国家特色专业建设点资金资助
河南省自然科学研究资金资助

奇异粗糙集理论与方法

郭志林 著

中国农业科学技术出版社

国家特色专业建设点资金资助
河南省自然科学研究资金资助

奇异粗糙集理论与方法

郭志林 著

中国农业科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

奇异粗糙集理论与方法／郭志林著.—北京：中国农业科学技术出版社，2013.7

ISBN978－7－5116－1324－0

Ⅰ.①奇…　Ⅱ.①郭…　Ⅲ.①集论－研究　Ⅳ.①O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 148492 号

责任编辑　徐　毅　姚　欢

责任校对　贾晓红

出 版 者　中国农业科学技术出版社

北京市中关村南大街 12 号　邮编：100081

电　　话　（010）82106636（编辑室）（010）82109702（发行部）

（010）82109709（读者服务部）

传　　真　（010）82106636

网　　址　http：//www. castp. cn

经 销 者　各地新华书店

印 刷 者　北京富泰印刷有限责任公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　17.75

字　　数　300 千字

版　　次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷

定　　价　52.00 元

内容简介

本书在传统粗糙集（Z. Pawlak 粗糙集）理论的基础上，系统介绍了具有动态特性和随机特征的奇异粗糙集的基本内容和方法. 主要内容包括：奇异粗糙集的基本概念、性质，奇异粗糙集的不确定性度量，奇异粗糙集的各种推广模型，奇异粗糙集与其他处理不确定或不精确问题理论的联系以及奇异粗糙集在数据筛选—过滤、系统状态检测、信息图像加密等不完备信息系统下的粗糙集方法.

本书可作为应用数学、金融数学、计算机科学、信息科学、自动控制和管理工程等专业的高年级学生及研究生教材，也可作为研究粗糙集理论与方法的科技人员的参考书.

前　言

随着计算机和网络信息技术的飞速发展，使得各个领域的数据和信息急剧增加. 面对日益增长的数据库，如何从这些浩瀚的数据中找出有用的信息？粗糙集理论与方法不失为一种有效的方法. 因为它与概率方法、模糊集方法和证据理论方法等其他处理不确定性问题理论最显著的区别是它无需提供问题所需处理的数据之外的任何先验信息. 当然，由于该理论未能包含处理不精确或不确定原始数据的机制，所以与其他处理不确定性问题的理论有很强的互补性.

粗糙集理论是波兰数学家 Z. Pawlak 于 1982 年提出的一种数据分析理论，其基本思想是在保持分类能力不变的前提下，通过知识约简，导出概念的分类规则. Z. Pawlak 粗糙集是以元素等价类定义的，是一个具有态特征的元素集合的粗集. 随着现代信息技术的发展，数据库的更新日趋迅速，动态特性越来越明显，面对具有动态特性的信息系统，2002 年，史开泉对 Z. Pawlak粗糙集进行了改进，给出元素动态等价类的概念，提出了 S－粗集. S－粗集具有动态特性，却不具有随机特征. 本书将元素迁移的动态特性与随机特征相结合，系统地介绍了奇异粗糙集理论的基本内容与方法. 同时，将粗糙集与模糊集、粗糙集与属性集相结合，为研究多变的金融系统、投资系统、决策分析系统、动态数据挖掘、动态知识发现等方面提供了理论支持和新的研究思路.

本书是作者近几年在国内外发表的 30 余篇学术论文的基础上完成的. 内容共分六章：第一章简单介绍了 Pawlak 粗糙集，作为本书的概念、研究思路的导引；第二、第三章是对 S－粗糙集、函数 S－粗糙集的讨论，主要将元素迁移的概率特性引入到 S－粗糙集、函数 S－粗糙集中，讨论了 S－粗糙集的概率特性、S－粗糙集的不确定性度量、函数 S－粗糙集的规律生成、函数 S－粗糙集的积分度量及在系统状态检测中的应用；第四章、第

五章给出了 IS－粗糙集的讨论，包括 IS－粗糙集、变精度 IS－粗糙集的结构及性质、IS－粗糙集的精度、IS－粗糙集的随机生成及基于 IS－粗集的信息加密等；第六章是属性粗糙集模型，包括属性测度的性质、属性粗糙集的粗糙性度量及 S－属性粗糙集的结构与性质等. 本书仅是动态粗糙集理论研究的开始，本书涉猎的内容具有良好的后继应用前景.

