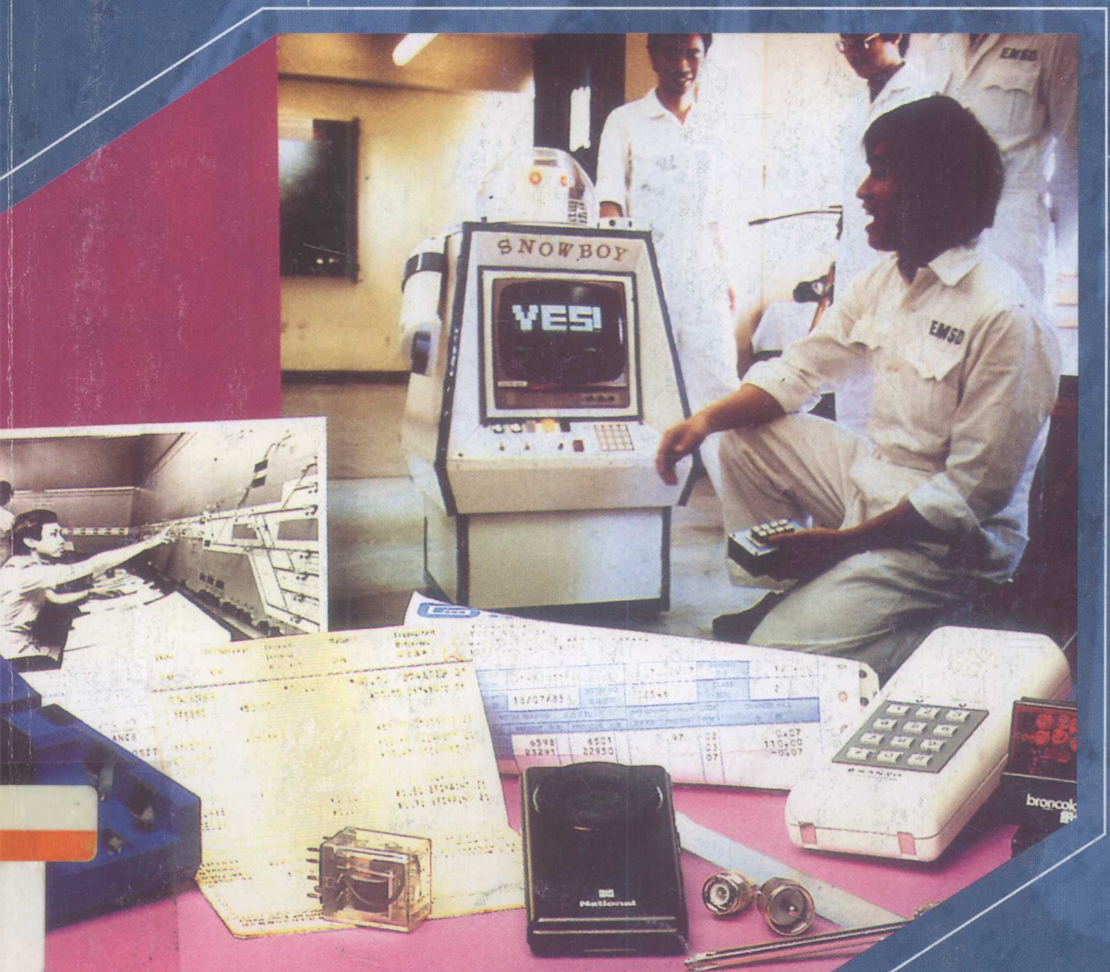
香港中學適用

# 數學 4B

（修訂版）

## 教師手冊




孫淑南

# 第 7 章 續多項式

## 額外例題

| | 例題 |
|---|---|
| §7.1 重點複習 | 1 |
| §7.2 恆等的多項式 | 2 |
| §7.3 有關多項式的定理 | 3, 4 |
| §7.4 有關多項式的定理的應用 | 5, 6 |
| §7.5 較難的代數分式 | 7, 8, 9 |
| §7.6 分式方程 | 10 |

### 例 1 (§7.1)

**(a)** $f(x)$ 和 $g(x)$ 是兩個多項式。

若 $f(x)+g(x)=2x^3-6$ 和 $f(x)-3g(x)=2x^3-4x^2+18$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$。

**(b)** 展開 $f(x)\cdot g(x)$，並將答案按 $x$ 的降冪排列。

**(c)** 求 $f(x)\div g(x)$ 的商式和餘式。

解

**(a)**
$$f(x)+g(x)=2x^3-6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$
$$f(x)-3g(x)=2x^3-4x^2+18 \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

**(i)–(ii)**：$4g(x)=4x^2-24$

$$g(x)=\underline{\underline{x^2-6}}$$

將 $g(x)=x^2-6$ 代入 **(i)**，

$$f(x)+x^2-6=2x^3-6$$
$$f(x)=\underline{\underline{2x^3-x^2}}$$

**(b)**
$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (2x^3-x^2)(x^2-6) \\ &= (2x^3-x^2)(x^2)-(2x^3-x^2)(6) \\ &= \underline{\underline{2x^5-x^4-12x^3+6x^2}} \end{aligned}$$

**(c)**
$$\begin{array}{r}
2x\;-1 \\
x^2+0x-6\,\big)\,\overline{2x^3-\;x^2+\;0x+0} \\
\underline{2x^3+0x^2-12x\phantom{+0}} \\
-x^2+12x+0 \\
\underline{-x^2+\;0x+6} \\
12x-6
\end{array}$$

