十二五 高等院校研究生规划教材

数学物理方程

赵忠奎　崔学慧　郝华宁 ◎ 主编

孔令彬 ◎ 主审

石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等院校研究生规划教材

数学物理方程

赵忠奎　崔学慧　郝华宁　主编
孔令彬　主审

石油工业出版社

内 容 提 要

全书共分九章，第一章介绍数学物理方程定解问题的建立和基本概念；第二、四、五、六、八、九章介绍定解问题常用的经典解法，内容包括分离变量法、行波法、格林函数法、积分变换法、变分方法、差分法；第三章讨论二阶线性偏微分方程的分类和化简；第七章简要介绍了几个重要的非线性偏微分方程. 附录Ⅰ、附录Ⅱ介绍了贝塞尔函数和勒让德多项式的概念和性质. 附录Ⅲ附有傅里叶与拉普拉斯变换表.

本书可作为高等学校工科研究生的教材，也可作为非数学专业本科生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/赵忠奎，崔学慧，郝华宁主编.
北京：石油工业出版社，2013.7
（高等院校研究生规划教材）
ISBN 978－7－5021－9655－4

Ⅰ. 数…
Ⅱ. ①赵…②崔…③郝…
Ⅲ. 数学物理方程－研究生－教材
Ⅳ. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 144606 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011）
网　址：http://pip.cnpc.com.cn
编辑部：(010)64523579　发行部：(010)64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：11
字数：280 千字

定价：22.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　言

“数学物理方程”在物理、力学和工程技术等众多科学领域中有着广泛的应用，其研究范围广、内容丰富，对于研究生来讲，是一门重要的工程数学课程.

整体来讲，学生在学习这门课程时可能感到有些困难，主要原因是该课程涉及的知识较多，仅就数学而言，就涉及微积分、常微分方程、傅里叶分析、复变函数等. 这些内容虽然他们在大学本科时大多已学习过，但真正运用的时候仍然会感到很困难，因此，编写本书时，我们在保证内容完整性和系统性的前提下，更注重内容的适应性和实用性，遵循“论述深入浅出、循序渐进，便于教师教学和学生学习”的原则. 另外，在每章后都编配一定数量的习题，使学生学练结合、牢固掌握并能灵活运用所学内容.

本书主要介绍“数学物理方程”的一些基本概念、三种典型二阶线性偏微分方程的建立及各种定解问题的一些解法(包括分离变量法、行波法、积分变换法及格林函数法). 在这些解法中，分离变量法是重点，书中较详细地讨论了三种典型方程在直角坐标系、极坐标系、柱坐标系与球坐标系中进行分离变量的一般步骤及各种边界条件的处理. 在格林函数法中，引入了 δ 函数的概念及应用，从两个不同的背景出发，给出了格林函数的概念；在积分变换法中，除介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换外，还介绍了汉克尔变换及关于积分变换的一般讨论等内容.

本教材力求条理清楚、论证严谨，具有科学性、系统性和实用性. 对于研究生而言，通过学习，可进一步拓宽他们的知识面，拓展他们的思维空间，对研究生的后续发展大有益处.

本书编写分工如下：第一章、第二章、第三章和第四章由东北石油大学赵忠奎编写，第五章、第六章、第七章和第八章由中国石油大学(北京)崔学慧编写，第九章由西安石油大学郝华宁编写，附录Ⅰ、附录Ⅱ由赵忠奎编写，附录Ⅲ由崔学慧编写. 赵忠奎负责全书的统稿工作，东北石油大学孔令彬教授任主审.

本书在编写过程中，孔令彬教授和参编院校的老师都提供了很多意见和建议，相关的各兄弟院校研究生院、数学院和理学院的领导也给予了全力的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

由于水平有限，书中难免有疏漏之处，诚望各位专家和广大读者批评指正.

编　者

2013 年 4 月

目　　录

第一章　典型方程和定解条件

要建立描述一些物理问题的数学模型,首先应知道所研究的物理量在其相应的物理过程(或物理现象)中受到何种物理定律的制约;然后将这一物理定律相应的数学恒等式表示出来;最后将等式加以化简、整理便可得到一方程,即所需的数学模型. 正是由于这种方程是从物理问题中归结出来的,所以称为数学物理方程 .

