普通高等教育“十二五”规划教材

Mathematics

丁殿坤　吕端良　边平勇　张相虎　主编

大学数学
辅导教程

（高等数学）

上册

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

省级精品课程辅导教材
考研辅导教材

大学数学辅导教程

（高等数学）

上　册

主　编
丁殿坤　吕端良　边平勇　张相虎
副主编
张　宁　王　娟　彭　丽

上海交通大学出版社

内容提要

本书分上、下两册，上册为高等数学部分，共8章：第1章函数、极限与连续；第2章一元函数微分学；第3章一元函数积分学；第4章向量代数与空间解析几何；第5章多元函数微分学；第6章多元函数积分学；第7章无穷级数；第8章微分方程．每章都有知识点梳理，题型归类与方法分析，同步测试题，书末附有参考答案．本书主要是作为本科生大学数学辅导教材，也可以作为本科生参加研究生入学考试的指导书，及高校数学教师的考研辅导教材和教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学辅导教程．上／丁殿坤等主编．—上海：
上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10485-4

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①丁…　Ⅲ．①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第257027号

大学数学辅导教程
(高等数学)
上　册

主　　编：丁殿坤　吕端良　边平勇　张相虎
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海交大印务有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　　印　　张：13
字　　数：291千字
版　　次：2013年11月第1版　　印　　次：2013年11月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10485-4/O
定　　价：28.00元

前言

大学数学是高等学校各专业重要的公共基础课，是培养学生抽象思维、逻辑推理、空间想象能力和科学的计算能力以及应用知识能力必不可少的一门课程，也是进一步学习现代科学知识的必修课. 它不但广泛地应用于自然科学和工程技术，而且已经渗透到生命科学、经济科学和社会科学等众多的领域，乃至行政管理和人们的日常生活中，所以，能否应用数学观念定量思维已经成为衡量民族文化素质的一个重要标志，正如马克思所说："一门科学只有成功的运用数学时，才算达到了完善的地步."

高等数学、线性代数、概率论与数理统计是大学数学的三个组成部分，也是理工、经济类学生报考硕士研究生必考的重要课程. 本书编者所授大学数学课程为省级精品课程，同时作者主持的《大学数学考研辅导与团队建设研究》是创新基金项目. 多年来考研数学辅导教学团队认真研究大学数学的教学内容和教学方法，认真总结举办考研数学辅导的经验，根据学生的知识结构，结合教学实践编写了《大学数学辅导教程》一书.

本书具有如下特点：将知识点进行了系统小结与归类，题型多样，技巧多变；对解题方法进行了归纳，使难题的解决有法可循；题目选择、题型的归纳都是依据多年对考研题目的研究所成，其知识的多样性、灵活性、技巧性、综合性等在书中都体现出来了.

在编写和出版该书的过程中得到了有关领导的大力支持和帮助，在此一并表示感谢.

囿于水平，加之时间仓促，书中存在的错误和不当之处，恳请读者批评指正.

编　者

2013 年 9 月

目录

第 1 章　函数　极限与连续

函数是高等数学的研究对象，极限的思想方法是研究与讨论函数的一种重要方法，其思想理念贯彻于高等数学始终，理解函数的概念，掌握极限的概念及计算是学好高等数学的基础.

本章重点：

(1) 函数的概念及几何特征.

(2) 反函数、复合函数、初等函数.

(3) 极限的概念与性质.

(4) 极限的运算法则.

(5) 极限存在准则、两个重要极限.

(6) 无穷小的概念、性质与比较.

(7) 连续与间断.

(8) 闭区间上连续函数的性质.

1.1　函数

1.1.1　知识点梳理

(1) 函数定义，函数的定义域、值域，函数的特性，即奇偶性、有界性、周期性、单调性.

① 函数概念的本质是函数的要素：定义域、对应法则、值域.

② 定义域是自变量和因变量能相互构成函数的条件，对应法则是正确理解函数概念的关键.

