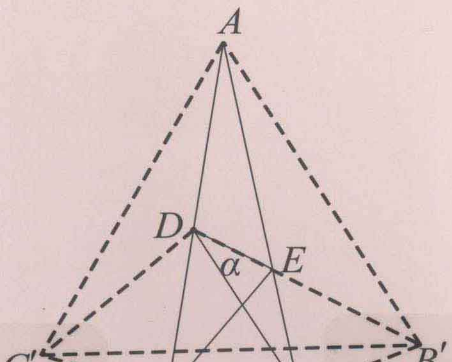
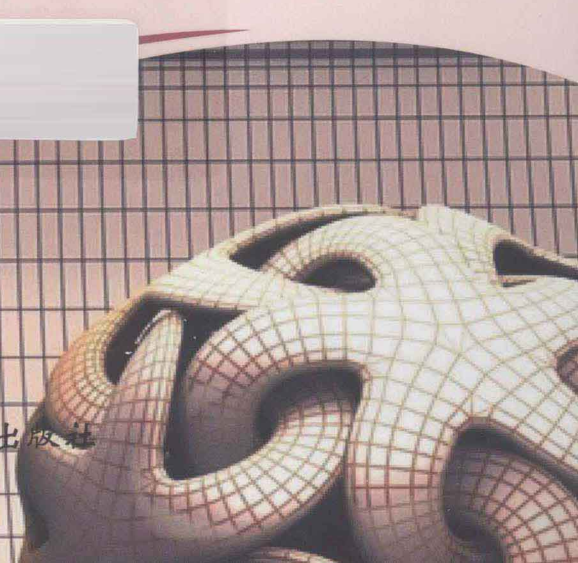
几何明珠

（第三版）

黄家礼◎编著



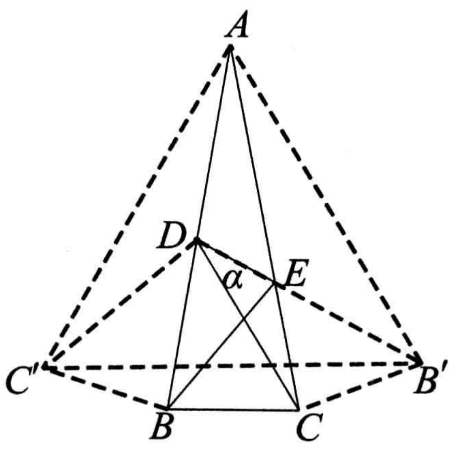


国家行政学院出版社

几何明珠

（第三版）

黄家礼◎编著



国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

几何明珠/黄家礼编著．—北京：国家行政学院出版社，2013.9

ISBN 978－7－5150－0965－0

Ⅰ.①几… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①平面几何—普及读物 Ⅳ.①O123.1－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第220780号

书　　名 几何明珠
作　　者 黄家礼
责任编辑 刘正刚　马刘艳
出版发行 国家行政学院出版社
（北京市海淀区长春桥路6号　100089）
（010）68920640　68929037
http://cbs.nsa.gov.cn
编 辑 部 （010）68928800
经　　销 新华书店
印　　刷 北京天正元印务有限公司
版　　次 2014年1月北京第1版
印　　次 2014年1月北京第1次印刷
开　　本 710毫米×1000毫米　16开
印　　张 16.5
字　　数 286千字
书　　号 ISBN 978－7－5150－0965－0
定　　价 39.00元

繁体版前言

欧几里得几何曾经被人认为是荣华已尽，走上了没落的道路．从19世纪末培利提出“欧几里得滚蛋”的口号以来，直至今天仍有人主张要在中学数学课程中取销它，并进行过种种尝试，但至今仍没有一个成功的例子．影响最大的如六十年代国外被称之为“新数运动”的中学数学教材改革，最终仍以失败告终．

尽管帕施(M. Pasch)和希尔伯特(D. Hilbert)通过公理体系的研究揭示了传统几何中所存在的缺陷，但几何“作为演绎科学的一种范例”和“教学法范例”至今还无法取代．