本书得到国家特色专业建设点、河南省自然科学基础研究、商丘师范学院申硕学科的资金支持，得到商丘师范学院数学与信息科学学院领导和同事的大力支持，在此谨表衷心的感谢.

鉴于作者从事粗糙集领域的研究工作时间较短，加之自身学识浅陋，书中存在错误或不妥之处在所难免，敬请同行给予批评、指正.

郭志林

2012 年 6 月

目　录

第一章 Pawlak 粗糙集的基本概念

粗糙集(Rough sets)理论是一种新的处理模糊和不确定性知识的数学工具. 其主要思想就是在保持分类能力不变的前提下, 通过知识约简, 导出问题的决策或分类规则. 目前, 粗糙集理论已被成功地应用于机器学习、决策分析、过程控制、模式识别与数据挖掘等领域. 本章介绍标准粗糙集理论(Pawlak 粗糙集模型)的基本概念, 作为后面各章节的基础.

§ 1.1 知识与知识库

设 $U \neq \phi$ 是我们感兴趣的对象组成的有限集合, 称为论域. 任何子集 $X \subseteq U$, 称为 U 中的一个概念或范畴. 为规范化起见, 我们认为空集也是一个概念. U 中的任何概念族称为关于 U 的抽象知识, 简称知识. 本书主要是对在 U 上能形成划分的那些知识感兴趣. 一个划分 ℓ 定义为: $\ell = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$; $X_i \subseteq U$, $X_i \neq \phi$, $X_i \cap X_j = \phi$, 对于 $i \neq j$, $i, j = 1,2,\cdots,n$; $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = U$. U 上的一族划分成为关于 U 的一个知识库.

设 R 是 U 上的一个等价关系, U/R 表示 R 的所有等价类(或者 U 上的分类)构成的集合, $[x]_R$ 表示包含元素 $x \in U$ 的 R 等价类. 一个知识库就是一个关系系统 $K = (U, R)$, 其中 U 为非空有限集, 称为论域, R 是 U 上的一族等价关系.

若 $P \subseteq R$, 且 $P \neq \phi$, 则 $P \neq R$, 则 $\cap P$ (P 中所有等价关系的交集) 也是一个等价关系, 称为 P 上的不可区分关系, 记为 $ind(P)$, 且有

$$[x]_{ind(P)} = \bigcap_{R \in P} [x]_R \tag{1.1.1}$$

这样, $U / ind(P)$ (即等价关系 $ind(P)$ 的所有等价类) 表示与等价关系族 P 相

关的知识, 称为 K 中关于 U 的 P 基本知识(P 基本集). 为简单起见, 我们用 $\cap P$ 代替 $U/ind(P)$, $ind(P)$ 的等价类称为知识 P 的基本概念或基本范畴. 特别地, 如果 $Q \in R$, 则称 Q 为 K 中关于 U 的 Q 初等知识, Q 的等价类为知识 R 的 Q 初等概念或 Q 初等范畴.

事实上, P 基本范畴是拥有知识 P 的论域的基本特性. 换句话说, 它们是知识的基本模块.

同样, 我们也可定义: 当 $K=(U,R)$ 为一个知库, $ind(K)$ 中所有等价类的族, 记作

$$ind(K)=\{ind(P) | \phi \neq P \subseteq R\} \tag{1.1.2}$$

例 1.1.1 给定一玩具积木的集合 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$, 并假设这些积木有不同的颜色(红、黄、蓝), 形状(方、圆、三角), 体积（小, 大）. 因此, 这些积木都可以用颜色、形状、体积这些知识来描述. 例如一块积木可以是红色、小而圆的, 或黄色、大而方的等. 如果我们根据某一属性描述这些积木的情况, 就可以按颜色、形状、体积分类.

按颜色分类:

x_1,x_3,x_7 —红;

x_2,x_4 —蓝;

x_5,x_6,x_8 —黄.

按形状分类:

x_1,x_5 —圆;

x_2,x_6 —方;

x_3,x_4,x_7,x_8 —三角.

按体积分类:

x_2,x_7,x_8 —大;

x_1,x_3,x_4,x_5,x_6 —小.

换言之, 我们定义三个等价类关系(即属性): 颜色 R_1, 形状 R_2 和体积 R_3, 通过这些等价关系, 可以得到下面三个等价类:

$$U/R_1=\{\{x_1,x_3,x_7\},\{x_2,x_4\},\{x_5,x_6,x_8\}\},$$

$$U/R_2=\{\{x_1,x_5\},\{x_2,x_6\},\{x_3,x_4,x_7,x_8\}\},$$

$$U/R_3=\{\{x_2,x_7,x_8\},\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}\},$$

这些等价类是由知识库 $K=(U,\{R_1,R_2,R_3\})$ 中的初等概念(初等范畴)构成的.