③ 两个函数，当其定义域相同，对应法则相同时，此二函数是同一个函数.

④ 函数的有界性和单调性与函数所讨论的区间密切相关.

⑤ 具有奇偶性的函数的定义域一定是关于原点对称的.

⑥ 周期性在通常情况下指的是函数的最小正周期，但不是任何周期函数都具有最小正周期.

(2) 复合函数，分段函数，反函数，初等函数.

① 函数的复合是有条件的,并不是任何两个函数都可以进行复合.

② 通常分段函数不是初等函数,因为它不能用一个式子来表达,但也有特例,如 $f(x)=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}$ 是分段函数,也是初等函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$.

1.1.2 题型归类与方法分析

题型1 函数奇偶性的判别

【方法分析】

函数奇偶性的判定

(1) 按照函数奇偶性的定义.

(2) 奇偶性函数的运算:如奇函数的导数是偶函数,非常数偶函数的导数是奇函数等.

(3) 任意函数均可唯一分解为一个奇函数与一个偶函数之和.

注意: 若函数的定义域不关于原点对称,则无奇偶性可言.

例1 选择题

(1) 在同一对称区间上奇函数与偶函数之和是(　　).

A. 奇函数　　　　B. 偶函数

C. 非奇函数非偶函数　　　　D. 以上均有可能

【解】 此题的答案是D.

【结论】 两个奇函数的和是奇函数,两个偶函数的和是偶函数;两个奇函数的积是偶函数,两个偶函数的积是偶函数;一个奇函数一个偶函数的积为奇函数,一个奇函数一个偶函数的和不能确定.

(2) 任何对称区间上的函数 $f(x)$,有结论(　　)成立.

A. 可分解成一个奇函数一个偶函数之和,分解式不唯一

B. 可分解为一个奇函数一个偶函数之和,分解式唯一

C. 不能总分解为一个奇函数一个偶函数之和

D. 任何时候也不能分解为一个奇函数一个偶函数之和

【解】 此题的答案是B,下面证明此结论:

设 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$, 则 $f(x)=g(x)+h(x)$, 并且 $g(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数,若分解式有另外的形式,不妨设 $f(x)=p(x)+q(x)$, 其中 $p(x)$ 为奇函数, $q(x)$ 为偶函数,则由 $\begin{cases}f(x)=p(x)+q(x)\\ f(-x)=-p(x)+q(x)\end{cases}$ 联立可得:

$p(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $q(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$, 说明分解式一定唯一.

(3) 设 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}(x\in\mathbf{R})$ 是(　　)函数.

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

【解】 此题的答案是D.

显然 $f(x)$ 是 $|x\sin x|$ 和 $\mathrm{e}^{\cos x}$ 的乘积,而 $|x\sin x|$ 和 $\mathrm{e}^{\cos x}$ 都是偶函数,偶函数与偶函数的乘积一定为偶函数.

例2 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}x(1-x) & x>0\\ x(1+x) & x<0\end{cases}$.

【解】 (1) 用定义判断, $x\in\mathbf{R}$

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 用定义判定:

当 $x>0$ 时, $f(-x)=-x(1-x)=-f(x)$;

当 $x<0$ 时, $f(-x)=-x(1+x)=-f(x)$.

所以 $f(x)$ 为奇函数.

题型2　有关函数的定义域、值域的相关判定

【方法分析】

(1) 要求函数的定义域要严格按照函数的对应法则.

(2) 若两个函数在实质上定义域相同,对应法则相同,则此两函数是同一函数.

(3) 实际问题要从实际出发考虑自变量的取值范围.

例3 选择题

(1) 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,且 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$,则与 $f(x)$ 相同的函数是(　　).

A. $\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$　　C. $\int f'(x)\mathrm{d}x$　　D. $\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$

【解】 此题的答案是B.

由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,在 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 的两边令 $x\to1$ 取极限,可以得到 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$,从而 $f(x)=x^2-2x$,答案选B.

