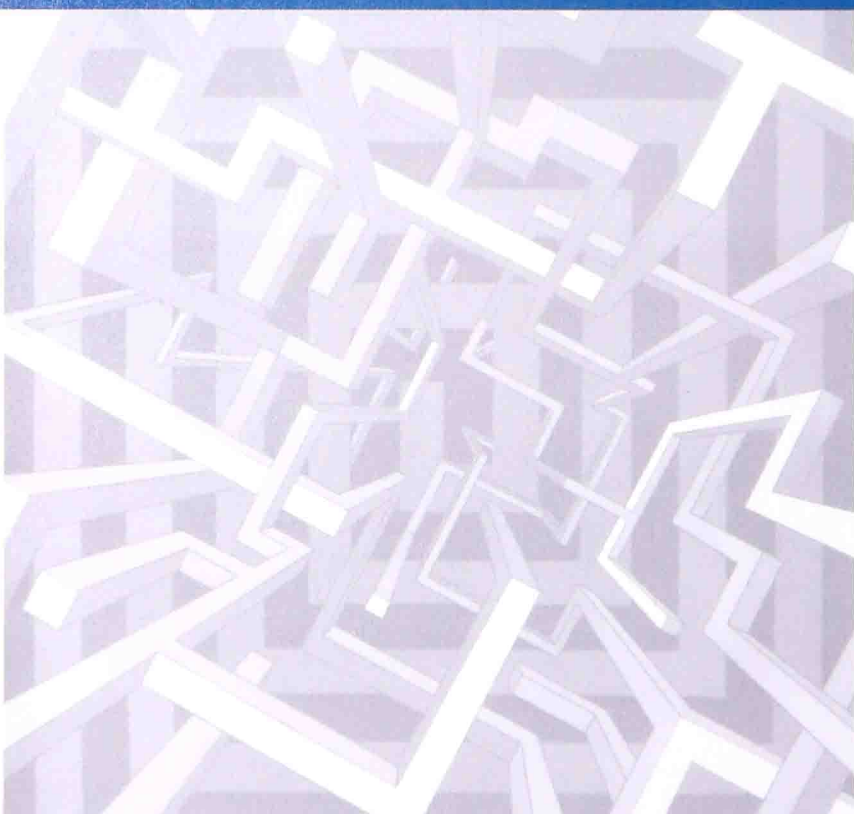
Hilbert C^*-模

理论及其应用

张伦传 著



科学出版社

Hilbert C^*-模理论及其应用

张伦传　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了 Hilbert C^*-模理论及其在量子 Markov 半群研究方面的应用. 全书共分三章, 第 1 章是 Hilbert C^*-模的基本理论, 主要包括 Hilbert C^*-模及有界模映射等相关概念, 模映射的极分解与 Wold 分解及模张量积等; 在此基础上, 第 2 章介绍了 Kasparov 稳定性定理、Morita 等价、Fredholm 广义指标及模框架理论; 第 3 章是 Hilbert C^*-模理论在模算子(半)群研究方面的应用, 也是本书的特色之处, 我们对一类量子 Markov 半群和相应的算子值 Dirichlet 型进行了刻画, 获得了 Beurling-Deny 对应定理.

本书可作为高等院校泛函分析、量子概率、数学物理等方向的研究生以及相关方向科研工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

Hilbert C^*-模理论及其应用/张伦传著. —北京: 科学出版社, 2014.3

ISBN 978-7-03-039884-0

Ⅰ. ①H…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①泛函分析　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 037644 号

责任编辑: 徐园园　赵彦超 / 责任校对: 郑金红

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014 年 3 月第 一 版　开本: 720×1000 1/16

