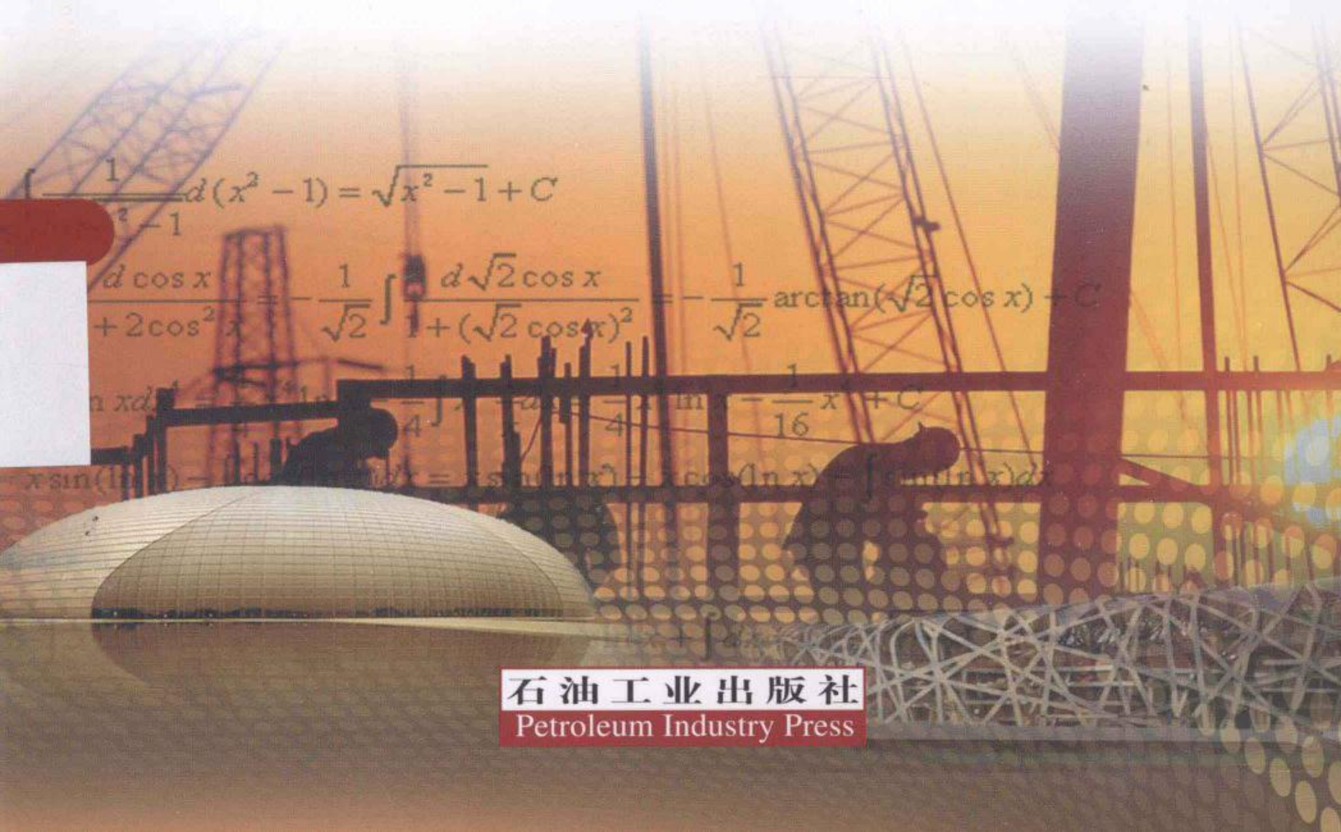
北京高等教育精品教材

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

高等数学

第二版 上册

宋国华 崔景安 主编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

北京高等教育精品教材

高 等 数 学

第二版 上册

宋国华 崔景安 主编

石 油 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书为北京市高等教育精品教材，全书分为上、下两册。上册内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、微分方程。本书注重应用性，在讲述基础理论的同时，注意数学思维方式与应用的介绍，适当增加实例及例题分析。全书各章节都配有习题和总习题，用以掌握和巩固所学知识。

本书可作为建筑类院校本科教材，也可作为普通工科院校学生和教师参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/宋国华，崔景安主编. —2 版.
北京：石油工业出版社，2013.9