著名数学教育家弗赖登塔尔(Hans Freuden thal)说：几何作为一种思维训练，培养逻辑思维与形成演绎体系似乎是它的特权．作为一个逻辑体系，它使儿童深切感受到人类的一种精神力量，显示着人类卓越的智慧．爱因斯坦说：“世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以至它的每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何．”

当然，几何学不单纯是演绎理论，从最低的层次讲，它是对空间的理解，是关于现实物理空间的科学．为了生活得更好，我们就必须了解、探索、并征服我们所生存的空间．从这个意义讲，几何为我们提供了一个更深入理解和掌握的途径．并且，借助眼、耳、手等各种感官接触空间形态，可创造最好的引导机会，更有利于发现与创造，也符合教育家夸美纽斯(J. Comenius)的观点——打开各种感觉器官．

弗赖登塔尔还说，除了现成几何，还存在一种活动几何，这是按照教学原则，遵循认识规律，沿着认识活动的序，对几何学进行的“再创造”．他认为，学生的数学能力，不可能通过学习现成数学来培养，而应当通过活动数学来培养，他主张教学应从现成数学转向活动数学，通过“再创造”来学数学，让学者成为研究者．对

学生和数学家应同样看待，让他们拥有同样的权利，让他们参与基本的分析，以便让他们了解这些分析的砖块及最终究竟怎样建造大厦，向他们展示建造全过程．

应该说，这本集子所力图展示的正是这种“活动几何学”．它试图通过这些著名的几何命题来浓缩，将教材中那些刻板的、枯燥的公式、定理“活化”为一幅幅生动的历史画卷，为青少年朋友展示更广阔的知识视野，尽可能让他们知道这些知识产生的过程及背景．回顾历史，悠悠数千年，几何学的发展高潮迭起，蔚为壮观，它的每一圈“年轮”都凝聚着人类最富想象力的创造和探索，既有艰辛曲折，也有春华秋实．而这些，正是它作为“教学法范例”的精要部分，能让青少年朋友体会到数学家的探索历程和献身精神．

“学习数学和研究数学令人最感困惑也最引人入胜的环节之一，就是如何发现定理和怎样证明定理．特别是对初学者来说尤其如此．”因此，向学生“再现”定理的发现过程和证明方法的选择过程，即尽可能突出知识的“发生”过程，让学生感受到峰回路转，柳暗花明的喜悦和惊讶，是作者一直追求的教学目标之一．本书包含着作者这方面的一些积累．

本书初版于1988年，1997年又由科学普及出版社出版，这次在台湾再版，出乎作者意外．在此，我要感谢九章出版社，感谢九章出版社的孙文先先生．特别地，还要感谢科学出版社的张鸿林老先生为此书出版所做的工作，尽管我们只有几次联系，但张先生的严格、严谨已使我感动不已．为使本书内容更丰富完整，这次出版又增补了四章，即“帕普斯定理和帕斯卡定理”、“布里昂雄定理”、“汤普森问题”和“佩多定理”．同时对科普版的部分内容进行了修正，相信读者能予接受．

学数学的最好的办法是“做数学”，所以希望青少年朋友养成读数学书时，手边备有纸和笔这一习惯．再则，本书每章基本独立成篇，对于时间不充裕的读者朋友，挑选自己感兴趣的章节阅读，不失为一种聪明的选择．国际数学联盟(IMU)将2000年定为“世界数学年”，数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈入21世纪，愿我们携手共进，共同努力，来迎接新世纪数学的春天！

作者谨识于2000年元月

第三版前言

本书第三版能与大家见面，源自兴趣，也源自一份自信与坚守.

2000 多年前，古希腊数学家欧几里得写了一部不朽之作《几何原本》，这本旷世奇书至今已有一千多种不同版本. 有人说，除了《圣经》之外，没有任何其他著作，能与《几何原本》相比. 但《几何原本》在超越民族、种族、宗教信仰、文化意识方面的影响，却是《圣经》无法比拟的.《几何原本》作为古希腊数学成果、方法、思想和精神的结晶，不仅对数学的发展有着巨大的影响，它所建立的逻辑体系范式、孕育的理性精神对整个人类文明都产生了巨大的影响. 这是几何的魅力！