2014 年 3 月第一次印刷　印张: 13 1/4

字数: 260 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

如所周知, 模理论是代数学的重要组成部分, 而 Hilbert C^*- 模概念最早是由著名的代数学家同时也是算子代数学家的 I. Kaplansky 于 20 世纪 50 年代引入的. 他给出了交换 C^*- 代数的 Hilbert C^*- 模概念, 并以此为工具证明了 I- 型 AW^*- 代数上的导子均为内导子. 一般非交换 C^*- 代数上的 Hilbert C^*- 模概念直到 20 世纪 70 年代才分别由 W. L. Paschke 和 M. A. Rieffel 引入, 用于刻画 C^*- 代数的表示理论及约化理论. 此后随着 Hilbert C^*- 模作为重要工具在 A. Connes 的非交换几何及 S. L. Woronowicz 的量子群理论中的应用, 极大地促进了 Hilbert C^*- 模理论的发展. Hilbert C^*- 模也是 Jones 广义指标理论、算子值自由概率论的主要工具. 近年来, 又广泛用于量子概率的研究之中. 由此可以看出, Hilbert C^*- 模理论是在应用过程中间不断发展起来的. 顾名思义, Hilbert C^*- 模是 Hilbert 空间和 C^*- 代数结合的产物, 而且 Hilbert 空间和 C^*- 代数均为特殊的 Hilbert C^*- 模. 因此, Hilbert C^*- 模基本理论是 Hilbert 空间理论与 C^*- 代数理论交相辉映的结果.

本书分为三章. 第 1 章介绍 Hilbert C^*- 模基本理论, 主要内容是 Hilbert C^*- 模及其有界模映射概念、有界模映射的极分解和 Wold 分解、模张量积及 KSGNS 构造; 第 2 章介绍 Kasparov 稳定性理论和 Fredholm 广义指标理论, 主要内容是 Kasparov 稳定性理论和 Fredholm 广义指标理论、Morita 等价理论和模框架理论; 第 3 章刻画基于 Hilbert C^*- 模的量子 Markov 半群, 主要内容是模算子半群及模算子群的刻画、强连续模算子半群与抽象 Cauchy 问题、基于 Hilbert C^*- 模的量子 Markov 半群的刻画、算子值 Dirichlet 型.

本书的撰写历经 5 个寒暑, 从初稿到定稿也修改了五六遍. 在此特别指出, 第 3 章的核心内容是作者和郭懋正教授合作的结果. 特别地, 第 3.4 节的部分结果曾于 2010 年 8 月 19 日 ~8 月 27 日在印度海得拉巴市召开的第二十六届国际数学家大会做过分组报告. 另外, 第 1 章和第 2 章中的关于 Moore-Penrose 广义逆模映射及应用的刻画、遗传 C^*- 子代数与可补闭子模及模酉等价之间的关系均采自作者的相关论文. 我们首次在 Hilbert C^*- 模理论研究中引入 Moore-Penrose 广义逆模映射并以此为工具刻画有界模映射的因子分解问题.

本书尽量做到自包含. 只要读者具有算子理论和算子 (矩阵) 代数及 Markov 半群和 Dirichlet 型的基本理论知识, 即可阅读本书. 从写作形式上, 尽量交代主要结果的来龙去脉, 注意与 Hilbert 空间及与 C^*- 代数中相关结论作对比, 力争做到深入浅出, 并从看似平凡的实例中发现理论发展的思路.

作者 1997 年博士毕业于南京大学, 师从马吉溥教授; 1999 年在中国科学院数学研究所做博士后, 合作导师李炳仁研究员. 这期间曾向 E. C. Lance 教授学习 Hilbert C^*- 模理论. 2003 年跟随钱敏教授、钱敏平教授和郭懋正教授学习量子概率, 特别是近几年来和郭懋正教授合作研究量子概率论. 从中感受到郭懋正教授的广博的学识和高尚的情怀, 这些是我无尽的知识源泉和精神宝库, 激励着我前行.

本书的工作获得中央高校科研基金和中国人民大学科研基金 (No. 10XNJ033) 的资助, 在此表示感谢!

在这纷繁的世间, 作者在默默地潜心学习和研究. 虽自知才疏学浅, 但坚信道不远人.

书中表述不妥之处敬请批评指正.