基本范畴是初等范畴的交集构成的, 例如下列集合:

$$\{x_1,x_3,x_7\}\cap\{x_3,x_4,x_7,x_8\}=\{x_3,x_7\},$$

$$\{x_2,x_4\}\cap\{x_2,x_6\}=\{x_2\},$$

$$\{x_5,x_6,x_8\}\cap\{x_3,x_4,x_7,x_8\}=\{x_8\},$$

他们分别为 $\{R_1,R_2\}$ 的基本范畴, 即: 红色三角形, 蓝色方形, 黄色三角形.

下列集合:

$$\{x_1,x_3,x_7\}\cap\{x_3,x_4,x_7,x_8\}\cap\{x_2,x_7,x_8\}=\{x_7\},$$

$$\{x_2,x_4\}\cap\{x_2,x_6\}\cap\{x_2,x_7,x_8\}=\{x_2\},$$

$$\{x_5,x_6,x_8\}\cap\{x_3,x_4,x_7,x_8\}\cap\{x_2,x_7,x_8\}=\{x_8\}.$$

他们分别为 $\{R_1,R_2,R_3\}$ 的基本范畴, 即: 红色大三角形, 蓝色大方形, 黄色大三角形.

下列集合:

$$\{x_1,x_3,x_7\}\cup\{x_2,x_4\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_7\},$$

$$\{x_2,x_4\}\cup\{x_5,x_6,x_8\}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_8\},$$

$$\{x_1,x_3,x_7\}\cup\{x_5,x_6,x_8\}=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8\}.$$

他们分别为 $\{R_1\}$ 的范畴, 即: 红或蓝(非黄), 蓝或黄(非红), 红或黄(非蓝).

注 有些范畴在这个知识库中是无法得到的, 例如集合:

$$\{x_2,x_4\}\cap\{x_1,x_5\}=\phi,$$

$$\{x_1,x_3,x_7\}\cap\{x_2,x_6\}=\phi$$

为空集, 也就是说, 在我们的知识库中不存在蓝色圆形和红色方形的范畴, 即为空范畴.

下面讨论两个知识库之间的关系.

令 $K=(U,P)$ 和 $K'=(U,Q)$ 为两个知识库. 若 $ind(P)=ind(Q)$, 即 $U/P=U/Q$, 则 K 和 K' (P 和 Q) 是等价的, 记作

$$K\approx K'(P\approx Q) \tag{1.1.3}$$

因此, 当 K 和 K' 有同样的基本范畴集时, 知识库 K 和 K' 中知识都能使我们确切地表达关于论域的完全相同的事实.

这个概念意味着可以用不同的属性集对对象进行描述, 以表达关于论域的完全相同的事实.

对于 $K=(U,P)$ 和 $K'=(U,Q)$ 两个知识库, 当 $ind(p)=ind(Q)$ 时, 我们称知识

P（知识库 K）比知识 Q（知识库 K'）更精细，或者说 Q 比 P 更粗糙. 当 P 比 Q 更精细时，我们也称 P 为 Q 的特化， Q 为 P 的推广. 这意味着，推广是将某些范畴组合在一起，特化则是将范畴分割成更小的单元.

§1.2 不精确范畴，近似与粗糙集

令 $X \subseteq U$，R 为 U 上的一个等价类. 当 X 能表达成某些 R 基本范畴的并时，称 X 是 R 可定义的；否则称 X 为 R 不可定义的.

R 可定义集是论域 U 的子集，它可在知识库 K 中精确地定义，而 R 不可定义集不能在这个知识库中定义. R 可定义集也称作 R 精确集，而 R 不可定义集也称为 R 非精确集或 R 粗糙集.

当存在等价关系 $R \in ind(K)$ 且 X 为 R 精确集时，集合 $X \subseteq U$ 称为 K 中的精确集； 当对于任何 $R \in ind(K)$，X 都为 R 粗糙集，则 X 称为 K 中的粗糙集.

对于粗糙集可以近似地定义，我们使用两个精确集，即粗糙集的上近似和下近似来描述.

