志鸿优化设计丛书　丛书主编　任志鸿

高中新教材

优秀教案

GAOZHONG XINJIAOCAI YOUXIU JIAOAN

高二数学

【上册】

南方出版社
南海出版公司

高中新教材

优秀教案

高二数学

【上册】

志鸿优化设计丛书

高中新教材

优秀教案

GAOZHONG XINJIAOCAI YOUXIU JIAOAN

丛书主编　任志鸿
本册主编　马庆福
编　　者　程光明 李　斌 杨秀平 马庆福
　　　　　薛晓飞 马冬霞

高二数学

【上册】

南方出版社
南海出版公司

图书在版编目(CIP)数据

高中新教材优秀教案. 高二数学. 上/任志鸿主编. -3版. -海口：南方出版社：南海出版公司，2003.7(2004.5重印)
(志鸿优化设计系列丛书)
ISBN 7-5442-1151-7

Ⅰ. 高... Ⅱ. 任... Ⅲ. 数学课-教案(教育)-高中 Ⅳ. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第014855号

策　　划：贾洪君
责任编辑：贾洪君
装帧设计：邢　丽

志鸿优化设计丛书
高中新教材优秀教案(高二数学. 上)
任志鸿　主编

南方出版社　南海出版公司　出版发行
(海南省海口市海府一横路19号华宇大厦12楼)
邮编：570203　电话：0898－65371546
山东鸿杰印务有限公司印刷
2004年5月第4版　2004年5月第1次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：19
字数：559千字　　印数：1—30000
定价：25.00元

备课札记

第六章　不等式

§6.1　不等式的性质

课时安排

3 课时

从容说课

本小节内容包括比较实数大小的方法，不等式的性质、推论及其证明.本小节教学时间约需 3 课时.

1.本小节在讲对于任意两个实数 a,b，都有

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$

时，应指出上面等价符号的左式反映的是实数的运算性质，右式反映的是实数的大小顺序，合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系.它是不等式这一章内容的理论基础，是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据.因此，在教学时必须高度重视.

比较两个实数 a 与 b 的大小，归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意是指差的符号，至于差的值究竟是多少，在这里无关紧要)，而这又必然归结到实数运算的符号法则.因此，实数运算的符号法则是学习不等式的基础，可以根据实际情况作简要的复习.

第一课时中的例 1 和例 2 是比较两个代数式的大小.教学时应指出，比较两个代数式的大小，实际上是比较它们的值的大小，而这又归结为判断它们的差的符号.在讲这两个例题时，一定要说明代数式字母的取值范围，取值范围是实数集的可以省略不写，但最好强调一下，提醒学生不要忘记字母的取值范围.

2.关于 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 的含义.

$a>b$ 或 $a<b$，表示严格的不等式.

$a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$，表示非严格的不等式.

不等式 $a\geqslant b$ 读作"a 大于或者等于 b"，其含义是指"或者 $a>b$，或者 $a=b$"，等价于"a 不小于 b"，即若 $a>b$ 或 $a=b$ 中，有一个正确，则 $a\geqslant b$ 正确.

不等式 $a\leqslant b$ 读作"a 小于或者等于 b"，其含义是指"或者 $a<b$，或者 $a=b$"，等价于"a 不大于 b"，即若 $a<b$ 或者 $a=b$ 中，有一个正确，则 $a\leqslant b$ 正确.

3.定理 1(反对称性)和定理 2(传递性)，学生是容易理解的.但对它们进行证明，却是比较困难的.一是学生可能认为没有必要进行证明，二是学生可能不知道如何证明.为了引起重视，养成学生用逻辑推理进行数学证明的习惯，教学时可以向学生提出如下问题："如果 $a>b$，$\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 谁大?"针对学生回答中可能出现的错误，来说明证明的必要性.然后，可以让学生回顾一下实数的运算性质与大小顺序之间的关系，以及实数运算的符号法则，最后再引导学生进行证明.这里要使学生明确证明的依据是实数大小的比较与实数运算的符号法则，要引导学生说清每一步推理的理由和关键性的步骤.

4.定理 3 及其推论，学生也是容易理解的.在这里应该着重向学生指出：

(1)定理 3 是不等式移项法则的基础；

(2)定理 3 的推论是同向不等式相加法则的依据.它是连续两次运用定理 3，然后由定理 2 证出的.但两个同向不等式的两边分别相减时，就不能作出一般的结论，这点可以举出反例向学生说明；

(3)定理 3 可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向.

此外，定理 3 的逆命题也正确.

5.定理 4 有两种不同的结果，学生不易理解，使用时容易出错.讲解时，可先用具体数，让学生分析比较，得出结论后，再给予一般的证明，对于定理 4 还必须注意：

(1)其证明过程中的关键步骤是根据"同号相乘得正，异号相乘得负"来完成的；

(2)要强调 c 的符号，因为符号不同，结论也不同；

备课札记

(3)其中 a,b 可以是实数，也可以是式子，不要在强调 c 的符号时，又使学生误解，从而限制 a,b，缩小了定理的应用范围.

定理 4 的推论 1，说明将两边都是正数的两个同向不等式的两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向. 教学时要强调指出：

(1)它是连续两次运用定理 4 先后得出 $ac>bc,bc>bd$，再用定理 2 证出的；

(2)所有的字母都表示正数，如果仅有 $a>b,c>d$(而不是 $a>b>0,c>d>0$)，就推不出 $ac>bd$ 的结论. 同时还要强调，由两个异向不等式，例如 $a>b>0,0<c<d$，也推不出 $ac>bd$ 的结论. 这两点可以举出反例向学生说明.

定理 4 的推论 2，课本中没有给出严格的证明，是把它作为推论 1 的特殊情形给出的，应注意 n 为大于 1 的正整数这一条件. 例如，当 $a>b>0,n=-1$ 时，$a^{-1}>b^{-1}$ 不成立.

6. 定理 5 的证明用的是反证法. 因为 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 的反面有两种情形，即 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 和 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就"归谬"了事，而必须进行"穷举"，把这两种情形都否定才能得出 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 的正确结论. 把定理 4 的推论 2 和定理结合起来，还容易把这一性质推广到正有理数指数幂的情形，即如果 $a>b>0$，s 为正有理数，那么 $a^s>b^s$.

第二课时中的例 3 和第三课时中的例 4 是用不等式的性质及其推论来证明的. 这可以使学生初步接触不等式的证明，为以后学习不等式的证明打下基础. 讲解这两个例题后，应向学生指出：学完不等式的性质后，就可以利用它们来证明不等式.