《几何原本》中译本(1607 年出版)译者之一徐光启说："此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改. 有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得. 有三至三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难. 易生于简，简生于明，综其妙在明而已."这是对《几何原本》的评价，也是对几何的评价！

在几何学发展的历史长河中，有许多经久不衰的名题，犹如一颗颗闪烁的明珠，璀璨夺目，光彩耀人，推动着几何学乃至整个数学的发展. 它们中有的从一发现就吸引着人们的关注，有的经过几代甚至几十代数学家的努力，得出许多耐人寻味、发人深省的结论. 本书集之翡翠，汇其精华，从中挑选出 30 余件珍品，通过证明解法的探求，得出许多有趣的引伸和推广，挖掘出它们在解题中的各种巧妙应用. 相信它对激发读者兴趣、感受几何魅力、丰富数学素养、培养数学能力将大有裨益.

在编写过程中，笔者回避了复数、向量、变换等方法和技巧，这样处理虽然不一定简捷，但似乎更符合这些名题产生的历史事实. 荀子说："不登高山，不知天

之高也；不临深谷，不知地之厚也；不闻先王之遗言，不知学问之大也．”作者所期望的是为青少年登“高山”、临“深谷”、闻“遗言”扫清障碍，铺平道路．让他们领略到这些数学精品的极妙意境．

本书初版于1988年，为24章，2000年版（台湾繁体版）增至28章，第三版对各章作了全面修订和补充，同时也吸收了近10年国内外的一些最新研究成果，增至30章．新增的最后两章，其相关内容均在现行的不同版本的教材中有介绍．这里是作了一个更系统的探讨．

无论是初版还是再版，本书都凝聚着许多师长、同事、好友的真知灼见和情谊，特别要提到的我的两位中学数学教师——陈金雄老师和钱瑜老师，是他们对教育的忠诚，在那个特殊的年代（1969－1972），以他们特有的方式，让我喜欢上了数学，并把教数学、研究数学作为我的终身职业．在本书的写作过程中，作者阅读了大量的文献和资料，特别是张景中、沈康身、梁绍鸿、张奠宙、李文林、沈文选、张顺燕、史宁中、易南轩等前辈和老师，读他们的文章让我受益匪浅．是他们的研究助我渐入佳境．还有我的领导、同事和朋友，如陈振宣、顾鸿达、邱万作、黄华、齐敏、徐颖、曾文洁、韩建宏、黄俊玲等，是他们给予了我工作上很多关怀和帮助，在此我要一并表示感谢和敬意！

因水平有限，谬误之处难免，敬请指正．

作　者

2013年8月于上海浦东

目　录

CONTENTS

第一章　勾股定理

§1.1　定理及简史

勾股定理　直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

若设 a、b、c 为直角三角形的三边,c 为斜边,则

$$a^2+b^2=c^2.$$

我国古代称直角三角形为勾股形,并且直角边中较小者为勾,另一直角边为股,斜边为弦,所以称这个定理为勾股定理,也有人称商高定理.

勾股定理是初等几何中最精彩、最著名、最有用的定理. 它的重要意义表现在哪些方面呢?①

1. 它的证明是论证几何的发端;

2. 它是历史上第一个把数与形联系起来的定理,即它是第一个把几何与代数联系起来的定理;

3. 它导致了无理数的发现,引起第一次数学危机,大大加深了人们对数的理解;

4. 勾股定理是历史上第一个给出了完全解答的不定方程,它引出了费马大定理;

5. 它是欧氏几何的基础定理,并有巨大的实用价值.

这条定理不仅在几何学中是一颗光彩夺目的明珠,被誉为“几何学的基石”,而且在高等数学和其他科学领域也有着广泛的应用. 1971 年 5 月 15 日,尼加拉瓜发行了一套题为“改变世界面貌的十个数学公式”邮票,这十个数学公式由著名数学家选出的,勾股定理是其中之首.

今天世界上许多科学家都在试探寻找与其他星球“人”交流的“语言”,我国著名数学家华罗庚曾建议,发射勾股定理的图形,如果宇宙“人”也拥有文明的话,

① 张顺燕,《数学的源与流》,高等教育出版社,2006:136.

他们应该能识别这种“语言”. 可见勾股定理的重要意义.