∴ 商式 $=\underline{\underline{2x-1}}$

餘式 $=\underline{\underline{12x-6}}$

## 例 2 (§7.2)

**(a)** 若 $x^2 \equiv A(x-1)^3 + B(x-1)^2(x-2) + C(x-1)(x-2) + D(x-2)$，

求 $A$、$B$、$C$ 和 $D$ 的值。

**(b)** 由此證明

$(u+1)^2 = 4u^3 - 4u^2(u-1) - 3u(u-1) - u + 1$。

解

**(a)** 當 $x = 2$ 時，

$$2^2 = A(1)^3 + B(1)^2(0) + C(1)(0) + D(0)$$

$$A = \underline{\underline{4}}$$

當 $x = 1$ 時，

$$1^2 = A(0)^3 + B(0)^2(-1) + C(0)(-1) + D(-1)$$

$$D = \underline{\underline{-1}}$$

$x^3$ 的係數相等，

$$0 = A + B$$

$$\therefore\ B = -A = \underline{\underline{-4}}$$

常數項相等，

$$0 = -A - 2B + 2C - 2D$$

$$0 = -4 - 2(-4) + 2C - 2(-1)$$

$$\therefore\ C = \underline{\underline{-3}}$$

**(b)**

從 **(a)**，

$$x^2 \equiv 4(x-1)^3 - 4(x-1)^2(x-2) - 3(x-1)(x-2) - (x-2)$$

設 $x = u + 1$。

$$(u+1)^2 = 4(u+1-1)^3 - 4(u+1-1)^2(u+1-2) - 3(u+1-1)(u+1-2) - (u+1-2)$$

即 $\underline{(u+1)^2 = 4u^3 - 4u^2(u-1) - 3u(u-1) - u + 1}$

## 例 3 (§7.3)

**(a)** 當 $f(x) = x^{1\,997} + 3$ 除以 $x + 1$ 時，求餘數。

**(b)** 利用 **(a)**，或其他方法，求 $7^{1\,997} + 3$ 除以 8 所得的餘數。

**(c)** 由此求 $4 \times 7^{1\,997} + 3$ 除以 8 所得的餘數。

解

**(a)** 根據餘式定理，

$$\begin{aligned}餘數 &= f(-1) \\ &= (-1)^{1\,997} + 3 \\ &= -1 + 3 \\ &= \underline{\underline{2}}\end{aligned}$$

**(b)** 當 $x = 7$ 時，$f(7) = 7^{1\,997} + 3$。

根據 **(a)**，當 $f(7)$ 除以 $8(= 7 + 1)$ 時，餘數 $= \underline{\underline{2}}$

**(c)** 設 $7^{1\,997} + 3 = 8M + 2$，其中 $M$ 是一個整數。則 $7^{1\,997} = 8M - 1$。

$$\begin{aligned}\therefore\ 4 \times 7^{1\,997} + 3 &= 4(8M - 1) + 3 \\ &= 32M - 1 \\ &= 32M - 8 + 7 \\ &= 8(4M - 1) + 7 \\ &= 8N + 7\end{aligned}$$

其中 $N = 4M - 1$ 是一個整數。

$\therefore$ 餘數 $= \underline{\underline{7}}$

## 例 4 (§7.3)

已知多項式 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$。

**(a)** 證明 $x - 1$ 和 $x + 2$ 是 $f(x)$ 的因式。

**(b)** 由此將 $f(x)$ 因式分解。

解

**(a)** $\because\ f(1) = 1^4 + 2(1)^3 - 13(1)^2 - 14(1) + 24$
$= 1 + 2 - 13 - 14 + 24$
$= 0$

$\therefore$ $x - 1$ 是 $f(x)$ 的因式。

$\because\ f(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 - 13(-2)^2 - 14(-2) + 24$
$= 16 - 16 - 52 + 28 + 24$
$= 0$

$\therefore$ $x + 2$ 是 $f(x)$ 的因式。

**(b)** 利用除法可得

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x^2 + x - 12)$$
$$= (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

## 例 5 (§7.4)

**(a)** 將多項式 $f(x) = x^3 + 8x^2 + 10x - 25$ 分解為一個一次因式和一個二次因式。

**(b)** 利用 **(a)** 的結果，解方程 $f(x) = 0$。
（若方程的根是無理數，取答案準確至二位小數。）

解

**(a)** [常數項 $-25$ 的因子是 $\pm 1$，$\pm 5$，$\pm 25$。]

$\because\ f(-5) = (-5)^3 + 8(-5)^2 + 10(-5) - 25$
$= 0$

$\therefore$ $x + 5$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x) = (x+5)(x^2 + 3x - 5)$$

**(b)** $f(x) = 0$

$(x+5)(x^2 + 3x - 5) = 0$

$\therefore$ $x = -5$

或 $x^2 + 3x - 5 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$x = 1.19$（準確至二位小數）

或 $x = -4.19$（準確至二位小數）

$\therefore$ 所求的解是 $-5$，$1.19$ 和 $-4.19$。

## 例 6 (§7.4)

已知多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ 可被 $x + 2$ 整除；當它除以 $x - 1$ 時，所得的餘數是 $-6$。求

**(a)** $a$ 和 $b$ 的值；

**(b)** 當 $f(x)$ 除以 $x + 3$ 時所得的餘數。

解

**(a)** 由於 $f(x)$ 可被 $x + 2$ 整除，所以

$f(-2) = 0$

即 $(-2)^2 + a(-2) + b = 0$

$2a - b = 4$ ............ **(i)**

當 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 時，

餘數 $= -6$

$\therefore$ $f(1) = -6$

即 $1^2 + a(1) + b = -6$

$a + b = -7$ ............ **(ii)**

**(i) + (ii)：** $3a = -3$

$a = -1$

將 $a=-1$ 代入 **(ii)**，

$$(-1)+b=-7$$
$$b=\underline{\underline{-6}}$$

**(b)** 從 **(a)**，$f(x)=x^2-x-6$ 。

$$\therefore \text{ 餘數} = f(-3) = (-3)^2-(-3)-6 = \underline{\underline{6}}$$

## 例 7 (§7.5)

**(a)** 已知 $2x+1$ 是 $f(x)=2x^3-x^2+hx-6$ 和 $g(x)=2x^3-7x^2+2x+k$ 兩個多項式的公因式，求 $h$ 和 $k$ 的值。

**(b)** 由此求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的 H.C.F.。

**(c)** 若 $f(x)$、$g(x)$ 與另一個多項式的 H.C.F. 和 L.C.M. 分別是 $2x+1$ 和 $(2x+1)(x-1)^2(x-3)(x+2)$，求該個多項式。

解

**(a)** 由於 $2x+1$ 是 $f(x)$ 的因式，所以

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

即 $2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+h\left(-\frac{1}{2}\right)-6=0$

$$-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{h}{2}-6=0$$
$$h=\underline{\underline{-13}}$$