总之，在不等式性质的教学中，还要注意将不等式的性质与等式的性质进行类比，特别要指出它们之间的区别，这样可避免解题中的一些错误. 不等式性质与等式性质的不同点主要发生在与数相乘(除)时，不等式两边所乘(除)的数的符号不同，结论是不同的. 应让学生理解这些变化.

不等式的概念和性质是本章内容的基础，是证明不等式和解不等式的主要依据，教学时应给予高度的重视，对每一条性质，要弄清条件和结论，注意条件加强和放宽后，条件和结论之间发生的变化；记住了不等式运算法则的结论形式，还要掌握运算法则的条件，避免由于忽略某些限制条件而造成解题失误.

第一课时

课　题

§6.1.1　不等式的性质(一)

教学目标

(一)教学知识点

1. 数轴上的点与实数是一一对应的. 数轴上右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

2. 实数的运算性质与大小顺序之间的关系(教材中方框内的三个等价关系).

3. 差值比较法比较两个实数的大小.

(二)能力训练要求

1. 掌握差值比较法.

2. 会用差值比较法比较两个实数的大小.

3. 渗透强化双语教学.

(三)德育渗透目标

1. 培养学生转化的数学思想和逻辑推理能力.

2. 培养学生数形结合的数学思想和灵活应变的解题能力.

3. 培养学生分类讨论的数学思想和思考问题严谨周密的学习习惯.

4. 提高学生数学素质.

教学重点

理解在两个实数 a、b 之间具有以下性质：$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$. 这是不等式这一章内容的理论基础，是不等式性质证明、证明不等式和解不等式的主要依据.

教学难点

比较两个代数式的大小，实际上是比较它们值的大小，而这又归结为判断它们的差的符号(注意是指差的符号，至于值是多少，在这里无关紧要). 差值比较法是比较实数大小的基本方法，通常的步骤是：作差→变形→判断差值的符号.

教学方法

启发——讨论式教学法

教具准备

多媒体课件.

课件一:记作§6.1.1 A

问题1:数轴的三要素是什么?
问题2:把下列各数在数轴上表示出来,并从小到大排列:$-3\frac{1}{2}$,$|-5|$,0,$-\sqrt{4}$,$\frac{3}{2}$.

课件二:记作§6.1.1 B

问题1:若$a>b$,则$a-b$______0;若$a=b$,则$a-b$______0;若$a<b$,则$a-b$______0.填“>”“=”“<”号
问题2:“$a>b$”与“$a-b>0$”等价吗?

教学过程

[师]Good morning,everyone.

(同学们上午好)

[生]Good morning, teacher.

(老师上午好)

[师]Sit down,please.(请坐)

Today we'll learn the new lesson.

(今天我们开始上新课)

Are you ready?

(准备好了吗?)

[生]Yes.(是的,准备好了)

[师]OK! Now let's begin.

(好! 现在开始上课)

Ⅰ.课题导入

[师]在客观世界中,不等关系具有普遍性、绝对性,是表述和研究数量取值范围的重要工具.研究不等关系,反映在数学上就是证明不等式与解不等式.实数的差的正负与实数大小的比较有着密切的关系,这种关系是本章内容的基础,也是证明不等式与解不等式的主要依据.因此,本节课我们重点来研究探讨实数的运算性质与大小顺序之间的关系,并以此为依据比较两代数式的大小.

Ⅱ.讲授新课

读·议·练 定重点

学生阅读课本P_4,打出课件一§6.1.1 A和课件二§6.1.1 B,通过相互讨论,画出本节重点内容,并让同学们解决下列问题:

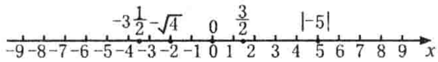
[师]数轴的三要素是什么?

[生]原点、正方向、单位长度.

[师]把下列各数在数轴上表示出来,并从小到大排列:

$$-3\frac{1}{2},|-5|,0,-\sqrt{4},\frac{3}{2}.$$

[生A]



[生B]$-3\frac{1}{2}<-\sqrt{4}<0<\frac{3}{2}<|-5|$.

[生评]在数轴上不同的两点中,右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

[师]同学们回答非常正确,我们继续看下面的问题:

1.若$a>b$,则$a-b$______0;若$a=b$,则$a-b$______0;若$a<b$,则$a-b$______0.

[生C]若$a>b$,则$a-b\underline{>}0$;若$a=b$,则$a-b\underline{=}0$;若$a<b$,则$a-b\underline{<}0$,反之亦然.

2.“$a>b$”与“$a-b>0$”等价吗?

[生D]显然,“$a>b$”等价于“$a-b>0$”.

[师生共评]

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0$$
$$a=b\Leftrightarrow a-b=0$$
$$a<b\Leftrightarrow a-b<0$$

此等价关系提供了比较实数大小的方法:即要比较两个实数的大小,只要考查它们的差就可以了,这是咱们本节课教学的重点.

试着做 寻思路

[师]在同学们掌握上述等价关系的基础上试完成下列两题的解答:

[例1]试比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小.

[生议]比较两个实数a与b的大小,可归纳为判断它们的差$a-b$的符号(注意是指差的符号,至于差的值究竟是多少,在这里无关紧要).由此,把比较两个实数大小的问题转化为实数运算的符号问题.

本题涉及的知识点:整式乘法,去括号法则,合并同类项.

[生E]由题意可知:

$$(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)$$
$$=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)$$
$$=-7<0$$

$\therefore(a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$

[例2]已知$x\neq0$,比较$(x^2+1)^2$与x^4+x^2+1的大小.

[生议]同例1方法类似,在理解的基础

备课札记

备课札记

上作答.本题涉及到的知识点有:乘法公式,去括号法则,合并同类项,实数运算.

[生 F]由题意可知:

$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)$

$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1$

$=x^2$.

$\because x\neq0$,$\therefore x^2>0$.

$\therefore (x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)>0$;

$\therefore (x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

例 2 引申:在例 2 中,如果没有 $x\neq0$ 这个条件,那么两式的大小关系如何?

[师点]此题意在培养学生分类讨论的数学思想,提醒学生在解决含字母代数式问题时,不要忘记代数式中字母的取值范围,一般情况下,取值范围是实数集的可以省略不写.