张伦传
2013 年 12 月
于中国人民大学信息学院

目　　录

第 1 章 Hilbert C^*- 模理论基础

1.1 Hilbert C^*- 模及其模映射

1.1.1 Hilbert C^*- 模

Hilbert C^*- 模最早出现在 I. Kaplansky[73] 的工作中, 他以此为工具证明了 I 型 AW^*- 代数上的导子均为内导子. 但本书仅考虑了交换 C^*- 代数上的 Hilbert C^*- 模, 而一般 (非交换) C^*- 代数上的 Hilbert C^*- 模直到 20 年后才分别由 W. L. Paschke[106] 和 M. A. Rieffel[120] 引入, 用于刻画 C^*- 代数模表示和 C^*- 代数之间的 Morita 等价问题. 此后 Hilbert C^*- 模理论蓬勃发展起来, 成为非交换几何[29]、KK-理论[72]、量子群论[147]、广义指标理论[148] 的主要工具. 现在又用于算子值自由概率论[136] 及量子概率论[137−139] 的研究之中.

定义1.1.1 给定 C^*- 代数 A 和右 A- 模 E, 若 E 上赋有 A- 值内积: $\langle\cdot,\cdot\rangle: E\times E\to A$, 即对于任意给定的元素 $x,y,z\in E$, 及任意的 $a\in A$ 和 $\lambda\in$ 复数域 $\mathbb{C}$, 下述各条成立:

(1) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, 且若 $\langle x,x\rangle=0$, 则 $x=0$;

(2) $\langle x,\lambda y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle, \langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$;

(3) $\langle x,ya\rangle=\langle x,y\rangle a$;

(4) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$.

则称 E 是 C^*- 代数 A 上的准 Hilbert C^*- 模.

给定准 Hilbert C^*- 模 E, 对于任意 $x\in E$, 令

$$||x||=||\langle x,x\rangle||^{1/2}.$$

为证明 $||\cdot||$ 是 E 上的范数, 需要下面的 Cauchy-Schwarz 型不等式.

命题1.1.1 给定准 Hilbert C^*- 模 E 及任意 $x,y\in E$, 则成立

$$\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle\leqslant||\langle x,x\rangle||\langle y,y\rangle.$$

证明 任给 C^*- 代数 A 上的态 f, 则二元函数:

$$E\times E\to\mathbb{C},\quad (x,y)\to f(\langle x,y\rangle),\quad x,y\in E$$

成为非负定内积空间 (注：非负定内积空间也称为半内积空间).

注意到

$$\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle=\langle y,x\langle x,y\rangle\rangle.$$

对于 $(y,x\langle x,y\rangle)$, 应用数量值非负定内积空间上的 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|(y,x\langle x,y\rangle)|^2\leqslant(y,y)\cdot(x\langle x,y\rangle,x\langle x,y\rangle),$$

即

$$(f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle))^2\leqslant f(\langle y,y\rangle)\cdot f(\langle x\langle x,y\rangle,x\langle x,y\rangle\rangle).$$

由于

$$\begin{aligned}\langle x\langle x,y\rangle,x\langle x,y\rangle\rangle=&\langle x,y\rangle^*\langle x,x\rangle\langle x,y\rangle\\ \leqslant&||\langle x,x\rangle||\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle,\end{aligned}$$

因此

$$(f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle))^2\leqslant||\langle x,x\rangle||f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle)f(\langle y,y\rangle).$$

若 $f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle)\neq0$, 上式两边同除以 $f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle)$ 得

$$f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle)\leqslant||\langle x,x\rangle||f(\langle y,y\rangle)=f(||\langle x,x\rangle||\langle y,y\rangle);$$

若 $f(\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle)=0$, 上式自然成立.

注意到 f 是 A 上的任意态, 于是由 R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose 的文献 [79] 中的定理 4.3.4 得

$$\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle\leqslant||\langle x,x\rangle||\langle y,y\rangle.$$

证毕.