第一节　典 型 方 程

下面将通过建立具体物理问题的数学模型推导出一些简单方程,这些方程是后续学习中的主要研究对象 .

一、弦的振动方程

假设有一根均匀柔软而有弹性的轻细弦,两端约束在 $x=0$ 和 $x=l$ 两点,平衡时沿直线拉紧,而且除受不随时间而变的张力及弦本身的重力作用外,不受外力影响 . 由于外界因素作用,弦在平衡位置附近作微小横向振动 . 求弦上各点的运动规律 .

所谓"柔软",是指发生在弦中任一点处张力的方向总是沿着弦在该点处的切线方向;"有弹性"意味着张力的大小可按照虎克(Hooke)定律计算;"横向"是指全部运动出现在同一平面上,而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图 1—1). 所谓"微小",是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾斜角都很小,以至它们的高于一次方的项都可以忽略不计 .

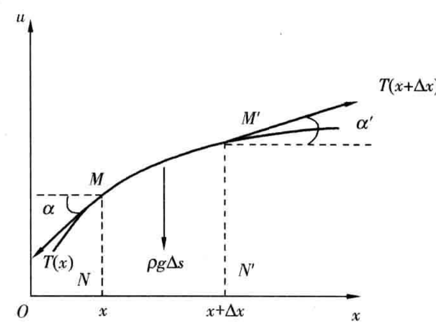

图 1—1

设弦上具有横坐标为 x 的点,在时刻 t 时的位置为 M,位移 NM 记为 u. 在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的二元函数 $u(x,t)$,现在建立位移 u 满足的方程 . 把弦上点的运动先看作小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于零的极限情况,在弦上任取一弧段 $\overset{\frown}{MM'}$,其长为 Δs,设 ρ 是弦的线密度,弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 两端所受的张力记作 $T(x)$、$T(x+\Delta x)$. 由于假定弦是柔软的,所以在任一点处张力的方向总是沿着该点的切线方向 . 现在考虑弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况. 用牛顿运动定律,作用于弧段上任一方向上力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度 .

在 x 轴方向弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 受力的总和为 $-T(x)\cos\alpha+T(x+\Delta x)\cos\alpha'$,由于弦只作横向振动,所以

$$-T(x)\cos\alpha+T(x+\Delta x)\cos\alpha'=0. \qquad (1-1)$$

按照上述弦振动微小的假设,可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处的切线的倾斜角都

很小，即 $\alpha\approx 0$、$\alpha'\approx 0$，从而有

$$\cos\alpha \approx 1, \cos\alpha' \approx 1,$$

代入式(1－1)，便可近似得到

$$T(x) = T(x+\Delta x),$$

从上式可看出，张力 T 可视为常量.

在 u 方向弧段$\overset{\frown}{MM'}$受力的总和为

$$-T(x)\sin\alpha + T(x+\Delta x)\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s,$$

式中，$-\rho g\mathrm{d}s$ 是弧段$\overset{\frown}{MM'}$的重力.

又因为当 $\alpha\approx 0$、$\alpha'\approx 0$ 时，有

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x},$$

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\,\mathrm{d}x \approx \Delta x,$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$，小弧段的质量为 $\rho\Delta s$，由牛顿(Newton)第二运动定律有

$$-T\sin\alpha + T\sin\alpha' - \rho g\,\Delta s = \rho\Delta s\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

从而有

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g\,\Delta x = \rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

上式两端同时除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，得

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho g = \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

或
$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来，张力较大时弦振动速度变化很快，即$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$要比 g 大得多，所以又可以把 g 略去，从而在 $u(x,t)$关于 x,t 都是二次连续可微的前提下，最后得出 $u(x,t)$应近似满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1－2}$$

其中
$$a^2 = \frac{T}{\rho}.$$

式(1－2)称为**一维波动方程**.

如果在振动过程中,弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力,且假定在时刻 t,弦上 x 点处力密度为 $F(x,t)$,利用上面的推导方法得到弦的强迫振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),$$

其中
$$f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t).$$

上式表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力密度.

类似地,由薄膜的微小横振动可推导出**二维波动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$$

由声波在介质中传播可推导介质的压强所满足的**三维波动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t).$$

二、传输线方程

对于直流电或低频的交流电,同一支路中的电流是相等的.但对高频率的交流电(指频率还没有高到能显著地辐射出电磁波的情况),由于要考虑导线的自感和电容的效应,因此同一支路中的电流未必相等.