[生 G]在例 2 中,如果没有 $x\neq0$ 这个条件,那么意味着 x 可以取全体实数,在解决问题时,应分 $x=0$ 和 $x\neq0$ 两种情况进行讨论,即

当 $x=0$ 时,$(x^2+1)^2=x^4+x^2+1$;

当 $x\neq0$ 时,$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

[生评]例 1,例 2 是用作差比较法来比较两个实数的大小,其一般步骤是:作差——变形——判断符号.这样把两个数的大小问题转化为判断它们差的符号问题,至于差本身是多少,在此无关紧要.

练一练 求稳固

Ⅲ.课堂练习

1.在以下各题的横线处填上适当的不等号:

(1)$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ________ $6+2\sqrt{6}$;

(2)$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ ________ $(\sqrt{6}-1)^2$;

(3)$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ ________ $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$;

(4)当 $a>b>0$ 时,$\log_{\frac{1}{2}}a$ ______ $\log_{\frac{1}{2}}b$.

[生 H](1)< (2)< (3)< (4)<

2.选择题

若 $a<0,-1<b<0$,则有 ……( )

A. $a>ab>ab^2$ B. $ab^2>ab>a$

C. $ab>a>ab^2$ D. $ab>ab^2>a$

[生 M]利用作差比较法判断 a,ab,ab^2 的大小即可.

$\because a<0,-1<b<0$,

$\therefore ab>0,b-1<0,1-b>0,0<b^2<1,1-b^2>0$.

$\therefore ab-a=a(b-1)>0\Rightarrow ab>a$;

$ab-ab^2=ab(1-b)>0\Rightarrow ab>ab^2$;

$a-ab^2=a(1-b^2)<0\Rightarrow a<ab^2$;

$\therefore ab>ab^2>a$.

故选 D.

3.比较大小:

(1)$(x+5)(x+7)$与$(x+6)^2$;

(2)$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$与$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$.

[生 N](1)解:$(x+5)(x+7)-(x+6)^2$

$=(x^2+12x+35)-(x^2+12x+36)$

$=-1<0$.

$\therefore (x+5)(x+7)<(x+6)^2$.

(2)解法一:(作差法)

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{1}{2}}-\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\lg3}{\lg2}-\frac{\lg2}{\lg3}=\frac{\lg^2 3-\lg^2 2}{\lg2\lg3}$$

$$=\frac{(\lg3+\lg2)(\lg3-\lg2)}{\lg2\lg3}>0.$$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$.

解法二:(中介法,常以"$-1,0,1$"作中介)

$\because$ 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数且$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}=1$,$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}=1$,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$.

4.如果 $x>0$,比较$(\sqrt{x}-1)^2$ 与$(\sqrt{x}+1)^2$的大小.

[生 J]解:$(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2$

$=(x-2\sqrt{x}+1)-(x+2\sqrt{x}+1)$

$=-4\sqrt{x}$.

$\because x>0$,$\therefore \sqrt{x}>0$,$\therefore -4\sqrt{x}<0$.

$\therefore (\sqrt{x}-1)^2<(\sqrt{x}+1)^2$.

5.已知 $a\neq0$,比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.

[生 Q]解:$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]$

$=-a^2$.

$\because a\neq 0,\therefore a^2>0$，

$\therefore -a^2<0$，

故$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

[师点]4、5题的解答过程中，注意利用平方差公式、完全平方公式灵活变形，对提高解题效率起了重要作用.

议一议　谋发展

[探究性学习]

(根据题目，学生探索、讨论、分析、归纳出解决问题的基本思想，写出正确的解答过程)

[例3]当$x_1<x_2<0$时，比较$\sqrt{1+x_1^2}$与$\sqrt{1+x_2^2}$的大小.

[学生探索]作差法适用于任何两实数的大小比较，但是要注意恒等变形彻底后，才能作出差是大于零或者小于零，然后判定两个数的大小.本题若在第一步就根据函数$y=\sqrt{1+x^2}$的单调性对$\sqrt{1+x_1^2}$与$\sqrt{1+x_2^2}$进行比较，就失去了作差比较的意义.鉴于本题含有根式，应通过找有理化因式，因式分解后再加以判断，这是作差比较的实质.

[生P]解：由题意可知

$$\sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}.$$

$\because x_1<x_2<0$，

$\therefore x_1-x_2<0,x_1+x_2<0$且$\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}>0$，

$\therefore \sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}>0$.

即$\sqrt{1+x_1^2}>\sqrt{1+x_2^2}$.

[师点]本题启示：$n\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$互为有理化因式；$a+m\sqrt{a}$与$a-m\sqrt{a}$互为有理化因式；$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$与$m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$互为有理化因式.

[高考误区警示]

(本栏目旨是通过学生在高考中易犯错误的实例，指出应怎样避免错误，使学生学会学习、学会思考、学会沟通、学会运用，实实在在提高学生的数学素养，培养他们的创新能力)

[例4]若$0<a<b,c\neq 0$，试比较ac与bc的大小.

[师点]此题用作差法比较最好，但也可用作商法比较，若用作商比较法应特别注意，两数必须均是正的.

[生R]方法一(作差法)

$ac-bc=c(a-b)$，

$\because 0<a<b,\therefore a-b<0$.

又$\because c\neq 0$，

$\therefore$当$c>0$时，$c(a-b)<0$，即$ac<bc$.

当$c<0$时，$c(a-b)>0$，即$ac>bc$.

[生X]方法二(作商法)

$\because c\neq 0,\therefore \frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

$\because 0<a<b,\therefore \frac{a}{b}<1$，即$\frac{ac}{bc}<1$.

$\therefore ac<bc$.

[师评]方法二这一结论显然是错误的，其原因主要在于$ac<0,bc<0$，两负数作商比较是没有根据的.应如何作答呢？请同学们继续思考.

[生Y]本题用作商法作答，其正确步骤如下：

$\because 0<a<b,\therefore 0<\frac{a}{b}<1$.

$\because c\neq 0,\therefore \frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$，

$\therefore 0<\frac{ac}{bc}<1$，

$\therefore$当$c>0$时，$ac>0,bc>0$，

$\therefore ac<bc$；

当$c<0$时，$ac<0,bc<0$，

又$\frac{ac}{bc}<1$，

$\therefore ac>bc$(不等式基本性质3).

故当$c>0$时，$ac<bc$；$c<0$时，$ac>bc$.

Ⅳ.课时小结

本节课学习了实数的运算性质与大小顺序之间的关系，并以此关系为依据，研究了如何比较两个实数的大小，其具体解题步骤可归纳为：

第一步：作差并化简，其化简目标应是n个因式之积或完全平方式或常数的形式.

第二步：判断差值与零的大小关系，必要时须进行讨论.