由於 $2x+1$ 也是 $g(x)$ 的因式，所以

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

即 $2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-7\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)+k=0$

$$-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}-1+k=0$$
$$k=\underline{\underline{3}}$$

**(b)** 利用除法可得

$$f(x)=(2x+1)(x^2-x-6) = (2x+1)(x-3)(x+2)$$
$$g(x)=(2x+1)(x^2-4x+3) = (2x+1)(x-3)(x-1)$$
$$\therefore \text{ H.C.F.} = \underline{\underline{(2x+1)(x-3)}}$$

**(c)** <u>所求的多項式是 $(2x+1)(x-1)^2$。</u>

## 例 8 (§7.5)

化簡

**(a)** $\dfrac{1}{4x-8}-\dfrac{1}{4x+8}-\dfrac{1}{x^2+4}+\dfrac{8}{x^4+16}$；

**(b)** $\dfrac{x^2-13x+40}{x^2-4x-5}\div\dfrac{x^3+7x^2-7x+8}{x^3+1}$。

解

**(a)** 原式

$$=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{8}{x^4+16}$$
$$=\frac{(x+2)-(x-2)}{4(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{8}{x^4+16}$$
$$=\frac{4}{4(x^2-4)}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{8}{x^4+16}$$
$$=\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{8}{x^4+16}$$
$$=\frac{(x^2+4)-(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}+\frac{8}{x^4+16}$$
$$=\frac{8}{x^4-16}+\frac{8}{x^4+16}$$
$$=8\left(\frac{1}{x^4-16}+\frac{1}{x^4+16}\right)$$
$$=8\left[\frac{(x^4+16)+(x^4-16)}{(x^4-16)(x^4+16)}\right]$$
$$=8\left[\frac{2x^4}{x^8-256}\right]$$
$$=\underline{\underline{\frac{16x^4}{x^8-256}}}$$

**(b)** 設 $f(x)=x^3+7x^2-7x+8$ 。

$\because\ f(-8)=(-8)^3+7(-8)^2-7(-8)+8$
$\qquad\qquad=0$

$\therefore\ x+8$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x)=(x+8)(x^2-x+1)$

$\therefore$ 原式

$$=\frac{(x-8)(x-5)}{(x+1)(x-5)}\div\frac{(x+8)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x-8)(x-5)}{(x+1)(x-5)}\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+8)(x^2-x+1)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{x-8}{x+8}}}$$

## 例 9 (§7.5)

若 $x=\dfrac{2ab}{a-b}$，試以 $a$ 和 $b$ 表示 $\dfrac{a+x}{a}+\dfrac{b+x}{b}$ 。

解

$$a+x=a+\frac{2ab}{a-b}$$
$$=\frac{a(a-b)+2ab}{a-b}$$
$$=\frac{a^2+ab}{a-b}$$
$$\frac{a+x}{a}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$b+x=b+\frac{2ab}{a-b}$$
$$=\frac{b(a-b)+2ab}{a-b}$$
$$=\frac{3ab-b^2}{a-b}$$
$$\frac{b+x}{b}=\frac{3a-b}{a-b}$$

$$\therefore\ \frac{a+x}{a}+\frac{b+x}{b}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{3a-b}{a-b}$$
$$\underline{\frac{a+x}{a}+\frac{b+x}{b}=\frac{4a}{a-b}}$$

## 例 10 (§7.6)

解 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}$ 。

解

限制是 $x\neq 0$，$x\neq -4$，$x\neq -1$ 及 $x\neq -3$ 。

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$$
$$\frac{(x+3)-x}{x(x+3)}=\frac{(x+4)-(x+1)}{(x+1)(x+4)}$$
$$\frac{3}{x(x+3)}=\frac{3}{(x+1)(x+4)}$$
$$(x+1)(x+4)=x(x+3)$$
$$x^2+5x+4=x^2+3x$$
$$2x=-4$$
$$x=\underline{\underline{-2}}$$

# 習題題解（附選題指引）

在各習題的「選題指引」中，屬於剪裁課程所不需要的題目，其題號將用藍色顯示。

## 習題 7A（第 4 頁）

### 選題指引

| 類型 | 目的 |
|---|---|
| ① | 多項式的加法和減法。 |
| ② | 多項式的乘法。 |
| ③ | 多項式的除法。 |
| ④ | 多項式運算的綜合題。 |

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1 – 4 | 11, 12 |
| ② | 5, 6 | 13, 14 |
| ③ | 7, 8 | 15, 16 |
| ④ | 9, 10 | 17, 18 |