给定知识库 $K=(U,R)$，对于每个子集 $X \subseteq U$ 和一个等价关系 $R \in ind(K)$，定义两个子集：

$$\underline{R}X = \bigcup\{Y \in U/R \mid Y \subseteq X\} \tag{1.2.1}$$

$$\overline{R}X = \bigcup\{Y \in U/R \mid Y \cap X \neq \phi\} \tag{1.2.2}$$

分别称它们为 X 的 R 下近似集和 R 上近似集.

下近似、上近似也可用下面的等式表达：

$$\underline{R}X = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\} \tag{1.2.3}$$

$$\overline{R}X = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \phi\} \tag{1.2.4}$$

集合 $bn_R(X) = \overline{R}X - \underline{R}X$ 称为 X 的 R 边界域；$pos_R(X) = \underline{R}X$ 称为 X 的 R 正域；$neg_R(X) = U - \overline{R}X$ 称为 X 的 R 负域. 显然：$\overline{R}X = pos_R(X) \cup bn_R(X)$.

$\underline{R}X$ 或 $pos_R(X)$ 是由那些根据知识 R 判断肯定属于 X 的 U 中元素组成的集合；$\overline{R}X$ 是那些根据知识 R 判断肯定属于 X 的 U 中元素组成的集合；$bn_R(X)$ 是那些根据知识 R 既不能判断肯定属于 X 又不能判断肯定属于 $\sim X$（即 $U-X$）的 U 中元素组成的集合；$neg_R(X)$ 是那些根据知识 R 判断肯定不属于 X 的 U 中元素

组成的集合.

下列性质是显而易件的.

定理 1.2.1

(1) X 为 R 可定义集当且仅当 $\underline{R}X = \overline{R}X$.

(2) X 为 R 粗糙集当且仅当 $\underline{R}X \neq \overline{R}X$.

我们可将 $\underline{R}X$ 描述为 X 中最大可定义集, 将 $\overline{R}X$ 描述为含有 X 的最小可定义集.

这样, 范畴就是可以用已知知识表达的信息项. 换句话说, 范畴就是用我们的知识可表达的具有相同性质的对象的子集. 一般地说, 在一给定的知识库中, 并不是所有对象子集都可以构成范畴(即用知识表达的概念). 因此, 这样的子集可以看作为粗范畴(即不精确或近似范畴), 它只能用知识通过两个精确范畴, 即上、下近似集粗略的定义.

从近似的定义, 我们可以直接得到 R 下近似集和上近似集的下列性质.

定理 1.2.2

(1) $\underline{R}X \subseteq X \subseteq \overline{R}X$.

(2) $\underline{R}\phi = \overline{R}\phi = \phi$, $\underline{R}U = \overline{R}U = U$.

(3) $\overline{R}(X \bigcup Y) = \overline{R}X \bigcup \overline{R}Y$.

(4) $\underline{R}(X \bigcap Y) = \underline{R}X \bigcap \underline{R}Y$.

(5) $X \subseteq U \Rightarrow \underline{R}X \subseteq \underline{R}Y$.

(6) $X \subseteq U \Rightarrow \underline{R}X \subseteq \overline{R}Y$.

(7) $\underline{R}(X \bigcup Y) \supseteq \underline{R}X \bigcup \underline{R}Y$.

(8) $\overline{R}(X \bigcap Y) \subseteq \overline{R}X \bigcap \overline{R}Y$.

(9) $\underline{R}(\sim X) = \sim \overline{R}X$.

(10) $\overline{R}(\sim X) = \sim \underline{R}X$.

(11) $\underline{R}(\underline{R}X) = \overline{R}(\underline{R}X) = \underline{R}X$.

(12) $\overline{R}(\overline{R}X) = \underline{R}(\overline{R}X) = \overline{R}X$.

证明 (1a) 设 $x \in \underline{R}X$, 则有 $[x] \subseteq X$; 而 $x \in [x]$, 所以 $x \in X$. 因此, $\underline{R}X \subseteq X$.

(1b) 设 $x \in X$,则 $[x] \cap X \neq \phi$,所以, $x \in \overline{R}X$.因此 $X \subseteq \overline{R}X$.

(2a) 由(1)知, $\underline{R}\phi \subseteq \phi$,而 $\phi \subseteq \underline{R}\phi$,因此 $\underline{R}\phi = \phi$.

(2b) 假设 $\overline{R}\phi \neq \phi$,则存在 x 使得 $x \in \overline{R}\phi$,即 $[x] \cap \phi \neq \phi$,而 $[x] \cap \phi \neq \phi$,与假设矛盾.因此, $\overline{R}\phi = \phi$.