第三步：得出结论.

在某些特殊情况下(如两数均为正，且作商后易于化简)，还可考虑运用作商法比较大小.它与作差法的区别在于第二步，作商法是

备课札记

备课札记

判断商值与1的大小关系.

Ⅴ.课后作业

做一做　肯定行

(一)课本P_8习题6.1

1.比较$(2a+1)(a-3)$与$(a-6)(2a+7)+45$的大小.

2.比较$(x+1)(x^2+\frac{x}{2}+1)$与$(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)$的大小.

3.设$x\geqslant1$,比较x^3与x^2-x+1的大小.

[答案]1.$(2a+1)(a-3)<(a-6)(2a+7)+45$;

2.$(x+1)(x^2+\frac{x}{2}+1)>(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)$;

3.$x^3\geqslant x^2-x+1$.

(二)1.预习内容:

课本$P_{5\sim6}$定理1,2,3及其推论.

2.预习提纲:

(1)定理1,理解不等式的反对称性;

(2)定理2,理解不等式的传递性;

(3)定理3,理解不等式的移项法则.

板书设计

§6.1.1　不等式的性质(一)

读议练　定重点　(概念性质)

试着做　寻思路　(例题探索)

练一练　求稳固　(内容巩固)

议一议　谋发展　(点击高考　知识创新)

做一做　肯定行　(探究学习　掌握策略)

备课资料

一、参考例题

[例1]在下列命题中,正确命题的序号是……………………………………(　　)

(1)若$x<y$,则$a^2x<a^2y$;

(2)若$x<y$,则$x^{2n+1}<y^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$;

(3)若$c>x>y>0$,则$\frac{x}{c-x}>\frac{y}{c-y}$;

(4)若$x>y>1$,则$\log_{\frac{1}{x}}x>\log_{\frac{1}{y}}x$.

A.(1)(3)　　B.(2)(3)(4)

C.(2)(4)　　D.(1)(2)

分析:这类选择题需要逐个判断.

对于(1),当$a=0$时,$a^2x=a^2y$,故命题错.

对于(2),当$0<x<y$时,由不等式性质定理4的推论2可知,结论成立;当$x<0<y$时,显然结论成立;当$x<y<0$时,有$-x>-y>0\Rightarrow(-x)^{2n+1}>(-y)^{2n+1}\Rightarrow x^{2n+1}<y^{2n+1}$,结论成立,故命题(2)正确.

对于(3),命题也是正确的,证明如下:

$$\left.\begin{array}{l}x>y\Rightarrow -x<-y\\ \Rightarrow 0<c-x<c-y\\ \Rightarrow \frac{1}{c-x}>\frac{1}{c-y}>0\\ x>y>0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x}{c-x}>\frac{y}{c-y}$$,故命题(3)正确.

对于(4),由$x>y>1$,得$0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<1$,

而函数$y=\log_a x$,当$0<a<1$时,在$(0,+\infty)$上单调递减,故$\log_{\frac{1}{x}}x=-1=\log_{\frac{1}{y}}y>\log_{\frac{1}{y}}x$,所以命题(4)也正确.

答案:B

评述:(1)正确地理解和运用不等式的性质,是学好不等式的关键.在进行不等式变形时,要注意思考"理论依据"是什么,千万不可"随心所欲".如本题中,在不等式两边同时乘以"数(式)"时,就必须认清"数(式)"的符号.

(2)函数的单调性往往是认识和处理不等式问题的有力武器,因此,在解决不等式问题时,应注意发挥函数的性质的作用.

(3)要否定一个命题,只要举一个反例即可,即用一组满足条件的特殊值进行验证即可;而要肯定一个命题,则需要进行严密的逻辑论证.

[例2]已知$a\in\mathbf{R}$,比较$\frac{1}{1+a}$与$1-a$的大小.

分析:由于$a=-1$时,$\frac{1}{1+a}$无意义;而当$a=0$时,$\frac{1}{1+a}=1-a$,故对于实数a,要比较$\frac{1}{1+a}$与$1-a$的大小,应将$\mathbf{R}$为分$(-\infty,-1)$、$(-1,0)$、$\{0\}$、$(0,+\infty)$等几部分,用分类讨论的思想进行比较.

解:当$a=0$时,$\frac{1}{1+a}=1-a$.

当$a<-1$时,即$a+1<0$.

有$\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}<0$,

$\therefore\frac{1}{1+a}<1-a$.

当$-1<a<0$时,即$a+1>0$,

有$\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}>0$,

$\therefore \frac{1}{1+a}>1-a$.

当 $a>0$ 时，即 $a+1>0$，

有 $\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}>0$

$\therefore \frac{1}{1+a}>1-a$.

综上所述，

当 $a=0$ 时，$\frac{1}{1+a}=1-a$；

当 $a<-1$ 时，$\frac{1}{1+a}<1-a$；

当 $-1<a<0$ 或 $a>0$ 时，$\frac{1}{1+a}>1-a$.

评述：本题用到了分类讨论的思想，即把 $a\neq-1, a\in\mathbf{R}$ 分为 $a<-1, -1<a<0, a=0, a>0$ 几种情形，然后利用作差法分别比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小. 分类讨论是中学数学中的一种重要的数学思想方法，我们一定要予以高度重视.

[例 3]若 $0<x<1, a>0$ 且 $a\neq1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

分析：本题仍可运用作差法比较大小，但作差后的变换有两大"障碍"：其一是本题含有绝对值符号；其二是对数的底数含有字母，因此，本题的解题思路如下：

思路一：作差→换底（回避对底数的讨论）"脱去"绝对值符号→判断差与零的大小→得出结论.

思路二：本题中两式均为正数，故还可考虑用"作商法"比较大小，作法是：作商→判断商与 1 的大小→得出结论.

思路三：本题两式均含绝对值符号，先平方"脱去"绝对值符号再用"作差法"求得结果.

思路四：作差→对底数 a 讨论，以"脱去"绝对值符号→判断差与零的大小→得出结论.

解法一：（作差法）

为方便起见，记

$A=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

则：$A=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$

$=\frac{1}{|\lg a|}[|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|]$.

$\because 0<x<1$，

$\therefore 0<1-x<1, 1+x>1$，

$\because \lg(1-x)<0, \lg(1+x)>0$，

$\because A=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$

$=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x^2)]$，

又$\because 0<x<1, \therefore 0<1-x^2<1$；

$\therefore \lg(1-x^2)<0$.

$\therefore -\lg(1-x^2)>0$.