现考虑双线或同轴的高频传输线.为了分析直观起见,把它当做具有分布参数的导体(图 1－2),来研究这种导体内电流流动规律.在具有分布参数的导体中,电流通过的情况可用电流强度 i 和电压 v 来描述,电流强度 i 和电压 v 都是导线截面位置 x 和时间 t 的函数:$i=i(x,t)$,$v=v(x,t)$.

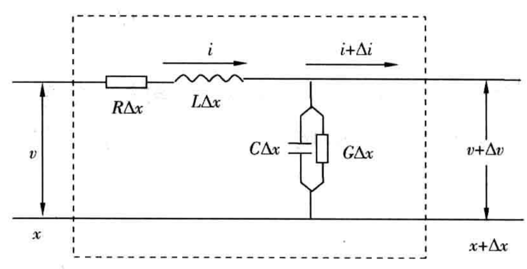

图 1－2

根据基尔霍夫第二定律,在长度为 Δx 的传输线中,电压降应等于电动势之和,即

$$v-(v+\Delta v)=R\Delta x i+L\Delta x\frac{\partial i}{\partial t}.$$

式中 R——每一回路单位的串联电阻;

L——每一回路单位的串联电感.

上式两端同时除以 Δx,并令 $\Delta x\to 0$,得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1－3}$$

另外，由基尔霍夫第一定律，流入节点 x 的电流应等于流出该节点的电流，即

$$i=(i+\Delta i)+C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}+G\Delta xv,$$

式中 C——每单位长度的分路电容；

G——每单位长度的分路电漏．

上式两端同时除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，得

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-C\frac{\partial v}{\partial t}-Gv,\tag{1－4}$$

将方程(1－3)与方程(1－4)联立，即得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial i}{\partial x}+C\dfrac{\partial v}{\partial t}+Gv=0,\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}+L\dfrac{\partial i}{\partial t}+Ri=0.\end{cases}$$

由方程组得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+G\frac{\partial v}{\partial x}-LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-RC\frac{\partial i}{\partial t}=0,$$

再将式(1－3)中的$\dfrac{\partial v}{\partial x}$代入上式，得到 i 所满足的方程

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+GRi,\tag{1－5}$$

用类似的方法可得到 v 所满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial v}{\partial t}+GRv,\tag{1－6}$$

方程(1－5)和方程(1－6)称为**传输线方程.**

若在高频传输的情况下，电导与电阻所产生的效应忽略不计，即令 $G=R=0$，这时方程(1－5)与方程(1－6)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

若令 $a^2=\dfrac{1}{LC}$，则这两个方程与式(1－2)形式完全相同．由此可见，同一个方程可以用来描述不同的物理现象．

三、热传导方程

一块热的物体，若各点的温度不相同，则其热量就会从温度较高的地方向温度较低的地方传递，这种现象称为热传导．由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置而变化，

所以解决传热问题都要归结为求物体内温度的分布．下面来考察一个均匀的、各向同性的物体 Ω 内部的温度变化规律．设在时刻 t，物体 Ω 内任一点 $M(x,y,z)$ 处的温度为 $u(x,y,z,t)$．现在要建立 $u(x,y,z,t)$ 所满足的微分方程．

在 Ω 内任取一小块区域 V，使 $\overline{V}\subset\Omega$，并且其边界 S 是光滑的闭曲面，S 上面积元素 $\mathrm{d}S$ 的单位外法向量记为 $\boldsymbol{n}$（图 1—3）．

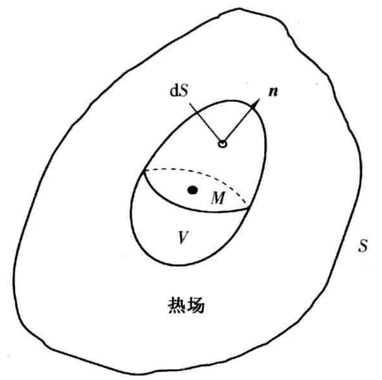

图 1—3

根据传热学中的傅里叶（Fourier）定律，在无穷小时间段 $\mathrm{d}t$ 内，从 V 内经过 $\mathrm{d}S$ 流出的热量 $\mathrm{d}Q$ 与时间 $\mathrm{d}t$、流经面积 $\mathrm{d}S$ 以及温度沿 $\mathrm{d}S$ 外法向量的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比，即

$$\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=-k\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