(2c) 由(1)知, $\underline{R}U \subseteq U$.由因为当 $x \in U$,有 $[x] \subseteq U$,所以 $x \in \underline{R}U$,即

$U \subseteq \underline{R}U$,因此, $\underline{R}U = U$.

(2d) 由(1)知 $\overline{R}U \supseteq U$,但 $\overline{R}U \subseteq U$,因此 $\overline{R}U = U$.

(3)

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{R}(X \cup Y) &\Leftrightarrow [x] \cap (X \cup Y) \neq \phi \\
&\Leftrightarrow ([x] \cap X) \cup ([x] \cap Y) \neq \phi \\
&\Leftrightarrow ([x] \cap X) \neq \phi \vee ([x] \cap Y) \neq \phi \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{R}X \vee x \in \overline{R}Y \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{R}X \cup \overline{R}Y ,
\end{aligned}
$$

因此 $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}X \cup \overline{R}Y$.

(4)

$$
\begin{aligned}
x \in \underline{R}(X \cap Y) &\Leftrightarrow [x] \subseteq X \cap Y \\
&\Leftrightarrow [x] \subseteq X \wedge [x] \subseteq Y \\
&\Leftrightarrow \underline{R}X \cap \underline{R}Y ,
\end{aligned}
$$

因此 $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}X \cap \underline{R}Y$.

(5) 设 $X \subseteq U$,则 $X \cap Y = X$,所以 $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}X$.由(4)知,

$\underline{R}X \cap \underline{R}Y = \underline{R}X$,因此 $\underline{R}X \subseteq \underline{R}Y$.

(6) 设 $X \subseteq U$,则 $X \cup Y = Y$,所以 $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}Y$.由(3)知,

$\overline{R}X \cup \overline{R}Y = \overline{R}Y$,因此 $\overline{R}X \subseteq \overline{R}Y$.

(7) 因为 $X \subseteq X \cup Y$, $Y \subseteq X \cup Y$,所以 $\underline{R}X \subseteq \underline{R}(X \cup Y)$, $\underline{R}Y \subseteq \underline{R}(X \cup Y)$,故 $\underline{R}X \cup \underline{R}Y \subseteq \underline{R}(X \cup Y)$.

(8) 因为 $X \cap Y \subseteq X$, $X \cap Y \subseteq Y$,所以 $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}X$, $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}Y$,故 $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}X \cap \overline{R}Y$.

(9) 因为 $x \in \underline{R}X \Leftrightarrow [x] \subseteq X \Leftrightarrow [x] \cap \sim X = \phi$

$$\Leftrightarrow x \notin \bar{R}(\sim X) \Leftrightarrow x \in \sim \bar{R}(\sim X),$$

所以 $\underline{R}(\sim X) = \sim \overline{R}X$.

(10) 在(9)中用 $\sim X$ 代替 X ,即得 $\overline{R}(\sim X) = \sim \underline{R}X$.

(11a) 由(1)知, $\underline{R}(\underline{R}X) \subseteq \underline{R}X$.又当 $x \in \underline{R}X$ 时,有 $[x] \subseteq X$,因此, $\underline{R}[x] \subseteq \underline{R}X$.但 $\underline{R}[x] = [x]$,于是 $[x] \subseteq \underline{R}X$,所以 $x \in \underline{R}(\underline{R}X)$,即 $\underline{R}X \subseteq \underline{R}(\underline{R}X)$.故 $\underline{R}(\underline{R}X) = \underline{R}X$.

(11b) 由(1)知, $\underline{R}X \subseteq \underline{R}(\underline{R}X)$.又当 $x \in \overline{R}(\underline{R}X)$,有 $[x] \cap \underline{R}X \neq \phi$,即存在 $y \in [x]$ 使得 $y \in \underline{R}X$,所以 $[y] \subseteq X$,但 $[x] = [y]$,这样就有 $[x] \subseteq X$,即 $x \in \underline{R}X$,因此 $\underline{R}X \supseteq \overline{R}(\underline{R}X)$.故 $\underline{R}(\underline{R}X) = \underline{R}X$.

(12a) 由(1)知, $\overline{R}X \subseteq \overline{R}(\overline{R}X)$,又当 $x \in \overline{R}(\overline{R}X)$ 时,有 $[x] \cap \overline{R}X \neq \phi$.因此存在 $y \in [x]$ 且 $y \in \overline{R}X$,所以 $[y] \cap X \neq \phi$.但 $[x] = [y]$,所以 $[x] \cap X \neq \phi$,即 $x \in \overline{R}X$,这样就有 $\overline{R}X \supseteq \overline{R}(\overline{R}X)$.故 $\overline{R}(\overline{R}X) = \overline{R}X$.