即 $A=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x^2)]>0$，

故 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法二：（作商法）

显然 $|\log_a(1-x)|>0, |\log_a(1+x)|>0$

$\because 0<x<1, \therefore 0<1-x<1, 1+x>1$，

$\therefore \log_{(1+x)}(1-x)<0$.

$\therefore A=\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|$

$=-\log_{1+x}(1-x)=\log_{1+x}\frac{1}{1-x}$.

$\because (1+x)-\frac{1}{1-x}=\frac{-x^2}{1-x}<0$.

$\therefore 1+x<\frac{1}{1-x}$.

$\because$以 $(1+x)>1$ 为底的对数函数是增函数，

$\therefore \log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$.

即 $A>1$.

故 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法三：（平方作差法）

$\because |\log_a(1-x)|>0, |\log_a(1+x)|>0$，

$\therefore A=|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2$

$=\log_a{}^2(1-x)-\log_a{}^2(1+x)$

$=[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)]\cdot$

$[\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]$

$=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\frac{1-x}{1+x}$

$=\frac{\lg(1-x^2)\cdot\lg\frac{1-x}{1+x}}{\lg^2 a}$.

$\because 0<x<1, \therefore 0<1-x^2<1, 0<\frac{1-x}{1+x}<1$，

$\therefore \lg\frac{1-x}{1+x}<0, \lg(1-x^2)<0$

而 $\lg^2 a>0$.

即 $A>0$.

故 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法四：（对 a 进行讨论后作差）

$\because 0<x<1$，

$\therefore 0<1-x<1, 1+x>1, 0<1-x^2<1$，

备课札记

备课札记

(1)当 $a>1$ 时，

$\log_a(1-x)<0$，$\log_a(1+x)>0$，$\log_a(1-x^2)<0$.

$\therefore A=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$
$=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$
$=-\log_a(1-x^2)>0$.

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

(2)当 $0<a<1$ 时，

$\log_a(1-x)>0$，$\log_a(1+x)<0$，$\log_a(1-x^2)>0$，

$\therefore A=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$
$=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$
$=\log_a(1-x^2)>0$.

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

综合(1)(2)可知，$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

评述:此题解法较多，抓住式子结构特点，选择恰当方法，是比较大小的常用策略.注意，此题难度较大，方法灵活，涉及的内容范围广，既可作差，又可作商，还可去绝对值，但是“脱去”绝对值符号之前要讨论绝对值里面式子的符号;使用作商法比较必须事先保证两数均正;平方后作差比较，必须事先保证两数均为非负数，才能合理进行.鉴于此，此题解答过程可制作成幻灯片，在师生共同参与下，既使学生领会了解题思路，又能在较短时间内掌握解题方法，使课堂教学起到事半功倍之效果.

二、参考练习题

1.填空题

(1)$a\in\mathbf{R}$，则 a^2+3 与 $2a$ 的大小关系是________.

答案:$a^2+3>2a$

(2)已知 $a>1$，则 $\log_a(1+a)$ 与 $\log_a(1+\frac{1}{a})$的大小关系是________.

答案:$\log_a(1+a)>\log_a(1+\frac{1}{a})$

2.选择题

(1)已知 $a<0$，$-1<b<0$，则下面式子中正确的是 ……………………………( )

A. $ab^2>ab$　　B. $a>ab$

C. $ab^2>a$　　D.不能确定

答案:C

(2)a、$b\in\mathbf{R}$，当 $a>b$ 和 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立时，a、b 必须满足的条件是 …………( )

A. $ab>0$　　B. $ab<0$

C. $-b>0>-a$　　D. $-a>0>-b$

答案:C

3.设 a、$b\in\mathbf{R}$，试比较 a^2-3ab 与 $ab-4b^2$ 的大小.

解:$\because (a^2-3ab)-(ab-4b^2)$
$=a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2\geqslant 0$.

$\therefore a^2-3ab\geqslant ab-4b^2$.

4.已知 $0<x<1$，比较 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$ 与 $(a+b)^2$ 的大小.

解:$(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x})-(a+b)^2$

$=\frac{1-x}{x}a^2+\frac{x}{1-x}b^2-2ab$

$(\because 0<x<1,\therefore 0<1-x<1)$

$=(\sqrt{\frac{1-x}{x}}a-\sqrt{\frac{x}{1-x}}b)^2\geqslant 0$.

故 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}\geqslant (a+b)^2$.

三、不等式有关内容

1.不等式的定义:

用不等号连接两个解析式所得的式子，叫做不等式.

说明:(1)不等号的种类:$>$、$<$、$\geqslant$($\nless$)、$\leqslant$($\ngtr$)、$\neq$.

(2)解析式是指代数式和超越式(包括指数式、对数式和三角式等).

(3)不等式研究的范围是实数集 $\mathbf{R}$.

2.不等式的“等价”是什么意思?

一个不等式(组)与另一个不等式(组)，或另外几个不等式(组)“等价”，是指它们中的字母的可取值范围完全相同，并且同时成立或同时不成立.很明显，这时它们的解集也完全相同，所以“等价”的不等式(组)是“同解”的不等式(组).“同解”在解不等式(组)中是十分重要的，如果没有“同解”的保证，在不等式(组)的变形中，就可能缩小或扩大未知数的可取值范围，这样就无法判断最后结果是否为原不等式(组)的解集(因为不等式或不等式组的解集往往含有无限多个元素，所以用代入法逐个进行验算是不可能的).

那么，如何判断不等式(组)A、B 等价呢?我们只要能断定 A 成立的充要条件是 B 成立就行了;或者，只要能断定它们中的字母的可取值范围完全相同，且 A 可以化为 B，B 也可以化为 A 就行了.

第二课时

课　题

§6.1.2　不等式的性质(二)

教学目标

(一)教学知识点

1.不等式的性质定理1,定理2,定理3及其推论.

2.不等式的性质定理1,定理2,定理3及其推论的证明方法.

(二)能力训练要求

1.掌握不等式性质定理1、2、3及推论的证明,初步理解证明不等式的逻辑推理方法.

2.理解定理3是移项法则的依据.

3.能运用不等式性质定理及推论解决一些简单的问题.

(三)德育渗透目标

通过对不等式性质定理的掌握,培养学生灵活应变的解题能力和思考问题严谨周密的习惯.

教学重点

掌握不等式性质定理1、2、3及推论,注意每个定理的条件.理解不等式的性质,是不等式变形的理论依据.