注　(1) 式最后一个不等式用到了 C^*- 代数中下述基本不等式:

给定 C^*- 代数 A, 记 A_{sa} 为 A 的自伴部分, 任给 $a,b\in A_{sa}$ 及 $c\in A$, 则由 $a\leqslant b$ 可得 $c^*ac\leqslant c^*bc$.

(2) 命题 1.1.1 可以利用准 Hilbert C^*- 模的定义再结合 C^*- 代数正锥的基本性质给出内蕴式的证明, 具体可参考 E. C. Lance 的文献 [91] 中的命题 1.1.

由命题 1.1.1 立得下面推论.

推论1.1.1　给定准 Hilbert C^*- 模 E 及任意 $x,y\in E$, 则成立

$$||\langle x,y\rangle||^2\leqslant||\langle x,x\rangle||\cdot||\langle y,y\rangle||.$$

令

$$||x|| = ||\langle x, x\rangle||^{1/2}, \quad \forall x \in E.$$

由推论 1.1.1 易证, $||\cdot||$ 为 E 上的范数. 而且还可证明

$$||x|| = \sup\{||\langle x, y\rangle|| : y \in E, ||y|| \leqslant 1\}.$$

定义1.1.2 在定义 1.1.1 的基础上, 若 E 关于上述范数完备, 即 E 为 Banach 空间, 则称 E 为 C^*- 代数 A 上的 Hilbert C^* - 模, 或 Hilbert C^*-A- 模, 简称为 Hilbert C^*- 模.

给定 Hilbert C^*- 模 E, F 为 E 中非空闭子空间, 若 $F \cdot A \subseteq F$, 则称 F 为 E 的闭子模.

由此知, $\{0\}$ 和 E 是 E 的闭子模, 这两个子模称为平凡闭子模.

例1.1.1 任给 C^*- 代数 A, 定义映射:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : A \times A \to A, \quad (a, b) \to \langle a, b\rangle = a^*b, \quad \forall a, b \in A.$$

易证这个映射满足定义 1.1.2 中的条件. 因此 A 自身关于内积

$$\langle a, b\rangle = a^*b,$$

也成为一个 Hilbert C^*- 模, 其模范数就是 A 上的一致算子范数.

由例 1.1.1 知, C^*- 代数 A 自身可看成 Hilbert C^*-A- 模. 由此, A 的任何闭右理想 B 均为 A 的闭子模, 其 A- 值内积为

$$\langle a, b\rangle = a^*b \in B \subset A, \quad \forall a,\ b \in B.$$

由此知, C^*- 代数不但作为 Hilbert C^*- 模的底空间, 而且本身也可看成 Hilbert C^*- 模, 于是 C^*- 代数与 Hilbert C^*- 模理论交相辉映.

注 (1) 若 A 退化成复数域 $\mathbb{C}$, 则定义 1.1.2 中的 Hilbert 模 E 即成为 Hilbert 空间. 由此, Hilbert 空间可以看成 Hilbert C^*- 模的特殊情况, 从而 Hilbert 空间理论对于 Hilbert C^*- 模理论的确立和发展具有启迪作用.

但是后面会逐渐看到, 一般的 Hilbert C^*- 模与 Hilbert 空间具有很多本质区别.

(2) 复数域 $\mathbb{C}$ 与底空间 A 及右 A- 模 E 满足结合律:

$$\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in E, a \in A.$$

这一条很多文献是作为定义的一部分加进去的. 实际上由上述定义 1.1.2 可简单推得.

(3) 类似于复 Hilbert 空间情形, 易证, Hilbert C^*- 模的算子值内积也满足极化恒等式:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}x+y, \mathrm{i}x+y\rangle - \mathrm{i}\langle \mathrm{i}x-y, \mathrm{i}x-y\rangle\}.$$

(4) 类似地也可以定义左模概念, 及双边模 (简称双模) 概念.

若无说明本书出现的模均指右模.