ISBN 978－7－5021－9700－1

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①宋…②崔…
Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 176117 号

出版发行：石油工业出版社
(北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011)
网　址：http://pip.cnpc.com.cn
编辑部：(010)64523579　发行部：(010)64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013 年 9 月第 2 版　2013 年 9 月第 3 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：22.5
字数：580 千字

定价：39.00 元
(如出现印装质量问题，我社发行部负责调换)

第二版前言

《高等数学》第一版出版后，得到了许多同行教师及学生的使用与厚爱，并于2011年被评为北京高等教育精品教材。这次修订的第二版，是根据近年来工科院校学生实际和建筑类院校学科专业需求，使教材在系统性、科学性、应用性方面更加有利于学生理性精神的培养、科学素质的锻造、分析解决实际问题能力的提高。

第二版教材基本保留了第一版的特色。遵照“在基础课的教学中，要以学生的思维训练和专业课服务为目的”，着重思想方法及应用的介绍，以“必须”、“够用”为度，坚持“服务于技术基础课、专业课”的原则；在教材内容编排上，注重对知识的重点、难点分析，以及知识点的概括和归纳总结；注重学生考研对基础知识的需求，以及专业之间需求重点的差别；注重相关知识在工程实践中的应用，增加了部分具有土木、管理等实际背景的例题和习题。

第二版在第一版的基础上作了较大变动，进一步突出微积分中实用的分析，着重基本技能的训练，强调数学的思想和方法。对部分基本概念、性质和定理进行了修订，阐述力求符合学生的认知规律；为了培养学生应用数学的意识和能力，删减了抽象且运算复杂的例题与习题，增加了部分具有土木、管理等实际背景的例题；对繁琐的理论推导进行了适度约简，增加了图形的几何直观解释，力求使学生能够形象地理解数学理论抽象的内涵。

《高等数学》(第二版)各章修订分工如下：第一章张艳，第二章吕亚芹，第三章张蒙，第四章程士珍，第五章白羽，第六章代西武，第七章、第十一章崔景安，第八章侍爱玲，第九章、第十章王晓静，第十二章刘长河。教材的统稿和定稿由宋国华、崔景安、李泽妤、张艳负责。

本套教材得以再版，诚挚感谢北京市属高等学校人才强教深化计划(No:PHR201107123)的支持和石油工业出版社的协作。

在本教材再版之际，我们对第一版使用期间收到的专家、学者及使用本套教材的教师、同学们提出的宝贵意见和建议表示衷心的感谢，真诚地期望能够继续受到关注并且得到使用本套教材的专家、同仁和读者朋友们的批评指导，将不胜感激。限于水平，书中的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正，希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使本教材日趋成熟。

编者

2013年4月

第一版前言

本书是在2002年北京市教育委员会教改立项的基础上，于2007年确立的北京市高等学校精品教材立项课题，是课题组成员多年教学改革和实践工作的总结。

目前国内外《高等数学》教材版本较多，主要适用于一般工科院校。本书的特点是结合地方工科院校学生实际和建筑类院校学科专业需求，遵照“在基础课教学中，要以应用为目的”，着重思想方法及应用的介绍，以“必须”、“够用”为度，坚持“服务于技术基础课、专业课”的原则。在教材内容编排上，注重对知识的重点、难点分析，以及知识点的概括和归纳总结。注重相关知识在工程实践中的应用，选编了部分有工程实践背景的例题和习题。注重学生入学前基础知识的差别，以及专业之间需求重点的差别。在习题选编方面，既考虑到对教材基本知识的消化理解，以巩固所学知识，又考虑到后续各专业基础课和专业课的学习，使之为工程教育服务；同时也考虑到报考研究生学生的需求。由于目前高等数学课程学时普遍减少和相关专业对高等数学课程要求的差异，以及地方院校生源的水平、层次之间的差别和部分学生考研等的需要，在教材内容及例题的配备方面，尽量融教材、解题方法、学习指导为一体。

整套教材由《高等数学》(上、下册)和与之配套的《高等数学习题详解》两部分组成。《高等数学》(上册)内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、微分方程共七章；《高等数学》(下册)内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共五章。每节后配有习题，每章后配有总习题。