教学难点

1.理解定理1、定理2的证明,即"$a>b\Leftrightarrow b<a$ 和 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$"的证明.这两个定理证明的依据是实数大小的比较与实数运算的符号法则.

2.定理3的推论,即"$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$"是同向不等式相加法则的依据.但两个同向不等式的两边分别相减时,就不能得出一般结论.

教学方法

引导启发结合法——即在教师引导下,由学生利用已学过的有关知识,顺利完成定理的证明过程及定理的简单应用.

教具准备

幻灯片两张.

第一张:记作§6.1.2　A

1.比较两实数大小的依据:

$$\boxed{\begin{array}{l}a>b\Leftrightarrow a-b>0\\ a=b\Leftrightarrow a-b=0\\ a<b\Leftrightarrow a-b<0\end{array}}$$

2.比较两实数大小的方法:

作差→变形→判断差值的符号→得出结论.

3.已知 x,y 均为正数,设 $M=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$,$N=\frac{4}{x+y}$,试比较 M 和 N 的大小.

第二张:记作§6.1.2　B

不等式的三条基本性质(初中)

(1)若 $a>b$,则 $a+c>b+c$,$a-c>b-c$;

(2)若 $a>b$,$c>0$,则 $ac>bc$,$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;

(3)若 $a>b$,$c<0$,则 $ac<bc$,$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

教学过程

Ⅰ.课题导入

(一)打出幻灯片§6.1.2　A,让学生解决下面问题:

[师]请同学们回顾一下,我们比较两实数大小的理论依据是什么?

[生]我们比较两实数大小的理论依据是三个"等价"关系,即

$$\boxed{\begin{array}{l}a>b\Leftrightarrow a-b>0\\ a=b\Leftrightarrow a-b=0\\ a<b\Leftrightarrow a-b<0\end{array}}$$

[师]我们用"作差法"比较两实数的大小,其一般步骤是什么?

[生]用"作差法"比较两实数的大小,一般分三步.即

第一步:作差并化简,其化简目标应是 n 个因式之积或完全平方或常数的形式.

第二步:判断差值与零的大小关系,必要时进行讨论.

第三步:得出结论.

[师]已知 x,y 均为正数,设 $M=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$,$N=\frac{4}{x+y}$,试比较 M 和 N 的大小.

分析:在此题中,变形过程较灵活,既要通分,又要进行因式分解,使同学们正确运用

备课札记

备课札记

完全平方公式.

[生]$M-N=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})-\frac{4}{x+y}$

$$=\frac{x+y}{xy}-\frac{4}{x+y}$$

$$=\frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}.$$

$\because x,y$ 均为正数,

$\therefore x>0,y>0,xy>0,x+y>0,(x-y)^2\geqslant 0$,

$\therefore M-N\geqslant 0$,

即 $M\geqslant N$.

(二)打出幻灯片§6.1.2 B,使学生熟练口述初中已学过的不等式的三条基本性质.

[师]请同学们回顾初中我们学过的不等式的基本性质是什么?

[生](口述)不等式的基本性质是:

基本性质 1　不等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,不等号的方向不变.

基本性质 2　不等式两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变.

基本性质 3　不等式两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变.

[师]我们不仅从文字上理解不等式基本性质,更重要的是我们要理解掌握其数学含义,即

(1)若 $a>b$,则 $a+c>b+c,a-c>b-c$;

(2)若 $a>b,c>0$,则 $ac>bc,\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;

(3)若 $a>b,c<0$,则 $ac<bc,\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

[师]自然界中的等量关系是相对的,而不等关系是绝对的,不等量关系比等量关系的存在更具有普遍性,所以不等关系的研究具有重要的意义,是中学数学的重要内容.我们将在前面学过的一元一次不等式、一元二次不等式和含绝对值的不等式的解法的基础上,进一步学习不等式的重要性质.

Ⅱ.讲授新课

[师]课本中定理 1～定理 3 的证明,都是以实数的运算性质与大小顺序之间的关系为依据,并直接运用实数运算的符号法则(如:正数的相反数是负数;负数的相反数是正数,两个正数的和仍是正数,同号相乘得正,异号相乘得负)来确定差的符号.

定理 1　如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$.

[师]此定理分前、后两部分,让两个学生在理解实数运算的符号法则基础上板演证明过程.

[生甲](证明定理 1 的前半部分)

$\because a>b$,

$\therefore a-b>0$.

由正数的相反数是负数,得

$-(a-b)<0$,

$\therefore b-a<0$.

即 $b<a$.

[生乙](证明定理 1 的后半部分)

$\because b<a$,

$\therefore b-a<0$.

由负数的相反数是正数,得

$-(b-a)>0$,

$\therefore a-b>0$.

即 $a>b$.

[师生共析]定理 1 说明,把不等式的左边和右边交换,所得不等式与原不等式异向;定理 1 的作用是把用“>”(或“<”)连结的不等式等价地转化为用“<”(或“>”)连结的不等式,即 $a>b\Leftrightarrow b<a$.

注释:同向不等式——在两个不等式中,如果每一个的左边都大于(或小于)右边,这两个不等式就是同向不等式.例如 $a^2+2>a+1,3a^2+5>2a$ 是同向不等式.

异向不等式——如果一个不等式的左边大于(或小于)右边,而另一个不等式的左边小于(或大于)右边,这两个不等式就是异向不等式.例如 $a^2+3>2a,a^2<a+5$ 是异向不等式.

定理 2　如果 $a>b$,且 $b>c$,那么 $a>c$.

[师]同学们对定理 2 是容易理解的,但对它进行证明,却是比较困难的.为克服同学们出现下面两种问题:一是同学们可能认为没有必要进行证明;二是同学们不知道如何证明.我们可以先回答下面问题:“如果 $a>b$,则 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 谁大?”大家可能有如下答案(学生思考并回答):学生甲:“若 $a>b$,则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”;学生乙:“若 $a>b$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”,很显然,学生甲、乙的答案是错误的,他们考虑问题都

不全面.引导学生做出正确答案:"当 a、b 同号,即 $a>b>0$ 或 $0>a>b$ 时有 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;当 a、b 异号,即 $a>0>b$ 时有 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$".这就告诉我们,任何一个命题要判断其真假,我们不能只看其表,必顾其根本.因此,我们掌握定理 2 的证明是非常必要的.

[生](在教师指导下让学生完成证明过程)

$\because a>b,b>c$,

$\therefore a-b>0,b-c>0$.

根据两个正数的和仍是正数,得

$(a-b)+(b-c)>0$

$\therefore a-c>0$

即 $a>c$.