式中 $k>0$ 是物体的热传导系数，$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$，上式中的负号是由于热量的流向和温度的正向（即 ∇u 的方向）相反而产生的（因为热量总是由温度高处流向温度低处）．因此，从时刻 t_1 到时刻 t_2 经过 S 流出 V 内的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\oiint_S k\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

若物体 Ω 内有热源，且热源强度为 $F(x,y,z,t)$［即在时刻 t 点 (x,y,z) 处的单位体积在单位时间内发出的热量］，则在 V 中热源所产生的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V F(x,y,z,t)\mathrm{d}V.$$

另一方面，在时间段 $[t_1,t_2]$、区域 V 内从温度 $u(x,y,z,t_1)$ 升高到 $u(x,y,z,t_2)$ 所需吸收的热量为

$$Q_3=\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V,$$

式中　c——物体的比热容；

　　　ρ——物体的密度．

根据热量守恒，有

$$Q_1+Q_2=Q_3.$$

若 $u(x,y,z,t)$ 关于 x,y,z 具有二阶连续的偏导数，则由高斯（Gauss）公式得

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\oiint_S k\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V k\Delta u\,\mathrm{d}V,$$

其中

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

若 $u(x,y,z,t)$ 关于 t 具有一阶连续的偏导数，则由牛顿—莱布尼兹公式，有

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

因此有
$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V(k\Delta u+F)\mathrm{d}V.$$

由于时间段 $[t_1,t_2]$ 及区域 V 是任意取定的，并且被积函数是连续的，则

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f,$$

即
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t),\tag{1-7}$$

其中
$$a^2=\frac{k}{c\rho},f=\frac{F}{c\rho}.$$

方程(1—7)称为三维热传导方程，并且当 $f\geqslant0$ 时，表示物体 Ω 内有热源；当 $f\leqslant0$ 时，表示物体 Ω 内有冷源.

如果考虑的是一根侧面绝热的细杆或上下两面绝热的薄板，则方程(1—7)就变为一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$$

若在外界不变的情况下，经过相当长的时间后，物体 Ω 内各点的温度随时间的改变所发生的变化相当小，以致可以看成与时间 t 无关，则称物体处于稳恒状态．此时 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，于是方程(1—7)就变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=g(x,y,z),\tag{1-8}$$

其中
$$g=-\frac{F}{k}.$$

通常称方程(1—8)为三维泊松(Poisson)方程．特别地，若 Ω 内无热源，即 $F=0$ 时，方程(1—8)为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\tag{1-9}$$

称方程(1—9)为三维拉普拉斯(Laplace)方程.

类似地，可得二维泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y)$$

及二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

泊松方程和拉普拉斯方程统称为**位势方程**．静电场的电势、弹性理论中的调和位势、稳定的浓度分布等也都满足泊松方程或拉普拉斯方程．

第二节　定解条件

要建立具体物理问题的数学模型，导出的相应微分方程称为泛定方程，它只是其主体部分，还不是完整的模型．因为泛定方程只是一些同类型物理过程共同规律的数学表示，而体现每个具体问题个性方面的特定“环境”和“起始状态”等也须用数学表示，成为数学模型的组成部分，它们构成微分方程的附加条件叫做**定解条件**．

因此，建立一个具体物理问题的数学模型，不仅要导出泛定方程，还要推导其相应的定解条件．泛定方程和定解条件作为一个整体，叫做**定解问题**．

一、定解条件的类型

1. *初始条件*

对于不稳恒现象的问题是必须考虑研究对象在某个初始时刻的状况．定解问题对初始条件的要求如同常微分方程初值问题的要求那样．

对于弦振动问题，初始条件就是指弦在开始时刻的位移及速度，若以 $\varphi(x)$、$\psi(x)$分别表示初始位移和初始速度，则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \end{cases} \tag{1-10}$$