C答案是不定积分,结果是一个原函数组,D答案的定义域有限制.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant1\\ 2 & 1<x\leqslant2\end{cases}$,则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域为(　　).

A. 空集　　B. $[0,2]$　　C. $[0,4]$　　D. $[2,4]$

【解】 此题答案是A.由 $f(x)$ 的表达式知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$,故 $f(2x)$ 的定义域为 $x\in[0,1]$, $f(x-2)$ 的定义域为 $x\in[2,4]$,而 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 为一个表达式, $g(x)$ 的定义域应该为两个函数定义域的交集,故 $g(x)$ 的定义域为空集.

题型 3　有关函数有界性的证明

【方法分析】

证明函数有界时一定要注意给出的函数的定义域,若没有给出定义域则要事先说明它的定义域.

例 4　试证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【证明】

令 $g(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,则 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}g(x)$,显然 e^{-x^2} 为偶函数.

$g(-x)=\int_0^{-x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-u}\int_0^x(-u)\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}(-u)=g(x)$,可知 $g(x)$ 为偶函数,从而 $f(x)$ 亦为偶函数,只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界即可:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

由极限的定义,取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, $\exists X>0$,当 $x>X$ 时有 $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,即当 $x\in(X,+\infty)$ 时 $|f(x)|<1$, $f(x)$ 在 $x\in(X,+\infty)$ 上有界,又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续,闭区间上的连续函数一定有界, $\exists l>0$,对 $\forall x\in[0,X]$ 有 $|f(x)|<l$,取 $M=\max\{l,1\}$,当 $x\in[0,+\infty)$ 时有 $|f(x)|<M$,根据 $f(x)$ 为偶函数同理可以得到 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上也一定有界.

综上可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【分析】　此题目涉及 3 个知识点,函数的奇偶性、函数的极限、由函数极限的定义得到的局部有界性,此题大有考研题的风范,考研的题目一般会涉及 2~3 个知识点.

1.2　极限

1.2.1　知识点梳理

1) 有关极限的定义

(1) 极限分为:数列的极限($\varepsilon-N$ 定义);函数的极限($\varepsilon-X$ 定义和 $\varepsilon-\delta$ 定义).

(2) 函数的极限存在与单侧极限存在之间的关系.

2) 极限的有关定理

(1) 极限的唯一性:收敛数列的极限是唯一的,与函数的极限有相同的性质.

(2) 收敛数列的有界性:收敛数列必有界,反之不然.

(3) 子数列收敛性：如数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则 $\{x_n\}$ 的任意子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a，反之亦然.

(4) 局部保号性：如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 $\delta>0$，使当 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 时，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

(5) 保持不等式性质：若在 x_0 的附近成立 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $A\leqslant B$.

(6) 函数极限与数列极限的关系：如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对任何趋向于 x_0 的数列 $x_n\to x_0$ 且 $x_n\neq x_0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，当 $x_0=\infty$ 时，命题也成立.

3）极限的运算法则

(1) 极限的四则运算.

(2) 极限的复合运算：如 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的附近 $\varphi(x)\neq u_0$，又 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，令 $u=\varphi(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

4）极限存在的两个准则和两个重要极限

(1) 夹逼准则：适用于数列的极限和函数的极限.

(2) 单调有界准则：单调递增有上界或单调递减有下界的数列必有极限.

(3) 两个重要极限：若 $\lim\varphi(x)=0$ 且 $\varphi(x)\neq0$，则 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，$\lim\,[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

5）无穷小与无穷大

(1) 无穷小量与无穷大量的定义.

(2) 无穷小与无穷大的关系.

(3) 无穷小的比较：高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、k 阶无穷小和等价无穷小.

(4) 无穷小的性质.

(5) 常用的等价无穷小：

当 $\varphi(x)\to0$ 时，$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$\ln[1+\varphi(x)]\sim\varphi(x)$；$\log_a[1+\varphi(x)]\sim\dfrac{1}{\ln a}\varphi(x)$；$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$；$1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{1}{2}\varphi^2(x)$；$\mathrm{e}^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$；$a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\ln a$；$[1+b\varphi(x)]^a-1\sim ab\varphi(x)$.