[师生共析]运用定理 1 可将定理 2 改写为:如果 $a<b,b<c$,那么 $a<c$,即 $a<b,b<c\Rightarrow a<c$;定理 2 是不等式的传递性($a>b$ 且 $b>c\Rightarrow a>c$),它是"放缩"不等式的依据.

定理 3　如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

[师]在引导学生证明定理 1,定理 2 的基础上,使学生明确定理 3 的实质是:"在 $a>b$ 的条件下,比较 $a+c$ 与 $b+c$ 的大小."这样学生就可运用实数的运算性质与大小顺序之间的关系顺利完成定理 3 的证明过程.

[生甲]$\because a>b,\therefore a-b>0$,

$\therefore (a+c)-(b+c)=a-b>0$.

即 $a+c>b+c$,

[生乙]$\because a>b,\therefore a-b>0$,

$\therefore a-b+c-c>0$(利用互为相反的两个数和是零),

$\therefore (a+c)-(b+c)>0$,

即 $a+c>b+c$.

[师生共析]定理 3 说明,不等式的两边都加上同一个实数,所得不等式与原不等式同向.利用定理 3,可以得出:"如果 $a+b>c$,那么 $a>c-b$".[这是因为:$a+b>c\Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b)\Rightarrow a>c-b$].也就是说:"不等式中任何一项改变符号后,可以把它从一边移到另一边."显然,定理 3 的逆命题也成立.

想一想:如果 $a<b$,是否有 $a+c<b+c$?

[生]答案是肯定的.这是由于:

$a<b\Rightarrow a-b<0$,

$\therefore (a+c)-(b+c)=a-b<0$.

即 $a+c<b+c$.

定理 3 推论　如果 $a>b$,且 $c>d$,那么 $a+c>b+d$.

[师]定理 3 的推论是同向不等式相加,要多次运用定理 3 然后由定理 2 证出,灵活变形,选出恰当方法.

[生甲]$\because a>b,c>d$,

$\therefore a-b>0,c-d>0$.

$\therefore (a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$,(两个正数的和仍为正数).

$\therefore a+c>b+d$.

[生乙]$\because a>b$,

$\therefore a+c>b+c$.

又 $\because c>d$,

$\therefore b+c>b+d$.

$\therefore$ 由不等式的性质定理 2,得

$a+c>b+d$.

[师生共析]对于定理 3 的推论,很明显,它可以推广到任意有限个同向不等式两边分别相加.这就是说,两个或者更多个同向不等式两边分别相加,所得不等式与原不等式同向.

评述:定理 3 是不等式移项法则的基础;定理 3 的推论是同向不等式相加法则的依据,但两个同向不等式的两边分别相减时,就不能作出一般的结论.例如:

"$5>3$ 且 $4>2$ 有 $5-4=3-2$";

"$8>3$ 且 $4>2$ 有 $8-4>3-2$";

"$6>4$ 且 $3>-5$ 有 $6-3<4-(-5)$".

课本[例 3]已知 $a>b,c<d$,求证:$a-c>b-d$.

[师]不等式的性质运用时较为灵活,熟练掌握其性质是解决不等式问题的关键.

分析:思路一:证明"$a-c>b-d$",实际是根据已知条件比较 $a-c$ 与 $b-d$ 的大小,所以以实数的运算性质与大小顺序之间的关系为依据,直接运用实数运算的符号法则来确定差的符号,最后达到证题目的.

[生]$\because a>b,c<d$,

$\because a-b>0,d-c>0$,

$\therefore (a-c)-(b-d)$

$=(a-b)+(d-c)>0$(两个正数的和仍为正数).

故 $a-c>b-d$.

思路二:我们已熟悉不等式的性质中的定理 1～定理 3 及推论,所以运用不等式的

备课札记

备课札记

性质,加以变形,最后达到证明目的.

[生]$\because c<d,\therefore -c>-d$.

又$\because a>b$,

$\therefore a+(-c)>b+(-d)$,

$\therefore a-c>b-d$.

Ⅲ.课堂练习

1.判断下列命题的真假,并说明理由:

(1)如果 $a>b$,那么 $a-c>b-c$;

(2)如果 $a>b$,那么$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

分析:从不等式性质定理找依据,与性质定理相违的为假,与定理相符的为真.

答案:(1)真.因为推理符合定理3.

(2)假.由不等式的基本性质2,3(初中)可知,当 $c<0$ 时,$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.即不等式两边同乘以一个数,必须明确这个数的正负.

2.回答下列问题:

(1)如果 $a>b,c<d$,能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小?举例说明;

(2)如果 $a>b,c>d$,能否断定 $a-2c$ 与 $b-2d$ 谁大谁小?举例说明.

答案:(1)不能断定.例如:$2>1,1<3\Rightarrow 2+1<1+3$;而 $2>1,-1<-0.8\Rightarrow 2-1>1-0.8$.异向不等式作加法没定论.

(2)不能断定.例如 $a>b,c=1>d=-1\Rightarrow a-2c=a-2,b+2=b-2d$,其大小不定.$a=8>1=b$ 时$a-2c=6>b+2=3$.而 $a=2>1=b$ 时 $a-2c=0<b+2=3$.

3.求证:(1)如果 $a>b,c>d$,那么 $a-d>b-c$;

(2)如果 $a>b$,那么 $c-2a<c-2b$.

证明:(1)$\left.\begin{array}{l}a>b\Rightarrow a-d>b-d,\\ c>d\Rightarrow -c<-d.\\ \Rightarrow b-c<b-d\end{array}\right\}\Rightarrow a-d>b-c$.

(2)$a>b\Rightarrow -2a<-2b\Rightarrow c-2a<c-2b$.

4.已和 $a>b>c>d>0$,且$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,求证:$a+d>b+c$.

证明:$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

$\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

$\therefore (a-b)d=(c-d)b$.

又$\because a>b>c>d>0$,

$\therefore a-b>0,c-d>0,b>d>0$ 且$\frac{b}{d}>1$,

$\therefore \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}>1$,

$\therefore a-b>c-d$.即 $a+d>b+c$.

评述:此题中,不等式性质和比例定理联合使用,使式子形与形之间的转换更迅速.这道题不仅有不等式性质应用的信息,更有比例的信息,因此这道题既要重视性质的运用技巧,也要重视比例定理的应用技巧.