《高等数学》(上、下册)各章撰稿人分别是：第一章刘颖、李泽好，第二章吕亚芹，第三章马龙友、李泽好，第四章寿玉亭、程士珍，第五章和第八章宋国华，第六章代西武，第七章窦家维，第九章李泽好，第十章寿玉亭、李泽好，第十一章马龙友、宋国华，第十二章刘长河、张艳。《高等数学习题详解》各章撰稿人分别是：第一章和第三章张蒙，第二章吕亚芹，第四章程士珍，第五章李泽好、白羽，第六章代西武，第七章窦家维，第八章和第十一章李泽好、侍爱玲，第九章和第十章王晓静，第十二章张艳、刘长河。整套教材的内容结构由主编宋国华教授和李泽好教授主持设计制定，并负责统稿和定稿。

本教材出版前，邀请了沈阳航空工业学院、沈阳建筑大学和北京建筑工程学院部分教师对《高等数学》教材进行了认真的审查。同时在北京建筑工程学院部分专业进行试用，根据大家的意见和建议，编写组又做了进一步的修改。本教材的出版，得到了北京市教育委员会高教处、北京建筑工程学院领导及教务处同志们的热情关心和极大的帮助，在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中的错误和不当之处，敬请读者和同行批评指正。

编者

2009年4月

目　　录

第一章　函数与极限

高等数学研究的对象是变量之间的依赖关系，即函数，函数是客观世界中变量之间相互依赖关系的一种反映．高等数学就是用不断运动和无限变化的观点来描述函数的变化规律，即用极限方法来研究函数，极限是研究函数的一种基本方法．高等数学中几乎所有的概念都离不开极限．本章将主要介绍函数与极限、连续的一些基本概念及重要性质．

第一节　函　　数

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数的概念，并在此基础上讨论了函数的一些基本性质．本节除对中学数学中已学习过的函数及其性质复习外，根据后续内容的需要，对函数作必要的补充．

一、集合、常量与变量

1. 集合

1)集合的定义及表示方法

所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合(集合简称集)的事物称为该集合的元素．集合常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示；集合的元素常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示．如果 a 是集合 A 的元素，称作 a 属于 A，记作 $a\in A$；否则，称为 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 不含任何元素的集合，称为空集，记作 ϕ. 若集合 A 仅含有限个元素，称 A 为有限集；否则，称 A 为无限集．

集合的表示方法通常有两种：一种是列举法，就是把集合中的所有元素列举出来．例如，$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 表示自然数全体所组成的集合．$A=\{a,b,c,d\}$ 表示由 a,b,c,d 四个元素组成的集合．另一种是特性表示法，就是把集合中元素的特性表示出来．例如，xOy 平面上坐标适合方程 $y=x^2$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M，可记作 $M=\{(x,y)\,|\,x,y$ 为实数$,y=x^2\}$.

本书常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{C}$ 表示复数集．如果没有特别声明，下面提到的数都是实数．

2)区间

在高等数学中最常见的一类实数集是区间．设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则定义：

开区间：$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$. 闭区间：$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开半闭区间：$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间称为有限区间．此外还有无限区间．

引进符号“∞”，读作“无穷大”，符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，符号“$-\infty$”读作“负无穷大”．给出以下无限区间的记号及定义：

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$，

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$，

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$.

在不需要辨别所讨论区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间的情况下，就简称它为“区间”，用 I 来表示．

3）邻域

邻域是一个特殊的区间，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$. 点 a 的 δ 邻域：设 δ 是一个正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$，点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径（图 1－1）.

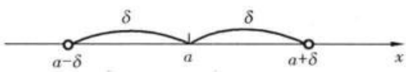


图 1－1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此，$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体．

点 a 的去心 δ 邻域：有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$，这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

2. 常量与变量

在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，这种量称为常量；还有一些量在过程中变化着，这种量称为变量．

例如，在圆的半径增加的过程中，圆的周长、圆的面积都是变量，而圆的周长与其直径之比却是常量（圆周率 π）.