**1.** $(x^3+2x-4)+(2x^3+x^2-3x)$

$=x^3+2x^3+x^2+2x-3x-4$

$=\underline{\underline{3x^3+x^2-x-4}}$

**2.** $(x^2-x+3)+(-2x^3+x^2-6)$

$=-2x^3+x^2+x^2-x+3-6$

$=\underline{\underline{-2x^3+2x^2-x-3}}$

**3.** $(2x^3-x^2+3)-(2x^2+5x-1)$

$=2x^3-x^2+3-2x^2-5x+1$

$=2x^3-x^2-2x^2-5x+3+1$

$=\underline{\underline{2x^3-3x^2-5x+4}}$

**4.** $(-x^3+3x^2-5)-(1+3x-3x^2-2x^3)$

$=-x^3+3x^2-5-1-3x+3x^2+2x^3$

$=-x^3+2x^3+3x^2+3x^2-3x-5-1$

$=\underline{\underline{x^3+6x^2-3x-6}}$

**5.** $(3x-1)(2x^2-5)$

$=(3x-1)(2x^2)-(3x-1)(5)$

$=\underline{\underline{6x^3-2x^2-15x+5}}$

**6.** $(2x^2-4x-1)(x+1)$

$=(2x^2-4x-1)(x)+(2x^2-4x-1)(1)$

$=2x^3-4x^2-x+2x^2-4x-1$

$=2x^3-4x^2+2x^2-x-4x-1$

$=\underline{\underline{2x^3-2x^2-5x-1}}$

**7.**

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 2x & +1 & \\ \hline
x-1 & 2x^2 & -\;\;x & +1 \\
 & 2x^2 & -2x & \\ \hline
 & & x & +1 \\
 & & x & -1 \\ \hline
 & & & 2
\end{array}$$

$\therefore$ 商式 $=\underline{\underline{2x+1}}$

餘式 $=\underline{\underline{2}}$

**8.**

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3x^2 & -10x & +22 & \\ \hline
x+2 & 3x^3 & -\;4x^2 & +\;\;2x & -\;\;1 \\
 & 3x^3 & +\;6x^2 & & \\ \hline
 & & -10x^2 & +\;\;2x & \\
 & & -10x^2 & -20x & \\ \hline
 & & & 22x & -\;\;1 \\
 & & & 22x & +44 \\ \hline
 & & & & -45
\end{array}$$

習題 7A 題解（續）

$\therefore$ 商式 $= \underline{\underline{3x^2 - 10x + 22}}$

餘式 $= \underline{\underline{-45}}$

**9.** $(2x-3)(3x+5) - x(4-7x)$

$= (2x-3)(3x) + (2x-3)(5) - 4x + 7x^2$

$= 6x^2 - 9x + 10x - 15 - 4x + 7x^2$

$= 6x^2 + 7x^2 - 9x + 10x - 4x - 15$

$= \underline{\underline{13x^2 - 3x - 15}}$

**10.** $(2x^2 - 4) \div [x(x-1) + x - 2] = \dfrac{2x^2 - 4}{x(x-1) + x - 2}$

$= \dfrac{2(x^2 - 2)}{x^2 - x + x - 2}$

$= \dfrac{2(x^2 - 2)}{x^2 - 2}$

$= \underline{\underline{2}}$

**11.** $(3x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - 5) + (x^2 - x)$

$= 3x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 5 + x^2 - x$

$= 3x^2 - 2x^2 + x^2 - 2x - x + 1 + 5$

$= \underline{\underline{2x^2 - 3x + 6}}$

**12.** $(4x^3 + x - 3) + (-6x + x^3 - x^2) -$

$(2x - 5x^2 + 1)$

$= 4x^3 + x - 3 - 6x + x^3 - x^2 - 2x + 5x^2 - 1$

$= 4x^3 + x^3 - x^2 + 5x^2 + x - 6x - 2x - 3 - 1$

$= \underline{\underline{5x^3 + 4x^2 - 7x - 4}}$

**13.** $(2x^2 - 1)(x^2 - 4x + 3)$

$= (2x^2 - 1)(x^2) - (2x^2 - 1)(4x) + (2x^2 - 1)(3)$

$= 2x^4 - x^2 - 8x^3 + 4x + 6x^2 - 3$

$= 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 6x^2 + 4x - 3$

$= \underline{\underline{2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4x - 3}}$

**14.** $(x^2 - 2x + 2)(2x^2 + x - 3)$

$= (x^2 - 2x + 2)(2x^2) + (x^2 - 2x + 2)(x) -$

$(x^2 - 2x + 2)(3)$

$= 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x^3 - 2x^2 + 2x - 3x^2 +$

$6x - 6$

$= 2x^4 - 4x^3 + x^3 + 4x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 2x +$

$6x - 6$

$= \underline{\underline{2x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 6}}$

**15.**

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 1 \\
\hline
2x^2 + 0x - 3 & 4x^3 - 2x^2 + 0x + 5 \\
 & 4x^3 + 0x^2 - 6x \\
\hline
 & -2x^2 + 6x + 5 \\
 & -2x^2 + 0x + 3 \\
\hline
 & 6x + 2
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $= \underline{\underline{2x - 1}}$

餘式 $= \underline{\underline{6x + 2}}$

**16.**

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - x + 2 \\
\hline
2x^2 - x + 2 & 8x^4 - 6x^3 + 13x^2 + 0x - 4 \\
 & 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 \\
\hline
 & -2x^3 + 5x^2 + 0x \\
 & -2x^3 + x^2 - 2x \\
\hline
 & 4x^2 + 2x - 4 \\
 & 4x^2 - 2x + 4 \\
\hline
 & 4x - 8
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $= \underline{\underline{4x^2 - x + 2}}$

餘式 $= \underline{\underline{4x - 8}}$

**17.** $(2x^2 + x - 1)(x + 2) - x(3x^2 - 4)$

$= (2x^2 + x - 1)(x) + (2x^2 + x - 1)(2) - 3x^3 + 4x$

$= 2x^3 + x^2 - x + 4x^2 + 2x - 2 - 3x^3 + 4x$

$= 2x^3 - 3x^3 + x^2 + 4x^2 - x + 2x + 4x - 2$

$= \underline{\underline{-x^3 + 5x^2 + 5x - 2}}$

**習題 7A 題解**（續）

**18.** $(x^2+x-6)(2x^2+4x)\div(4-x^2)$

$= \dfrac{(x^2+x-6)(2x^2+4x)}{4-x^2}$

$= \dfrac{(x+3)(x-2)(2x)(x+2)}{(2+x)(2-x)}$

$= \underline{\underline{-2x(x+3)}}$

## 習題 7B（第 6 頁）

### 選題指引

| 類型 | 目的 |
|---|---|
| ① | 利用同類項係數相等的性質，直接求恆等式中的未知數。 |
| ② | 利用同類項係數相等的性質和解方程，求恆等式中的未知數。 |
| ③ | 恆等多項式的綜合題。 |