(12b)由(1)知, $\underline{R}(\overline{R}X) \subseteq \overline{R}X$.又当 $x \in \overline{R}X$ 时有 $[x] \cap X \neq \phi$,所以 $[x] \subseteq \overline{R}X$ (因为任取 $y \in [x]$ 时,则有 $[y] \cap X = [x] \cap X \neq \phi$,即 $y \in \overline{R}X$),即 $x \in \underline{R}(\overline{R}X)$,这样就有 $\underline{R}(\overline{R}X) \supseteq \overline{R}X$.故 $\underline{R}(\overline{R}X) = \overline{R}X$.

集合近似的概念导致了一个新的概念——成员关系. 因为在我们的方法中, 对于一个集合的定义是与集合的知识相联系的, 所以成员关系一定也和知识有关, 可以形式地定义为

$$x \underline{\in}_R X \quad \text{当且仅当} \quad x \in \underline{R}X \tag{1.2.5}$$

$$x \overline{\in}_R X \quad \text{当且仅当} \quad x \in \overline{R}X \tag{1.2.6}$$

这里 $\underline{\in}_R$ 表示根据 R , x 肯定地属于 X ; $\overline{\in}_R$ 表示根据 R , x 可能属于 X . 分别称 $\underline{\in}_R$ 和 $\overline{\in}_R$ 为下和上成员关系.

成员关系依赖于我们的知识, 即一个对象是否属于一个集合依赖于我们的知识, 并且这不是绝对特性.

由定理 1.1.2 我们可以得到成员关系的性质:

定理 1.2.3

(1) $x \underline{\in} X$ 蕴涵 $x \in X$ 蕴涵 $x \overline{\in} X$;

(2) $X \subseteq Y$ 蕴涵($x \underline{\in} X$ 蕴涵 $x \underline{\in} Y$ 且 $x \overline{\in} X$ 蕴涵 $x \overline{\in} Y$);

(3) $x \overline{\in} (X \cup Y)$ 当且仅当 $x \overline{\in} X$ 或 $x \overline{\in} Y$;

(4) $x \underline{\in} (X \cap Y)$ 当且仅当 $x \underline{\in} X$ 且 $x \underline{\in} Y$;

(5) $x \underline{\in} X$ 或 $x \underline{\in} Y$ 蕴涵 $x \underline{\in} (X \cup Y)$;

(6) $x \overline{\in} (X \cap Y)$ 蕴涵 $x \overline{\in} X$ 且 $x \overline{\in} Y$;

(7) $x \underline{\in} (\sim X)$ 当且仅当 $x \overline{\in} X$ 不成立;

(8) $x \overline{\in} (\sim X)$ 当且仅当 $x \underline{\in} X$ 不成立.

为简单起见，我们省略了以上式子的下标 R .

集合(范畴)的不精确性是由于边界域的存在而引起的. 集合的边界域越大，其精确性则越低. 为了更精确地表达这一点，我们引入精度的概念. 由等价关系 R 定义的集合 X 的近似精度为

$$\alpha_R(X) = \frac{|\underline{R}X|}{|\overline{R}X|} \tag{1.2.7}$$

其中 $X \neq \phi$, $|X|$ 表示集合 X 的基数.

精度 $\alpha_R(X)$ 用来反映我们对于了解集合 X 的知识的完全程度. 显然，对每一个 R 和 $X \subseteq U$ 有 $0 \leqslant \alpha_R(X) \leqslant 1$. 当 $\alpha_R(X)=1$ 时，X 的 R 边界域为空集，集合 X 为 R 可定义的；当 $\alpha_R(X) < 1$ 时，集合 X 有非空 R 边界域，集合 X 为 R 的不可定义的.

当然，其他一些量度同样可用来定义集合 X 的不精确程度.

例如，可用 $\alpha_R(X)$ 的一些变形，即 X 的 R 粗糙度 $\rho_R(X)$ 来定义:

$$\rho_R(X) = 1 - \alpha_R(X) \tag{1.2.8}$$

X 的 R 粗糙度与精度恰恰相反，它表示的是集合 X 的知识的不完全程度.

我们可以看到，与概率论和模糊集合论不同，不精确性的数值不是事先假定的，而是通过表达知识不精确性的概念近似计算得到的，这样不精确性的数值表示的是有限知识(对象分类能力)的结果，这里我们不需要用一个机构来指定精