定义1.1.3 给定 C^*- 代数 A 上的 Hilbert C^*- 模 E, 及子集 $\{x_i\}_{i\in I}\subseteq E$, 其中 I 是指标集. 若 $\{x_i\}_{i\in I}$ 中元素的有限线性组合全体的集 (记为 $\mathrm{span}\{x_i\}_{i\in I}$) 在 E 中稠密, 则称 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是 E 的生成元系; 进而, 若指标集 I 可列, 则称 E 是可数生成的; 若 I 是有限集, 则称 E 是 (拓扑) 有限生成的. 特别地, 若 E 中存在有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $E=\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则称 E 是代数有限生成的.

例1.1.2 给定 C^*- 代数 A, 记 $l^2(A)=\{(a_i)_{i=1}^\infty\in\prod_1^\infty A : \left\{\sum_{i=1}^n a_i^*a_i\right\}_{n=1}^\infty$ 关于 A 上的范数收敛 $\}$. 定义映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : l^2(A)\times l^2(A)\to A,\quad \langle (a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty\rangle = \sum_{i=1}^\infty a_i^*b_i.$$

易证上述映射满足定义 1.1.2 中的条件, 因此 $l^2(A)$ 为 Hilbert C^*- 模.

注 对于 $\prod_1^\infty A$ 中元素 $(a_i)_{i=1}^\infty$ 来说, 易证若 $\sum_{i=1}^\infty \|a_i\|^2$ 收敛, 则 $\sum_{i=1}^\infty a_i^*a_i$ 一定收敛, 但反之不真.

例1.1.3 令 $A=C_0(1,+\infty)$, 即在区间 $(1,+\infty)$ 上连续且在无穷远点为 0 的函数全体的集, 关于极大值范数它构成一个交换的 C^*- 代数. 令

$$f_n(x)=\frac{\sqrt{n}}{x^{\frac{n}{2}}},\quad x\in(1,+\infty),$$

则 $f_n(x)\in C_0(1,+\infty)$.

由数学分析中熟知的幂级数理论易得

$$\sum_{n=1}^\infty f_n^*(x)f_n(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{x^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{x^{\frac{n}{2}}}=\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{x^n}$$

在 $(1,+\infty)$ 上收敛.

注意到

$$\begin{aligned}||f_n|| &= \max_{x\in(1,+\infty)} |f_n(x)| \\ &= \max_{x\in(1,+\infty)} \frac{\sqrt{n}}{x^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{n},\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

发散.

注 记 $E_A = \left\{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_1^{\infty} A : \sum_{i=1}^{\infty} ||a_i||^2 < \infty\right\}$, 则 $l^2(A) = E_A$的充要条件是, A 是有限维 C^*- 代数[46,62].

正交性是通常内积空间的特性. 平行地, 在 Hilbert C^*- 模中也可引入正交性概念.

定义1.1.4 给定 Hilbert C^*- 模 E, $x, y \in E$, 若 $\langle x, y\rangle = 0$ 则称 x 与 y 正交, 或称垂直, 记为 $x \perp y$. 进而, 对于 E 的闭子模 F 及元素 $x \in E$, 若 $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F$, 则称 x 与 F 正交, 记为 $x \perp F$. 令 $F^{\perp} = \{x \in E : x \perp F\}$, 若 $F \oplus F^{\perp} = E$, 则称 F 为正交可补子模, 简称为可补子模.

注 对于 Hilbert 空间来说, 任何闭子空间均可补. 但 Hilbert C^*- 模一般无此性质, 这是两者的本质区别.

例1.1.4 设 H 为无限维可分 Hilbert 空间, 则紧算子理想 $K(H)$ 为 $B(H)$ 的非平凡闭双侧理想, 因此若把 $B(H)$ 看成 Hilbert C^*- 模则 $K(H)$ 为 $B(H)$ 的真闭子模. 因 $K(H)$ 在 $B(H)$ 中关于弱算子拓扑稠, 故

$$K(H)^{\perp} = \{0\}.$$

从而

$$K(H) \oplus K(H)^{\perp} = K(H) \neq B(H).$$

表明 $K(H)$ 不可补.

注 后面会看到, 闭子模的可补性在模映射的因子分解及遗传 C^*- 子代数研究中起着重要作用.