勾股定理从被发现至今已有5000多年的历史,5000多年来,世界上几个文明古国都相继发现和研究过这个定理. 古埃及人在建筑金字塔和测量尼罗河泛滥后的土地时,就应用过勾股定理. 我国也是最早了解勾股定理的国家之一,在4000多年前,我国人民就应用了这一定理,据我国一部古老的算书《周髀算经》(约西汉时代,公元前100多年的作品)记载,商高(约公元前1120年)答周公曰:“勾广三,股修四,径隅五”. 这句话的意思就是:在直角三角形中,若勾长为3,股长为4,则弦长为5. 这就是人们常说的“勾三,股四、弦五”,这当然是勾股定理的特殊情形. 但这本书中同时还记载有另一位中国学者陈子(公元前7~前6世纪)与荣方在讨论测量问题时说的一段话:“若求邪(斜)至日者,以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并而开方除之,得邪至日”(图1-1).

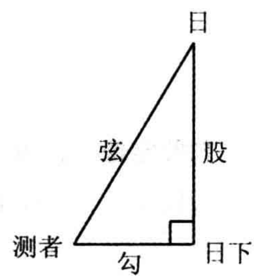


图1-1

$$\text{即}\quad \text{邪至日} = \sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}.$$

这里给出的是任意直角三角形三边间的关系. 因此,也有人主张把勾股定理称为“陈子定理”.

2000多年前,由于希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前585~前497年)学派也发现了这条定理,所以希腊人把它叫毕达哥拉斯定理. 相传当时的毕达哥拉斯学派发现,若m为大于1的奇数,则m、$\frac{m^2-1}{2}$、$\frac{m^2+1}{2}$便是一个可构成直角三角形三边的三元数组. 果真如此,可见这个学派当时是通晓勾股定理的. 但这一学派内部有一规定,就是把一切发明都归功于学派的头领,而且常常秘而不宣. 据传说,发现这个定理的时候,他们还杀了100头牛酬谢供奉神灵,表示庆贺. 因此,这个定理也叫“百牛定理”. 至于毕达哥拉斯学派是否证明了这一定理,数学史界有两种不同的观点,一种意见认为证明过,理由如前所述. 另一种意见则认为证明勾股定理要用到相似形理论,而当时毕达哥拉斯学派没有建立完整的相似理论,因此他们没有证明这一定理.

勾股定理在法国和比利时又叫“驴桥定理”,这自然也有它的来历.

人类对勾股定理的认识经历了一个从特殊到一般的过程,而且在世界上很多地区的现存文献中都有记载,所以很难区分这个定理是谁最先发现的. 国外一般认为这个定理是毕达哥拉斯学派首先发现的,因此,国外称它为毕达哥拉斯定理.

历史文献确凿地证明,商高知道特殊情况下的勾股定理比毕达哥拉斯学派至少要早五六个世纪,而陈子掌握普遍性的勾股定理的时间要比毕达哥拉斯早一二百年,这就是我们把它称为"勾股定理"、"商高定理"或"陈子定理"的理由.

§1.2 定理的证明

几千年来,人们给出了勾股定理的各种不同的证明,有人统计,现在世界上已找到它的证明方法有400多种. 仅1940年,由鲁米斯(E. S. Loomis)搜集整理的《毕达哥拉斯定理》一书就给出了370种不同的证明.

我们的祖先对勾股定理作过较深入的研究. 公元3世纪三国时期数学家赵爽(字君卿)在对《周髀算经》作注时给出一张"弦图"(图1-2),并附"勾股圆方图说"一段文字:"勾股各自乘,并之为弦实,开方除之即弦. 案:弦图,又可以勾股相乘为朱实二,倍之为朱实四,以勾股之差相乘之为中黄实,加差实,亦成弦实."这里第一句话是对勾股定理的一般陈述,"案"以下的文字是对"弦图"之构造的解说,也是对勾股定理的一个完整的证明.