注意：必须指出的是在无穷小的替代时，只有分子分母中的乘积因子能替代，而函数中的加减运算的项不能替代.

6）求极限的方法归纳

① 极限的定义；② 左右极限与极限存在的关系；③ 洛必达法则；④ 两个重要极限；⑤ 极限存在的两个准则；⑥“抓大头”法；⑦ 等价无穷小因子替换；⑧ 利用极限的四则运算法则和幂指函数的极限运算法则；⑨ 整体变量替换；⑩ 数列的极限转化为函数的极限；⑪ 利用函数的连续性；⑫ 利用导数的定义求极限；⑬ 利用定积分的定义求 n 项和式的极限；⑭ 利用泰勒公式求极限；⑮ 利用收敛级数的通项趋于 0 的性质求极限.

1.2.2 题型归类与方法分析

题型 4 有关极限的定义与性质

【方法分析】

极限的定义与性质详见常考的知识点中的叙述.

例 5 若数列 $\{x_n\}$ 有极限 a，则在 a 的某 ε 邻域之外，数列 $\{x_n\}$ 的点有( ).

A. 不存在　　B. 必定无限多个

C. 至多有有限多个　　D. 可以有有限个也可以有无限个

【解】 答案为 C.

此题考查的是数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时总有 $|x_n-a|<\varepsilon$，说明在 a 的某 ε 邻域之外至多有数列的有限个点，而在 a 的某 ε 邻域之内有数列的无数个点.

例 6 若 $f(x)>\varphi(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$，则必有( ).

A. $A>B$　　B. $A\geqslant B$　　C. $|A|>B$　　D. $|A|\geqslant|B|$

【解】 答案为 B.

此题考查的是函数极限保持不等式性质，不论条件是 $f(x)>\phi(x)$ 还是 $f(x)\geqslant\phi(x)$ 结论都是一样的 $A\geqslant B$.

如：当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2x}$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$.

例 7 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则下列极限一定存在的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\alpha}$($\alpha$ 为实数)　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$

【解】 答案为 B.

不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\varepsilon-\delta$ 定义为：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，而有绝对值不等式性质 $||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$ 极限值存在，反之不一定成立，然而有一个特殊情况：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ 是等价的.

题型 5 判定数列或函数的极限是否存在

【方法分析】

(1) 在求极限时特别是自变量 $x\to\infty$ 时，要注意包括 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 方向.

(2) 若题目中含有根号，要注意根号下总是大于等于零的.

例 8 函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{1-x}$，当 $x\to1$ 时的极限值为( ).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. 0　　D. 不存在

【解】 答案为D.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{1-x}=-\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 当 $x\to1$ 时的极限值不存在.

例9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=(\quad)$.

A. 2　　B. -2　　C. ±2　　D. 不存在

【解】 答案为D.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=2$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=-2$ 所以极限不存在.

题型6　有关无穷小与无穷大的关系及无穷小的阶的比较

【方法分析】

(1) 非零无穷小的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小.

(2) 无穷小和无穷大的性质详见常考知识点.

(3) 注意无穷大量与无界量的区别与联系.

例10 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，则当 $x\to0$ 时,一定是无穷小的是(　　).

A. $xf(x)$　　B. $f(x)-x$　　C. $\frac{x}{f(x)}-x$　　D. $f(x)-\frac{1}{x}$

【解】 答案为C.

此题考查的是无穷小与无穷大的性质：① 非0无穷小的倒数是无穷大,无穷大的倒数是无穷小;② 有限个无穷小的和、差、积还是无穷小;③ 有界量与无穷小量的乘积还是无穷小.

例11 两无穷小量 α 与 β 之和 $\alpha+\beta$(　　).