定义1.1.5　给定有单位元的 C^*- 代数 A. 记 $A^n = \underbrace{A \oplus A \oplus \cdots \oplus A}_{n}$, 则 A^n 为自由 A- 模. A 上的 Hilbert C^*- 模 E 称为是有限生成的投影模, 指若存在自然数 n 使得 E 为 A^n 的正交补子模.

可数生成的 Hilbert C^*- 模, 代数有限生成的 Hilbert C^*- 模及有限生成的投影模在 Hilbert C^*- 模理论研究中占有重要位置.

本小节最后给出一个基本而重要的性质.

性质1.1.1　给定 C^*- 代数 A 上的 Hilbert C^*- 模 E. 则 $\overline{\langle E, E\rangle}$(上划线 — 指按 A 中范数收敛的闭包) 为 A 的闭双侧理想. 而且 $E\langle E, E\rangle$ 在 E 中按 E 上范数稠密, 其中 $\langle E, E\rangle = \mathrm{span}\{\langle x, y\rangle : x, y \in E\}$.

证明　对于任意 $x, y \in E$, $a \in A$, 因

$$a\langle x, y\rangle = \langle xa^*, y\rangle \in \langle E, E\rangle,$$
$$\langle x, y\rangle a = \langle x, ya\rangle \in \langle E, E\rangle,$$

故 $\overline{\langle E, E\rangle}$ 为 A 的闭双侧理想. 记 $\{u_i\} \in \langle E, E\rangle$ 为 $\overline{\langle E, E\rangle}$ 的逼近单位元.

因

$$\begin{aligned}||x - xu_i||^2 &= ||\langle x - xu_i, x - xu_i\rangle|| \\ &= ||\langle x, x\rangle - u_i\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle u_i + u_i\langle x, x\rangle u_i|| \\ &\leqslant ||\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle u_i|| + ||u_i\langle x, x\rangle u_i - u_i\langle x, x\rangle|| \\ &\leqslant ||\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle u_i|| + ||\langle x, x\rangle u_i - \langle x, x\rangle|| \to 0,\end{aligned}$$

故 $E\langle E, E\rangle$ 在 E 中稠密. 证毕.

注　(1) 若 $\overline{\langle E, E\rangle} = A$, 则称 E 是全 (full)Hilbert C^*- 模;

(2) 由性质 1.1.1 知, EA 在 E 中稠密, 于是若 A 有单位元 1, 则 $x1 = x, \forall x \in E$; 若 A 无单位元，记 $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$, 定义 $x1 = x$, 其中 $1 = (0, 1)$ 为 $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ 的单位元, 则 E 成为 $\tilde{A}$ 上的 Hilbert C^*- 模.

1.1.2　有界模映射

设 E, F 均为 C^*- 代数 A 上的 Hilbert C^*- 模, E, F 作为线性空间, 可定义线性映射 $T : E \to F$. 进一步, 若 T 还满足

$$T(xa) = T(x)a, \quad \forall x \in E, a \in A,$$

则称 T 是从 E 到 F 的 A- 线性模映射, 简称 A- 模映射, 或模映射, 或模算子.

注意到 E, F 还是 Banach 空间, 因此可定义算子范数:

$$||T|| = \sup\{||Tx|| : ||x|| \leqslant 1\}.$$

若 $||T|| < +\infty$, 则称 T 是有界模映射. 记从 E 到 F 的有界模映射全体的集为 $B(E, F)$.

定义1.1.6 对于线性映射 $T: E \to F$, 若存在线性映射 $S: F \to E$, 使得 T 与 S 关于 A- 值内积共轭, 即 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle, \forall x \in E, y \in F$, 则 T 称为具有伴随的映射. 此时 S 称为 T 的伴随映射, 改记为 T^*.

我们可以证明上述具有伴随的映射 T 一定是有界 A- 模映射.