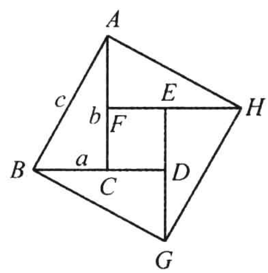
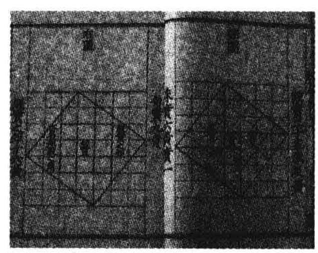


图1-2



《周髀算经》(宋刻本)
弦图上海图书馆藏
图1-3

赵爽的"弦图"已失传,现在能看到的采自上海图书馆宋刻的《周髀算经》(图1-3). 对于赵爽的"弦图"及文字,钱宝琮先生解释为:"实"指面积,把图中($\triangle ABC$等)四个直角三角形涂上朱色,其面积叫做"朱实",中间的正方形($CDEF$)涂上黄色,其面积叫做"中黄实". 于是上文用算式表示就是

$ab = 2S_{\triangle ABC}$, (勾股相乘为朱实二)

$2ab = 4S_{\triangle ABC}$ (倍之为朱实四)

$(b-a)^2 = S_{CDEF}$ (勾股之差相乘之为中黄实)

$2ab + (b-a)^2 = c^2 (= S_{ABGH})$ (加差实,亦成弦实)

即

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

李文林先生则运用面积出入相补法对"弦图"进行解读,他认为,钱先生的解

释:即从“$2ab+(b-a)^2=c^2$ 化简为 $a^2+b^2=c^2$”,这种代数运算,在当时还没有基础. 根据吴文俊先生“古证复原”原则,“面积出入相补法”的解释可能更接近事实.

“弦图”作为我国古代数学成就的代表得到公认,并把它作为2002年8月在北京召开的国际数学家大会会徽(图1-4).

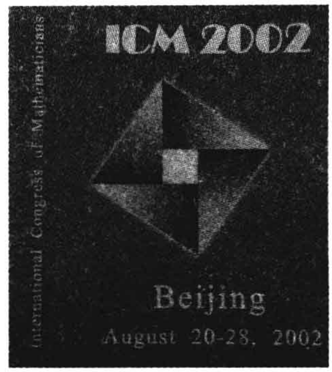


图1-4

赵爽的“弦图”开了面积出入相补证法的先河,至今还被采用.

还有三国时期刘徽、清代的梅文鼎、李锐、华蘅芳等,创造了许多不同的面积证法,下面将他们研究的图形录绘若干幅,如图1-5,从中我们可领会他们研究的神妙.

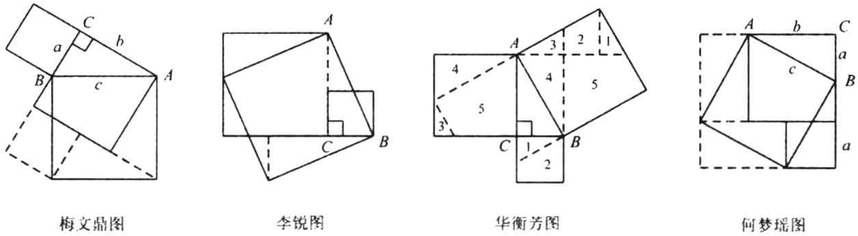


图1-5

现存勾股定理最早的证明出自欧几里得(Euclid,约公元前330~前275年)的《几何原本》命题47. 他把勾股定理换成了另一种形式:“直角三角形斜边上的正方形面积等于两直角边上的正方形面积之和”. 其证法是(如图1-6)

先证

$$\triangle ABD \cong \triangle FBC.$$

$$S_{\text{矩形}BDLM}=2S_{\triangle ABD},$$

$$S_{\text{正方形}ABFG}=2S_{\triangle FBC}.$$

从而

$$S_{\text{矩形}BDLM}=S_{\text{正方形}ABFG};$$

同理

$$S_{\text{矩形}CELM}=S_{\text{正方形}ACHK}.$$

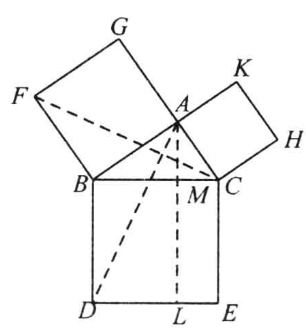


图1-6

上述两式相加即得