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1 – 4, 6 | |
| ② | 5 | 7 – 10 |
| ③ | | 11 |

**1.** 由於同類項的係數相等，所以我們得
$A=-1$，$B=3$，$C=0$。

**2.** $\because\ (x+1)(x-2)=x^2-x-2$
$\therefore\ x^2-x-2\equiv x^2+Ax+B$
由於同類項的係數相等，所以我們得
$A=-1$，$B=-2$。

**3.** $\because\ (2x-3)(3x+1)=6x^2-7x-3$
$\therefore\ 6x^2-7x-3\equiv Ax^2+Bx+C$
由於同類項的係數相等，所以我們得
$A=6$，$B=-7$，$C=-3$。

**4.** $\because\ Ax(x+1)-1=Ax^2+Ax-1$
$\therefore\ Ax^2+Ax-1\equiv -2x^2+Bx+C$
由於同類項的係數相等，所以我們得
$A=-2$，$B=-2$，$C=-1$。

**5.** $\because\ A(x+1)+B(x-1)=(A+B)x+(A-B)$
$\therefore\ 2x\equiv(A+B)x+(A-B)$
同類項的係數相等：
$2=A+B$
$0=A-B$
解這些方程，可得
$A=1$，$B=1$。

**6.** $\because\ x(x-1)^2=x(x^2-2x+1)$
$=x^3-2x^2+x$
$\therefore\ x^3-2x^2+x\equiv Ax^3+Bx^2+Cx+D$
由於同類項的係數相等，所以我們得
$A=1$，$B=-2$，$C=1$，$D=0$。

**7.** $\because\ (x+1)(x-1)(x-2)=(x^2-1)(x-2)$
$=x^3-2x^2-x+2$
$\therefore\ x^3-2x^2-x+2\equiv Ax^3+Bx^2+Cx+A+D$
同類項的係數相等：
$A=\underline{\underline{1}}$
$B=\underline{\underline{-2}}$
$C=\underline{\underline{-1}}$
$A+D=2$
$1+D=2$
$D=\underline{\underline{1}}$

**8.** $\because\ A+B(x-1)+Cx(x-1)$
$=(A-B)+(B-C)x+Cx^2$
$\therefore\ 2-3x+4x^2\equiv(A-B)+(B-C)x+Cx^2$

**習題 7B 題解**（續）

同類項的係數相等：

$A - B = 2$

$B - C = -3$

$C = 4$

解這些方程，可得

$\underline{A = 3，B = 1，C = 4。}$

**9.** $\because \quad Ax^2 + B(x-2) + C(x+1)$

$= Ax^2 + (B+C)x + (C-2B)$

$\therefore \quad 3x^2 + x - 5 \equiv Ax^2 + (B+C)x + (C-2B)$

同類項的係數相等：

$A = 3$

$B + C = 1$

$C - 2B = -5$

解這些方程，可得

$\underline{A = 3，B = 2，C = -1。}$

**10.** $\because \quad A(x^2+2) + B(x+1) + Cx(x+3)$

$= (A+C)x^2 + (B+3C)x + (2A+B)$

$\therefore \quad (A+C)x^2 + (B+3C)x + (2A+B)$

$\equiv 3x^2 + 5x + A$

同類項的係數相等：

$A + C = 3$

$B + 3C = 5$

$2A + B = A$

解這些方程，可得

$\underline{A = 1，B = -1，C = 2。}$

**11. (a)** $x^2 \equiv A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x-3) + C(x-3)(x-1)$

當 $x = 3$ 時，

$3^2 = A(2)(1) + B(1)(0) + C(0)(2)$

$A = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$

當 $x = 1$ 時，

$1^2 = A(0)(-1) + B(-1)(-2) + C(-2)(0)$

$B = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

當 $x = 2$ 時，

$2^2 = A(1)(0) + B(0)(-1) + C(-1)(1)$

$C = \underline{\underline{-4}}$

**(b)** 從 **(a)**，

$x^2 \equiv \frac{9}{2}(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)(x-3) + (-4)(x-3)(x-1)$

$\therefore \quad 2x^2 \equiv 9(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) - 8(x-3)(x-1)$

即 $\underline{2x^2 \equiv (x-3)(x-2) + 9(x-2)(x-1) - 8(x-1)(x-3)}$

## 習題 7C（第 12 頁）

### 選題指引

| 類型 | 目的 |
|---|---|
| ① | 利用餘式定理求多項式相除的餘數。 |
| ② | 利用餘式定理求除式中的未知數。 |

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1 – 4 | 5 – 7, 9 |
| ② | | 8 |

**1.** 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$。

餘數 $= f(1)$

$= 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 1$

$= \underline{\underline{-1}}$

**習題 7C 題解**（續）

**2.** 設 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$。

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(-1)\\ &= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) - 1\\ &= \underline{\underline{-9}}\end{aligned}$$

**3.** 設 $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6x - 7$。

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(-3)\\ &= 2(-3)^4 - 3(-3)^2 + 6(-3) - 7\\ &= \underline{\underline{110}}\end{aligned}$$

**4.** 設 $f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x - 3$。

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f(2)\\ &= 2^4 - 2^3 + 4(2)^2 - 5(2) - 3\\ &= \underline{\underline{11}}\end{aligned}$$

**5.** 設 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$。

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1\\ &= \underline{\underline{-\frac{5}{4}}}\end{aligned}$$

**6.** 設 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$。

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f\left(-\frac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}\end{aligned}$$

**7.** 設 $f(x) = 9x^3 - 6x^2 + 4x - 3$。

$$\begin{aligned}\text{餘數} &= f\left(-\frac{2}{3}\right)\\ &= 9\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 3\\ &= \underline{\underline{-11}}\end{aligned}$$