A. 仍为无穷小量且至少与 α, β 中的一个同阶

B. 仍为无穷小量且比 α, β 的阶数高

C. 仍为无穷小量且可能比 α, β 的阶数低

D. $\alpha+\beta$ 不一定是无穷小量

【解】 答案为A.

两个无穷小量的和仍为无穷小量,排除D,先设 α, β 是同价的无穷小,则 $\lim\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=$ 常数且 $\lim\frac{\alpha+\beta}{\beta}=$ 常数;再不妨设 α 是 β 的高阶无穷小记 $\alpha=o(\beta)$，则 $\lim\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\lim\frac{o(\beta)+\beta}{\beta}=1$ 所以 $\alpha+\beta$ 至少与 α, β 中的一个同阶.

题型 7　求数列或函数的极限

【方法分析】

详见常考知识点中求极限的方法归纳.

例 12　设 $a_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,k)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.

【解】　记 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则有 $M\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{kM^n}=M\sqrt[n]{k}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}M=\lim\limits_{n\to\infty}M\sqrt[n]{k}=M(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1)$，由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=M$.

例 13　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{x}$.

【解】　此为分式的极限，分子 x 的次数为 $\dfrac{15}{16}$，分母 x 的次数为 1，由"抓大头"法可知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{x}=0$.

注意：所谓"抓大头"法指的是：若所求的极限为分式的形式，分子和分母的极限都是趋向于 ∞，那么我们就来比较分子和分母的变量的最高次幂的系数：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & m>n\\ \dfrac{a_n}{b_m} & m=n,\\ \infty & m<n\end{cases}$$

其中 m,n 为正整数，且 $a_n\neq0$，$b_m\neq0$，此规则也适用于数列的极限.

例 14　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

【解】

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{2}=1.$$

例 15　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2})$.

【解】

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2})(\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{1+x+x^2})}{\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{1+x+x^2}}(x\text{ 是正的,分子分母同除以 }x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{3}{x}+1}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

注意: 在求极限时,经常会碰到各种障碍,使四则运算法则不能直接应用,例如 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 等不定型,此时需要先进行适当的恒等变换以消除这些障碍,使四则运算能顺利地运用,经常用到的方法有:① 对 $\frac{0}{0}$ 型,通常可通过因式分解、分子或分母有理化、三角恒等式等手段约去使分母的极限为零的非零因子从而消除障碍;② 对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,分子分母同除以他们的代数和中的最高阶无穷大因子;③ 对 $\infty-\infty$ 型,经通分或分子有理化等后可化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

例 16　求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$.

【解法一】　$\frac{0}{0}$ 型,可以先变形再利用等价无穷小的代换:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sin x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

【解法二】

$\frac{0}{0}$ 型,可以先利用等价无穷小代换再利用洛必达法则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1.$$

例 17 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}$.

【解】

$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(1-x)]^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}x}}=\lim\limits_{x\to 1}\{[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}\}^{\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}}$，而 $\lim\limits_{x\to 1}[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}=e$，作变换 $1-x=y$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\cos\frac{\pi}{2}(1-y)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin\frac{\pi y}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$，所以，原式 $=e^{\frac{2}{\pi}}$.

例 18 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\ (x\neq 0)$.

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

例 19 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$.

【解】 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用等价无穷小代换：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$，而 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-x}{x}=-1$ 左右极限不相等，所以原式的极限不存在.

例 20 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(x+1)}$.

【解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)}=\frac{3+0}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

注意：在无穷小的替代时，只有对分子分母中的乘积因子才能替代，而对函数中的加减运算的项是不能替代的.

例 21 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$.

【解】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}+e^x+xe^x-4e^{2x}+2e^x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+4xe^{2x}+e^x+xe^x-6e^{2x}+3e^x}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+8xe^{2x}+e^x+xe^x-8e^{2x}+4e^x}{6}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 22 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

【解】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注意：① 在运用洛必达法则时，首先要验证是否是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型；② 检查函数式中是否存