而对热传导方程来说，初始条件就是指在开始时刻物体温度的分布情况，若以 $\varphi(M)$表示 $t=0$ 时刻物体内任一点 M 处的温度，则热传导方程的初始条件就是

$$u(M,t)\big|_{t=0}=\varphi(M). \tag{1-11}$$

位势方程是描述稳恒现象的，与初始状态无关，所以不提供初始条件．

2. *边界条件*

对于弦振动问题，从物理学得知，弦在振动时，其端点（以 $x=a$ 表示这个端点）所受的约束情况通常有以下三种类型：

一是固定端：弦在振动过程中这个端点始终保持不动．对应于这种状态的边界条件为

$$u\big|_{x=a}=0 \tag{1-12}$$

或

$$u(a,t)=0.$$

二是自由端：弦在这个端点不受位移方向的外力，从而在这个端点弦在位移方向的张力应该为零．由本章第一节中弦振动方程的推导过程可知，此时所对应的边界条件为

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}=0,$$

即
$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}=0 \tag{1-13}$$

或
$$u_x(a,t)=0.$$

三是弹性支承端：弦在这个端点被某个弹性体所支承．设弹性支承原来的位置为 $u=0$，则$u|_{x=a}$就表示弹性支承的应变，由虎克定律可知，这时弦在 $x=a$ 处沿位移方向的张力 $T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}$应等于$-ku|_{x=a}$，即

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}=-ku|_{x=a}$$

或
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\bigg|_{x=a}=0. \tag{1-14}$$

其中
$$\sigma=k/T,$$

式中，k 为弹性体的倔强系数．

对于热传导问题来说，也有类似的情况．以 S 表示某物体 V 的边界，如果在导热过程中边界 S 的温度为已知的函数 $f(x,y,z,t)$，则此时的边界条件为

$$u|_{x=S}=f. \tag{1-15}$$

如果在导热过程中，物体 V 与周围的介质处于绝热状态，或者说，在 S 上的热量流速始终为零，则由热传导方程的推导过程可知，在边界 S 上一定满足

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S}=0. \tag{1-16}$$

若热量在 S 上各点流速为 $G(x,y,z,t)$，由热传导方程的推导过程可知，在边界 S 上必满足

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S}=g(x,y,z,t).$$

其中
$$g=-G/k.$$

如果物体的内部和周围的介质通过边界 S 有热量交换，以 u_1 表示和物体接触处的介质温度，这时利用另一个热传导实验定律，即从一介质流入另一介质的热量和两介质间的温度差成正比，可知

$$\mathrm{d}Q=k_1(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

式中，k_1 是两介质间的热交换系数．

在物体内部任取一个无限接近于边界 S 的闭曲面Γ，由于在 S 内侧热量不能积累，所以在 Γ 上的热量流速应等于边界 S 上的热量流速，而在 Γ 上的热量流速为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t}\bigg|_{\Gamma}=-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma},$$

所以当物体和外界有热交换时，相应的边界条件为

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = k_1(u-u_1)|_S,$$

即
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\bigg|_S = \sigma u_1|_S. \tag{1-17}$$

其中
$$\sigma = k_1/k.$$

综上所述，不论弦振动问题，还是热传导问题，它们所对应的边界条件从数学角度看不外乎有三种类型：

一是在边界 S 上直接给出求未知函数 u 的数值，即

$$u|_S = f_1, \tag{1-18}$$

这种形式的边界条件称为**第一类边界条件**．

二是在边界 S 上给出求未知函数 u 沿 S 外法向量的方向导数，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = f_2, \tag{1-19}$$

这种形式的边界条件称为**第二类边界条件**．

三是在边界 S 上给出求未知函数 u 及其沿 S 外法向量的方向导数某种线性组合的值，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\bigg|_S = f_3, \tag{1-20}$$

这种形式的边界条件称为**第三类边界条件**．

式(1－18)至式(1－20)右端的 $f_i(i=1,2,3)$ 都是定义在边界 S 上的已知函数．当自由项 $f_i(i=1,2,3)$ 恒为零时，这种边界条件称为**齐次的**，否则称为**非齐次的**．

二、定解问题的提法

对于定解问题，根据定解条件的给法，有下面三种提法．

1. *初值问题［柯西(Cauchy)问题］*

只有初始条件，没有边界条件的定解问题称为**初值问题**．这种问题讲的是边界影响可以忽略不计的不稳定现象．例如，对所考察的物理量(方程的未知函数)只需了解它在短时间内，在远离边界的局部范围内，边界影响未及或影响甚微的情形，作为科学的抽象，就认为所考察区域为无界域，称为没有边界条件只有初始条件的定解问题，例如

