如ab边上的切应力分量为 τ_{xy}，ad边上的两个应力分量为 σ_y 及 τ_{yx}，则得 cd 边上的切应力分量及 bc 边上的两个应力分量分别为 $\tau_{xy}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$，$\sigma_y+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$，$\tau_{yx}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$。

在静力平衡条件下，各应力分量必然满足平衡条件的要求。对于厚度 $\delta=1$ 的微小矩形单元 abcd，由平衡条件 $\sum M_a=0$，得

$$\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dydx\right)\frac{dx}{2}-\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy\right)\frac{dy}{2}+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dydx-$$

$$\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdy+F_{by}dxdy\frac{dx}{2}-F_{bx}dxdy\frac{dy}{2}=0 \tag{1-3}$$

略去 dx，dy 的三次方项，得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{1-4}$$

这就是切应力互等定理。

由平衡条件 $\sum X=0$，得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\sigma_x\mathrm{d}y+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\tau_{yx}\mathrm{d}x+F_{bx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{1-5}$$

化简后为

$$\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+F_{bx}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{1-6}$$

其中，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不等于零，故有

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+F_{bx}=0 \tag{1-7}$$

同理由 $\sum Y=0$，得

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+F_{by}=0 \tag{1-8}$$

式(1-8)是平面问题的平衡方程。

对于三维应力状态的情况，可从受力物体中取出一微小六面体单元，可类似地导出

$$\tau_{xz}=\tau_{zx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}$$

及

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_{bx}=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_{by}=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_{bz}=0\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

式(1-9)为三维情况下的平衡方程。

平衡方程可缩写为

$$\sigma_{ij,j}+F_{bi}=0 \tag{1-10}$$

其中

$$\sigma_{ij,j}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\frac{\partial\sigma_{ix}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{iy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{iz}}{\partial z},\quad i=x,y,z \tag{1-11}$$

因此，$\sigma_{ij,j}=0$ 就代表

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

1.3.2 几何方程

设有一弹性体，在外力作用下发生了变形。位移分量 u,v,w 应为坐标的函数，即

$$u=u(x,y,z),\quad v=v(x,y,z),\quad w=w(x,y,z)$$

为了确定物体各点的位移，首先研究物体中任一微小线段的变形状态，以此逐步阐述应变的概念。

设在 xOy 平面内未变形前物体中相邻的两点 $P_0(x_0,y_0)$ 和 $P(x,y)$ 间的线段为 P_0P，变