Ⅳ.课时小结

本节课我们学习了不等式的性质定理1~定理3及其推论,理解不等式性质的反对称性($a>b\Leftrightarrow b<a$)、传递性($a>b,b>c\Rightarrow a>c$)、可加性($a>b\Rightarrow a+c>b+c$)、加法法则($a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$),并记住这些性质的条件,尤其是字母的符号及不等式的方向,要搞清楚这些性质的主要用途及其证明的基本方法.

Ⅴ.课后作业

(一)课本 P_8 习题6.1 4.(1)、(2).

(二)1.预习内容:课本 $P_{6\sim7}$不等式性质定理4及其推论,定理5及其证明方法.

2.预习提纲:

(1)预习定理4及其推论,理解不等式性质的可积性、乘法法则、乘方法则.

(2)预习定理5,掌握用反证法证明不等式的开方法则.

板书设计

§6.1.2 不等式的性质(二)

一、不等式的性质	二、不等式性质的证明	课时小结
定理1	例题	
定理2		课后作业
定理3	课堂练习	
推论		

备课资料

一、参考例题

[例1]已知 $a,d\in\mathbf{R},d\neq 0$,比较大小:

(1)$(a-d)^3+(a+d)^3,2a^3$;

(2)$(a-3d)^3+(a+3d)^3,(a-d)^3+(a+d)^3$.

分析:比较大小常采用的办法是"作差法",即作差→变形(通分,有理化,因式分解

等)→判断差值的符号→得出结论.

解:(1)∵$[(a-d)^3+(a+d)^3]-2a^3$

$=[(a-d)+(a+d)][(a-d)^2-(a-d)(a+d)+(a+d)^2]-2a^3$

$=2a(a^2+3d^2)-2a^3$

$=6ad^2$.

∵$a\in\mathbf{R}$,$d\in\mathbf{R}$且$d\neq0$,∴$d^2>0$.

∴当$a>0$时,$(a-d)^3+(a+d)^3>2a^3$;

当$a=0$时,$(a-d)^3+(a+d)^3=2a^3$;

当$a<0$时,$(a-d)^3+(a+d)^3<2a^3$.

(2)∵$[(a-3d)^3+(a+3d)^3]-[(a-d)^3+(a+d)^3]$

$=[(a-3d)+(a+3d)][(a-3d)^2-(a-3d)(a+3d)+(a+3d)^2]-(2a^3+6ad^2)$

$=(2a^3+54ad^2)-(2a^3+6ad^2)$

$=48ad^2$.

∵$a,d\in\mathbf{R}$,$d\neq0$,∴$d^2>0$.

∴当$a>0$时,

$(a-3d)^3+(a+3d)^3>(a-d)^3+(a+d)^3$;

当$a=0$时,

$(a-3d)^3+(a+3d)^3=(a-d)^3+(a+d)^3$;

当$a<0$时,

$(a-3d)^3+(a+3d)^3<(a-d)^3+(a+d)^3$.

评述:本题在变形过程中,巧妙地运用了立方和(差)公式,完全平方公式,提高了解题效率.同时,注意到$a-d,a,a+d$是等差数列,$a-3d,a-d,a+d,a+3d$也是等差数列.由此,本题的结果也反映出等差数列一个性质:在等差数列与首末两项等"距离"的两项的立方和中,设首末两项的等差中项为A,则$A>0$时,靠两端的立方和较大,靠中间的两项的立方和较小;$A=0$时,两种立方和相等;$A<0$时,靠两端的立方和较小,靠中间的立方和较大.

[例2]若$q>0$,且$q\neq1$,比较大小:

(1)$1+q^2$与$2q$;(2)$1+q^3$与$q+q^2$.

分析:多项式与多项式比较大小,由于展开时较繁,作差后灵活选择乘法公式进行因式分解,利用实数的符号法则确定积的正负.

解:(1)$(1+q^2)-2q=1-2q+q^2=(1-q)^2$.

∵$q>0$,且$q\neq1$,∴$(1-q)^2>0$.

故$1+q^2>2q$.

(2)$(1+q^3)-(q+q^2)$

$=(q+1)(q^2-q+1)-q(q+1)$

$=(q+1)(q^2-2q+1)$

$=(q+1)(q-1)^2$.

∵$q>0$且$q\neq1$,∴$(q+1)(q-1)^2>0$.

故$1+q^3>q+q^2$.

评述:本题的结论使我们联想到,对于正项的等比数列$\{a_1q^{n-1}\}(q\neq1)$有如下性质:与两端"等距离"两项之和,靠两端的和大于靠中间的和.即在数列$a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-3},a_1q^{n-2},a_1q^{n-1}$中$(a_1>0,q>0,q\neq1)$有:$a_1+a_1q^{n-1}>a_1q+a_1q^{n-2}>a_1q^2+a_1q^{n-3}>\cdots$.

二、参考练习题

1.选择题

(1)若$M=(2x+3)(x-4)$,$N=(x-7)(x+3)+8$,则M与N的大小关系是 …(　　)

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M=N$　　D. $M\leqslant N$

$2x^2-5x-12$　　x^2-x

$-x^2+4x+21-8$

答案:A

(2)若$m=2x^2+2x+1$,$n=(x+1)^2$,则m、n的大小关系为 …………………(　　)

A. $m>n$　　B. $m\geqslant n$

C. $m<n$　　D. $m\leqslant n$

答案:B

(3)若$a>0$且$a\neq1$,$p=\log_a(a^3+1)$,$q=\log_a(a^2+1)$,则p、q的大小关系为……(　　)

A. $p<q$　　B. $p\leqslant q$

C. $p>q$　　D. $p\geqslant q$

$(a+1)(a^2-a+1)$　　$\log_a\frac{a^3+1}{a^2+1}$

答案:C

2.填空题

在下列各题的横线上填上适当的不等号:

(1)若$x>0$,$y>0$,则x^3+y^3 ________ x^2y+xy^2.

答案:$\geqslant$

(2)若$x\in\mathbf{R}$,则$(x^2+1)^3$ ________ $x^6+2x^4+2x^2+1$.

答案:$\geqslant$

(3)$\log_2 3$ ________ $\frac{3}{2}$.

分析:因为$\dfrac{\log_2 3}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\log_2 3=\frac{2\lg3}{3\lg2}=\log_8 9>\log_8 8=1$,所以$\log_2 3>\frac{3}{2}$;或$\log_2 3-\frac{3}{2}=\log_2 3-\frac{3}{2}\log_2 2=\log_2 3-\log_2\sqrt{8}=\log_2\sqrt{9}-\log_2\sqrt{8}>0\Rightarrow\log_2 3>\frac{3}{2}$.

答案:$>$

3.解答题

备课札记