事实上, 因

$$\begin{aligned}&\langle T(xa), y\rangle = \langle xa, T^*(y)\rangle\\&=a^*\langle x, T^*(y)\rangle = a^*\langle T(x), y\rangle\\&=\langle T(x)a, y\rangle, \quad \forall x \in E, y \in F, a \in A,\end{aligned}$$

故

$$T(xa) = T(x)a.$$

表明 T 是 A- 模映射.

再证 T 有界. 为此, 任意固定 $x \in E$, 定义线性映射:

$$T_x : F \to A, y \to \langle Tx, y\rangle.$$

因

$$||T_x(y)|| = ||\langle Tx, y\rangle|| = \langle x, T^*y\rangle \leqslant ||x|| \cdot ||T^*y||,$$

表明 T_x 关于 $y \in F$ 逐点有界. 于是由 Banach-Steinhaus 定理 (即一致有界性定理) 知, T_x 关于 $y \in F$ 一致有界, 即存在与 y 无关的常数 $M(> 0)$ 使得

$$||T_x|| \leqslant M||x||.$$

由此得

$$||T_x(y)|| = ||\langle Tx, y\rangle|| \leqslant M||x|| \cdot ||y||.$$

然后令 $y = Tx$, 得

$$||Tx||^2 = ||\langle Tx, Tx\rangle|| \leqslant M||x|| \cdot ||Tx||.$$

若 $||Tx|| \neq 0$, 由上式得

$$||Tx|| \leqslant M||x||;$$

若 $||Tx|| = 0$, 此式亦成立. 因此 T 有界.

记 $L(E,F)$ 为从 E 到 F 的具有伴随的模映射全体的集. 由上述证明知, $L(E,F) \subseteq B(E,F)$. 因 Hilbert 空间之间每个有界线性算子都有伴随算子, 当 E,F 均退化为 Hilbert 空间时, $L(E,F) = B(E,F)$. 但一般地, $L(E,F) \neq B(E,F)$. 这也是 Hilbert C^*- 模与 Hilbert 空间的本质区别.

还是考虑无穷维可分 Hilbert 空间 H. 记 $E = K(H)$, $F = B(H)$, 则 E,F 均可看成 C^*- 代数 $B(H)$ 上的 Hilbert C^*- 模.

令 $j: E \to F$, 为嵌入映射, 则 j 无伴随映射. 否则, 假若 $t: F \to E$, 为 j 的伴随映射, 则

$$\langle jx, y\rangle = \langle x, ty\rangle, \quad \forall x \in E, y \in F.$$

注意到

$$jx = x, \quad x \in E,$$

得

$$\langle x, y\rangle = \langle jx, y\rangle = \langle x, ty\rangle.$$

即

$$\langle x, ty - y\rangle = 0.$$

于是

$$ty - y \in E^{\perp} = K(H)^{\perp} = \{0\}.$$

从而得

$$ty = y, \quad \forall y \in F = B(H).$$

表明 t 是恒同映射, 由此得 $K(H) = B(H)$. 矛盾.

注　(1) 特别地, 若 $E = F$ 则分别改记 $B(E,F)$, $L(E,F)$ 为 $B(E)$, $L(E)$;

(2) 利用泛函分析的基本知识易证, 关于算子范数:

$$||T|| = \{||Tx|| : ||x|| \leqslant 1\},$$

$B(E,F)$, $L(E,F)$ 均为 Banach 空间; 进而再关于通常的算子乘法, $B(E)$ 为 Banach 代数, 而 $L(E)$ 是 C^*- 代数.