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,y,z,t) \quad (t>0, -\infty<x,y,z<+\infty),\\[2ex] u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)\end{cases}$$

及
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(x,y,z,t) \quad (t>0, -\infty<x,y,z<+\infty),\\[2ex] u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z).\end{cases}$$

2. 边值问题

只有边界条件，没有初始条件的定解问题称为**边值问题**，例如

$$\begin{cases}\Delta u = f(x,y,z) \quad [(x,y,z) \in \Omega], \\ \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = \varphi(P).\end{cases}$$

式中，$P \in S$，S 是区域 Ω 的边界，系数 α、β 至多一个为零，描述稳定场问题的拉普拉斯方程或泊松方程与时间无关，因此不存在初始条件，根据所给边界条件的类型，可分为三类边值问题：

(1)第一类边值问题[狄里克雷(Dirichiet)问题]，即给出第一边界条件的边值问题．

(2)第二类边值问题[牛曼(Neumann)问题]，即给出第二边界条件的边值问题．

(3)第三类边值问题[洛平(Robbin)问题]，即给出第三边界条件的边值问题．

3. 混合问题

既有初始条件，又有边界条件的定解问题，称为**混合问题**，例如，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M,t) & [t > 0, M(x,y,z) \in \Omega], \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = g(P,t) & (P \in S, t > 0), \\ u|_{t=0} = \varphi(M) & (M \in \Omega)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(M,t) & [t > 0, M(x,y,z) \in \Omega], \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = g(P,t) & (P \in S, t > 0), \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(M) & (M \in \Omega)\end{cases}$$

满足方程及定解条件的解，称为**定解问题的解**．

三、定解问题的适定性

一个定解问题是否符合实际情况，当然需由实践来鉴定，然而从数学角度考虑，可以从三个方面检验其合理性．

一要判断所归结出来的定解问题是否有解，即解的存在性．

二要判断是否只有一个解，即解的唯一性．

三要判断解的稳定性，即定解条件中的数据通常是由实验测量得到的，从而总有一定的误差，如果定解条件的微小误差引起解的变动很大，那么这种解显然不能符合客观实际的要求．从这种意义上来讲，必须要求定解条件的微小变化所引起的解的变动也只能是微小的．此时，称该解是**稳定的**．

如果一个定解问题存在唯一且稳定的解，则此问题称为**适定的**．在以后讨论中，我们把着眼点放在讨论定解问题的解法上，而很少讨论它的适定性，这是因为讨论定解问题的适定性往往十分困难，而本书所讨论的定解问题都是经典的，它们的适定性都是经过证明了的．

四、叠加原理

许多物理现象具有叠加性，即几种不同因素同时作用所产生的效果等于各个因素单独作用时所产生效果的叠加．例如，几个力作用在一个物体上所做的功等于各个力单独作用在同一物体上所做功的代数和．物理现象满足叠加性的事实反映到数学上就是叠加原理．下面以二阶线性偏微分方程为例来说明叠加原理．

含 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x).$$

其中，$a_{ij}(x)$、$b_i(x)$、$c(x)$、$f(x)$为已知函数，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

叠加原理　若 u_i 是方程 $Lu_i = f_i(i=1,2,\cdots)$的解，而且级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \text{ 和 } \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

收敛，并且 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 能够逐项微分两次，其中 $c_i(i=1,2,\cdots)$为任意常数，则 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 一定是方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

的解．

特别地，若 $u_i(i=1,2,\cdots)$满足齐次方程 $Lu=0$ 时，则 $u=\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 也满足此方程．

对于含线性定解条件及线性方程的定解问题，同样也有相应的叠加原理．需要指出的是，对于含非线性方程和非线性定解条件的问题，叠加原理不再成立．正是这一原因，所以非线性问题的求解要比线性问题困难得多．

习　题　一

1. 指出下列方程的类型(阶数、线性或非线性、齐次或非齐次)

(1)$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+u$；　　(2)$\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{5t}$；

(3)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin y$；　　(4)$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-u\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=e^{2t}$；

(5)$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}+\sin u=e^{y}$；　　(6)$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$.

2. 设 $f(z)$是可微的任意函数，证明 $u=f(xy)$满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

3. 若 $F(x)$、$G(x)$是任意两个二次连续可微函数，证明

$$u=F(x+at)+G(x+at)$$