**8.** 設 $f(x) = x^2 - 3x + 4$。

$\because$ 餘數 $= 2$

$\therefore$ $f(-k) = 2$

即 $(-k)^2 - 3(-k) + 4 = 2$

$$\begin{aligned}k^2 + 3k + 2 &= 0\\ (k+1)(k+2) &= 0\\ k &= \underline{\underline{-1}} \text{ 或 } \underline{\underline{-2}}\end{aligned}$$

**9.** 設 $f(x) = 9x^{100} + 8x^{97} - 3x^3 - 9x^2 + 5$。

**(a)** 餘數

$$\begin{aligned}&= f(0)\\ &= 9(0)^{100} + 8(0)^{97} - 3(0)^3 - 9(0)^2 + 5\\ &= \underline{\underline{5}}\end{aligned}$$

**(b)** 餘數

$$\begin{aligned}&= f(-1)\\ &= 9(-1)^{100} + 8(-1)^{97} - 3(-1)^3 - 9(-1)^2 + 5\\ &= 9 - 8 + 3 - 9 + 5\\ &= \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

## 習題 7D (第 15 頁)

### 選題指引

**類型** **目的**

① 利用因式定理判斷多項式的因式。

② 因式定理在多項式的因式分解上的應用。

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1, 2 | 6, 7 |
| ② | 3 – 5 | 8, 9 |

**1.** $P(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$

**(a)** $\because$ $P(2) = 2^3 + 2^2 - 5(2) - 2 = 0$

$\therefore$ $\underline{x - 2 \text{ 是 } P(x) \text{ 的因式。}}$

習題 7D 題解（續）

**(b)** $\because\ P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5(-3) - 2$
$= -5$
$\neq 0$

$\therefore$ $x + 3$ 不是 $P(x)$ 的因式。

**2.** $P(x) = 6x^3 + x^2 - 1$

**(a)** $\because\ P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

$\therefore$ $x - \frac{1}{2}$ 是 $P(x)$ 的因式。

**(b)** $\because\ P\left(-\frac{1}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1$
$= -\frac{10}{9}$
$\neq 0$

$\therefore$ $x + \frac{1}{3}$ 不是 $P(x)$ 的因式。

**3.** $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$\because\ f(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 0$

$\therefore$ $x - 1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$
$= (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

**4.** $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$\because\ f(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$

$\therefore$ $x + 2$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$
$= (x + 2)(x + 3)(x - 1)$

**5.** $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

$\because\ f(-1) = 2(-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 1$
$= 0$

$\therefore$ $x + 1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$
$= (x + 1)(x - 1)(2x - 1)$

**6.** $P(x) = 2x^4 - x^3 - 6x - 12$

**(a)** $\because\ P(2) = 2(2)^4 - 2^3 - 6(2) - 12 = 0$

$\therefore$ $x - 2$ 是 $P(x)$ 的因式。

**(b)** $\because\ P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right) - 12$
$= -15$
$\neq 0$

$\therefore$ $2x - 1$ 不是 $P(x)$ 的因式。

**7.** $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + x - 2$

**(a)** $\because\ P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 13\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2$
$= 0$

$\therefore$ $2x + 1$ 是 $P(x)$ 的因式。

**(b)** $\because\ P\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 13\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 2$
$= 0$

$\therefore$ $3x - 1$ 是 $P(x)$ 的因式。

**8.** $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

$\because\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2$
$= 0$

$\therefore$ $2x - 1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3x + 2)$
$= (2x - 1)(x + 1)(x + 2)$

**9.** $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 21x + 10$

$\because\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 25\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 21\left(-\frac{1}{3}\right) + 10$
$= 0$

$\therefore$ $3x + 1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (3x + 1)(2x^2 - 9x + 10)$
$= (3x + 1)(2x - 5)(x - 2)$

## 習題 7E (第 19 頁)

### 選題指引

| 類型 | 目的 |
|---|---|
| ① | 利用因式定理分解多項式為因式。 |
| ② | 利用因式定理解三次方程。 |

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1 – 4 | 7, 8 |
| ② | 5, 6 | 9 – 11 |

**1.** 設 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$。

$\because\ f(1)=1^3+2(1)^2-1-2=0$

$\therefore\ x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=(x-1)(x^2+3x+2)=\underline{\underline{(x-1)(x+1)(x+2)}}$$

**2.** 設 $f(x)=x^3-3x^2-6x-2$。

$\because\ f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-6(-1)-2=0$

$\therefore\ x+1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=\underline{\underline{(x+1)(x^2-4x-2)}}$$

**3.** 設 $f(x)=x^3-6x^2-x+6$。

$\because\ f(1)=1^3-6(1)^2-1+6=0$

$\therefore\ x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=(x-1)(x^2-5x-6)=\underline{\underline{(x-1)(x+1)(x-6)}}$$

**4.** 設 $f(x)=x^3-5x^2+12x-12$。

$\because\ f(2)=2^3-5(2)^2+12(2)-12=0$

$\therefore\ x-2$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=\underline{\underline{(x-2)(x^2-3x+6)}}$$

**5.** 設 $f(x)=x^3-7x+6$。

$\because\ f(1)=1^3-7(1)+6=0$

$\therefore\ x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x+3)(x-2)$$

$\therefore\ (x-1)(x+3)(x-2)=0$

$x=1$ 或 $-3$ 或 $2$

$\therefore$ <u>所求的解是 $-3$，$1$ 和 $2$。</u>

**6.** 設 $f(x)=x^3+x^2-9x-9$。

$\because\ f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-9(-1)-9=0$

$\therefore\ x+1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=(x+1)(x^2-9)=(x+1)(x-3)(x+3)$$

$\therefore\ (x+1)(x-3)(x+3)=0$

$x=-1$ 或 $3$ 或 $-3$

$\therefore$ <u>所求的解是 $-3$，$-1$ 和 $3$。</u>

**7.** 設 $f(x)=x^3-6x^2-9x+14$。

$\because\ f(1)=1^3-6(1)^2-9(1)+14=0$

$\therefore\ x-1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$$f(x)=(x-1)(x^2-5x-14)=\underline{\underline{(x-1)(x-7)(x+2)}}$$