下面给出 $L(E)$ 为 C^*- 代数的证明：首先 $L(E)$ 关于上述定义的算子范数是 Banach 空间. 然后, 对于任意 $T_1, T_2 \in L(E)$, 易证 T_1T_2 具有伴随 $T_2^*T_1^*$. 于是 $T_1T_2 \in L(E)$. 再定义 $*$ 运算：

$$*: L(E) \to L(E), T \to T^*, \quad \forall\, T \in L(E).$$

由

$$
\begin{aligned}
||T_1T_2(x)|| = *||T_1(T_2(x))|| &\leqslant ||T_1|| \cdot ||T_2x|| \\
&\leqslant ||T_1|| \cdot ||T_2|| \cdot ||x||
\end{aligned}
$$

知

$$||T_1T_2|| \leqslant ||T_1|| \cdot ||T_2||.$$

又

$$
\begin{aligned}
||\langle Tx, y\rangle|| =||\langle x, T^*y\rangle|| &\leqslant ||x|| \cdot ||T^*y|| \\
&\leqslant ||T^*|| \cdot ||x|| \cdot ||y||.
\end{aligned}
$$

于是

$$||Tx|| = \sup\{||\langle Tx, y\rangle|| : ||y|| \leqslant 1\} \leqslant ||T^*|| \cdot ||x||,$$

从而得

$$||T|| \leqslant ||T^*||.$$

注意到

$$(T^*)^* = T,$$

类似于上述推理可得

$$||T^*|| \leqslant ||T||,$$

故

$$||T|| = ||T^*||.$$

这表明 $*$ 运算是等距映射. 综上所证, $L(E)$ 是 Banach $*$ 代数.

最后证明 C^*- 恒等式:

$$||T^*T|| = ||T||^2, \quad \forall T \in L(E).$$

由前面的证明知

$$||T^*T|| \leqslant ||T^*|| \cdot ||T|| = ||T||^2.$$

于是只需证明

$$||T^*T|| \geqslant ||T||^2.$$

事实上

$$
\begin{aligned}
||Tx||^2 &=||\langle Tx, Tx\rangle|| \\
&=||\langle x, T^*Tx\rangle|| \leqslant ||T^*Tx|| \cdot ||x|| \\
&\leqslant||T^*T|| \cdot ||x||^2,
\end{aligned}
$$

从而

$$\begin{aligned}||T|| &= \sup\{||Tx|| : ||x|| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{||T^*T||^{1/2}||x|| : ||x|| \leqslant 1\} \\ &= ||T^*T||^{1/2}.\end{aligned}$$

至此, $L(E)$ 为 C^*- 代数.

性质1.1.2 给定 $T \in (E, F)$ 及 $x \in E$, 则成立

$$\langle Tx, Tx\rangle \leqslant ||T||^2\langle x, x\rangle.$$

证明 任给 C^*- 代数 A 上的态 f, 则 E 关于共轭双线性映射:

$$(x, y) \to f(\langle x, y\rangle), \quad \forall x, y \in E$$

成为非负定内积空间. 反复利用经典的 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned}f(\langle T^*Tx, x\rangle) \leqslant &[f(\langle T^*Tx, T^*Tx\rangle)]^{1/2} \cdot [f(\langle x, x\rangle)]^{1/2} \\ =&[f((T^*T)^2x, x)]^{1/2} \cdot [f(\langle x, x\rangle)]^{1/2} \\ \leqslant&[f(\langle (T^*T)^2x, (T^*T)^2x\rangle)]^{1/4} \cdot [f(\langle x, x\rangle)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \\ &\cdots\cdots \\ \leqslant&[f(\langle (T^*T)^{2^n}x, x\rangle)]^{2^{-n}} \cdot [f(\langle x, x\rangle)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \\ \leqslant&[||T^*T||^{2^n}f(\langle x, x\rangle)]^{2^{-n}} \cdot [f(\langle x, x\rangle)]^{1-2^{-n}} \\ \leqslant&||T^*T|| \cdot (||x||^2)^{2^{-n}} \cdot [f(\langle x, x\rangle)]^{1-2^{-n}}.\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 得

$$f(\langle T^*Tx, x\rangle) \leqslant ||T^*T||f(\langle x, x\rangle) = f(||T||^2\langle x, x\rangle).$$

注意到 f 为 A 上任意态, 故得

$$\langle T^*Tx, x\rangle \leqslant ||T||^2\langle x, x\rangle,$$

即

$$\langle Tx, Tx\rangle \leqslant ||T||^2\langle x, x\rangle.$$

证毕.