習題 7E 題解（續）

**8.** 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 29x - 20$。

$\because$ $f(-4) = (-4)^3 - 2(-4)^2 - 29(-4) - 20$
$= 0$

$\therefore$ $x + 4$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = \underline{\underline{(x+4)(x^2 - 6x - 5)}}$

**9.** 設 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$。

$\because$ $f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 5(1) + 1$
$= 0$

$\therefore$ $x - 1$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (x - 1)(x^2 + 4x - 1)$

$\therefore$ $(x - 1)(x^2 + 4x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$ 或 $x^2 + 4x - 1 = 0$

$\therefore$ $x = 1$

或 $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$= -2 \pm \sqrt{5}$

$x = 0.24$（準確至二位小數）

或 $x = -4.24$（準確至二位小數）

$\therefore$ <u>所求的解是 $-4.24$，$0.24$ 和 $1$。</u>

**10.** 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$。

$\because$ $f(-4) = (-4)^3 - 2(-4)^2 - 15(-4) + 36$
$= 0$

$\therefore$ $x + 4$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (x + 4)(x^2 - 6x + 9)$
$= (x + 4)(x - 3)^2$

$\therefore$ $(x + 4)(x - 3)^2 = 0$

$x = -4$ 或 $3$（二重根）

$\therefore$ <u>所求的解是 $-4$ 和 $3$（二重根）。</u>

**11.** 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 24$。

$\because$ $f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 - 7(-3) + 24$
$= 0$

$\therefore$ $x + 3$ 是 $f(x)$ 的因式。

利用除法可得

$f(x) = (x + 3)(x^2 - 5x + 8)$

$\therefore$ $(x + 3)(x^2 - 5x + 8) = 0$

$x + 3 = 0$ 或 $x^2 - 5x + 8 = 0$

$\therefore$ $x = -3$

或 $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$

$= \dfrac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}$（捨去）

$\therefore$ <u>所求的解是 $-3$。</u>

## 習題 7F（第 21 頁）

### 選題指引

**類型** **目的**

① 利用餘式定理求被除式中的未知數。
② 利用因式定理分解多項式為因式。
③ 利用餘式定理求多項式相除的餘數。

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1 – 6 | 7 – 10 |
| ② | | 11, 12, 14 |
| ③ | | 13, 15 |

**1.** 設 $f(x) = x^2 - 2x + k$。

$\because$ 餘數 $= 3$

$\therefore$ $f(-1) = 3$

即 $(-1)^2 - 2(-1) + k = 3$

$k = \underline{\underline{0}}$

**習題 7F 題解**（續）

**2.** 設 $f(x)=ax^2+3x-4$。

$\because$ 餘數 $=1$

$\therefore$ $f(1)=1$

即 $a(1)^2+3(1)-4=1$

$$a=\underline{\underline{2}}$$

**3.** 設 $f(x)=x^3-px^2+x-p$。

由於 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，所以

$$f(-1)=0$$

即 $(-1)^3-p(-1)^2+(-1)-p=0$

$$-2p-2=0$$

$$p=\underline{\underline{-1}}$$

**4.** 設 $f(x)=x^2-6kx-3$。

$\because$ 餘數 $=9k+7$

$\therefore$ $f(-2)=9k+7$

即 $(-2)^2-6k(-2)-3=9k+7$

$$12k+1=9k+7$$

$$3k=6$$

$$k=\underline{\underline{2}}$$

**5.** 設 $f(x)=(x+m)^2-4$。

由於 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，所以

$$f(-1)=0$$

即 $(-1+m)^2-4=0$

$$(-1+m)^2=4$$

$$-1+m=\pm 2$$

$$m=\underline{\underline{3}} \text{ 或 } \underline{\underline{-1}}$$

**6.** 設 $f(x)=x^2+3x-k-3$。

由於 $x-k$ 是 $f(x)$ 的因式，所以

$$f(k)=0$$

即 $k^2+3k-k-3=0$

$$k^2+2k-3=0$$

$$(k+3)(k-1)=0$$

$$k=\underline{\underline{-3}} \text{ 或 } \underline{\underline{1}}$$

**7.** 設 $f(x)=2x^3-(k-1)x^2+3kx-5$。

$\because$ 餘數 $=1$

$\therefore$ $f(2)=1$

即 $2(2)^3-(k-1)(2)^2+3k(2)-5=1$

$$16-4k+4+6k-5=1$$

$$2k=-14$$

$$k=\underline{\underline{-7}}$$

**8.** $f(x)=4x^2-4x+k$

由於 $f(x)$ 可被 $2x+k$ 整除，所以

$$f\left(-\frac{k}{2}\right)=0$$

即 $4\left(-\frac{k}{2}\right)^2-4\left(-\frac{k}{2}\right)+k=0$

$$k^2+3k=0$$

$$k(k+3)=0$$

$$k=\underline{\underline{0}} \text{ 或 } \underline{\underline{-3}}$$

**9.** 設 $f(x)=-2x^2+ax+4$。

$\because$ $f\left(\frac{2}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ $-2(1)^2+a(1)+4=-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+a\left(-\frac{1}{2}\right)+4$

$$a+2=\frac{7}{2}-\frac{a}{2}$$

$$\frac{3a}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a=\underline{\underline{1}}$$

**10. (a)** $F(x)=x^2-ax+b$

$\because$ $F(-2)=0$

$\therefore$ $(-2)^2-a(-2)+b=0$

$\underline{2a+b=-4}$…… **(i)**

同時， $F(-1)=2$

$\therefore$ $(-1)^2-a(-1)+b=2$

$\underline{a+b=1}$……. **(ii)**

**(b)** 解 **(i)** 和 **(ii)** 可得

$\underline{a=-5，b=6。}$

習題 7F 題解（續）

**11. (a)** 設 $f(x)=x^3-px^2+2x+(p+3)$。

由於 $x-2$ 是 $f(x)$ 的因式，所以

$$f(2)=0$$

即 $2^3-p(2)^2+2(2)+(p+3)=0$

$$-3p+15=0$$

$$p=\underline{\underline{5}}$$

**(b)** 從 **(a)**，$f(x)=x^3-5x^2+2x+8$。

利用除法可得

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)(x^2-3x-4)\\&=\underline{\underline{(x-2)(x+1)(x-4)}}\end{aligned}$$

**12. (a)** 設 $f(x)=x^3-ax^2+x-b$。

由於 $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式，所以

$$f(-1)=0$$

即 $(-1)^3-a(-1)^2+(-1)-b=0$

$$a+b=-2 \quad ..\text{(i)}$$

同時，由於 $x-2$ 是 $f(x)$ 的因式，所以

$$f(2)=0$$

即 $2^3-a(2)^2+2-b=0$

$$4a+b=10 \quad ........\text{(ii)}$$

解 **(i)** 和 **(ii)** 可得

$\underline{a=4,\ b=-6}$。

**(b)** 從 **(a)**，$f(x)=x^3-4x^2+x+6$。

利用除法可得

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

∴ $\underline{\text{其餘的因式是 } x-3}$。

**13. (a)** $F(x)=2x^3-3x^2+ax+b$

∵ $F(1)=a$

∴ $2(1)^3-3(1)^2+a(1)+b=a$

$$b=\underline{\underline{1}}$$

同時，$F(2)=b$

∴ $2(2)^3-3(2)^2+a(2)+1=1$

$$a=\underline{\underline{-2}}$$

**(b)** 從 **(a)**，$F(x)=2x^3-3x^2-2x+1$。

$$\begin{aligned}F(-1)&=2(-1)^3-3(-1)^2-2(-1)+1\\&=-2\end{aligned}$$

∴ $\underline{F(x) \text{ 除以 } x+1 \text{ 所得的餘數是 } -2}$。

**14. (a)** $f(x)=9x^3-9ax^2-4x+4a$

∵ $f(a)=9(a)^3-9a(a)^2-4(a)+4a$
$=0$

∴ $\underline{x-a \text{ 是 } f(x) \text{ 的因式}}$。

**(b)** 利用除法可得

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)(9x^2-4)\\&=\underline{\underline{(x-a)(3x-2)(3x+2)}}\end{aligned}$$

**15. (a)** $G(x)=(x+k+1)(x+k)-1$

∵ 餘數 $=1$

∴ $G(k)=1$

即 $(k+k+1)(k+k)-1=1$

$$(2k+1)(2k)-1=1$$

$$4k^2+2k-2=0$$

$$2k^2+k-1=0$$

$$(k+1)(2k-1)=0$$

$$k=\underline{\underline{-1}} \text{ 或 } \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$$

**(b)** 當 $k=-1$ 時，

$$\begin{aligned}G(x)&=x(x-1)-1\\G(-2)&=-2(-2-1)-1\\&=5\end{aligned}$$

當 $k=\frac{1}{2}$ 時，

$$G(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$$

$$\begin{aligned}G(-2)&=\left(-2+\frac{3}{2}\right)\left(-2+\frac{1}{2}\right)-1\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

習題 7F 題解（續）

$\therefore$ $G(x)$ 除以 $x+2$ 所得的餘數的可能值是 5 和 $-\frac{1}{4}$。

## 習題 7G （第 23 頁）

### 選題指引

| 類型 | 目的 |
|---|---|
| ① | 求多項式的 H.C.F. 和 L.C.M.。 |

| 類型 | 程度一題目 | 程度二題目 |
|---|---|---|
| ① | 1 – 5 | 6 – 10 |

**1.** H.C.F. $= a^3b^3c$

L.C.M. $= a^4b^5c^2$

**2.** $4x^3y^2z = 2^2x^3y^2z$

$6xy^4z^3 = 2\cdot3\cdot xy^4z^3$

$\therefore$ H.C.F. $= 2xy^2z$

L.C.M. $= 12x^3y^4z^3$

**3.** $4xy^2z^3 = 2^2xy^2z^3$

$6x^3y = 2\cdot3\cdot x^3y$

$8y^3z^2 = 2^3y^3z^2$

$\therefore$ H.C.F. $= 2y$

L.C.M. $= 24x^3y^3z^3$

**4.** H.C.F. $= a+b$

L.C.M. $= (a+b)(a-b)(a-2b)$

**5.** $6(x+1)(x-2) = 2\cdot3\cdot(x+1)(x-2)$

$9(x-1)(x-2) = 3^2(x-1)(x-2)$

$\therefore$ H.C.F. $= 3(x-2)$

L.C.M. $= 18(x+1)(x-2)(x-1)$

**6.** $4x-2y = 2(2x-y)$

$3(y-2x)^2 = 3(2x-y)^2$

$\therefore$ H.C.F. $= 2x-y$

L.C.M. $= 6(2x-y)^2$

**7.** $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

$x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$

$\therefore$ H.C.F. $= x-1$

L.C.M. $= (x-1)(x-3)(x+4)$

**8.** $m^2(m^2-1) = m^2(m+1)(m-1)$

$m^2-2m+1 = (m-1)^2$

$\therefore$ H.C.F. $= m-1$

L.C.M. $= m^2(m-1)^2(m+1)$

**9.** $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$\therefore$ H.C.F. $= a-b$

L.C.M. $= (a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)$

**10.** $p^2+2pq+q^2 = (p+q)^2$

$p^2-q^2 = (p+q)(p-q)$

$p^3+q^3 = (p+q)(p^2-pq+q^2)$

$\therefore$ H.C.F. $= p+q$

L.C.M. $= (p-q)(p+q)^2(p^2-pq+q^2)$