通常用字母 a,b,c 等表示常量，x,y,z 等表示变量．

二、函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时遇到几个变量，这些变量的变化并不是孤立的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律．为了探索和掌握运动的规律性，就必须深入研究变量的变化状态和变量间的依赖关系．下面引入函数的概念．

1. 函数的定义

定义 1－1　设 x、y 是两个变量，变量 x 的变化范围为 D. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 遵照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域．

当 x 取 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值．当 x 取遍 D 的所有数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$，称为函数的值域．

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 可以改用其他字母表示，如：“φ”、“g”、“h”等，相应的函数表示为 $y=\varphi(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$等．

由函数的定义可知，定义域、对应法则是确定函数的两个基本要素．研究函数时必须注意它的定义域，两个函数当它们的定义域和对应法则分别相同时，便视为是相同的函数，否则认

为两个函数是不同的．

如果自变量在定义域中任取一数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数．例如，$y=\sqrt{1-x^2}$在$[-1,1]$表示一个单值函数．

$x^2+y^2=1$，当 x 在$(-1,1)$内变化时，相应的 y 有两个值与其对应，即 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 因此，当 $x\in[-1,1]$时，$x^2+y^2=1$ 确定一个以 x 为自变量，y 为因变量的多值函数．

注：以后没有特别说明时，函数都是指单值函数．

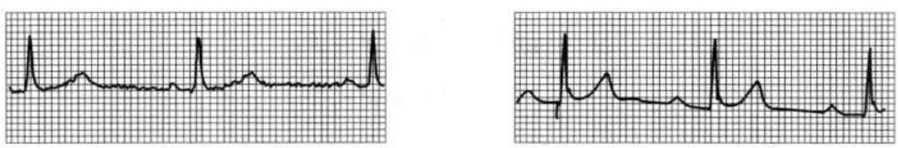
2. 函数的表示方法

一般地，函数可以用三种不同的方法来表示，即表格法、图像法和公式法．表格法的特点是简明方便，缺点是限制自变量的取值必须有限．例如，无理数$\sqrt{3}$的近似值是精确度的函数，对应关系见表 1－1.

表 1－1

精确度	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
近似值	1.7	1.73	1.732	1.7321	1.73205	…

图像法的特点是形象直观，富有启发性，一目了然．缺点是函数关系不明确．例如，图1－2 中心电图(EKG)显示两个人的心率模式，图 1－2(a)表示正常，图 1－2(b)表示不正常．



(a)　　　(b)

图 1－2

尽管也可以构造出一个心电图函数公式，但很复杂，实际上也很少这样做．这种重复出现的图形正是医生需要了解的．

公式法是把一个函数的数学表达式完整表示出来，依照它，从自变量的值可以计算出因变量的对应值．其特点是精确、完整，便于理论上的应用．例如，$y=\sin x$，$y=\ln x$，$y=\begin{cases} x^2, x\geqslant 0, \\ x, \ x<0 \end{cases}$ 等．

3. 函数的图形

如果一个函数由数学表达式给出，而定义域没有具体给出，那么它的定义域就是使得数学表达式有意义的自变量所有取值的全体．如果该函数有实际背景，则它的定义域还要根据问题的实际条件来确定．

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，在 xoy 平面上确定一点(x,y). 当 x 取遍 D 上的每一个数值时，得到点(x,y)的一个集合 C：$C=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$，这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$的图形.

4. 分段函数

分段函数是用公式法定义的一类特殊函数，在其定义域的不同范围用不同数学表达式表示．在自然科学和工程技术中，经常会遇到分段函数．

下面介绍几个分段函数．

例 1—1 绝对值函数(图 1—3)

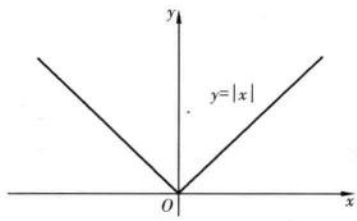


图 1—3

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

在今后的计算中可能会遇到表达式中含有绝对值的情况，必须按绝对值的分段定义去掉绝对值符号方可运算．

例 1—2 取整函数 $y=[x]$，$x\in(-\infty,+\infty)$．符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数(图 1—4)．例如，$[4]=4$，$[4.23]=4$，$[-4.23]=-5$，$[\sqrt{3}]=1$. 不难看出，取整函数有如下性质：$[x]\leqslant x<[x]+1$.

例 1—3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其图像见图 1—5. 对任意的 $x\in R$，总有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$，起到了简化表达式的作用．

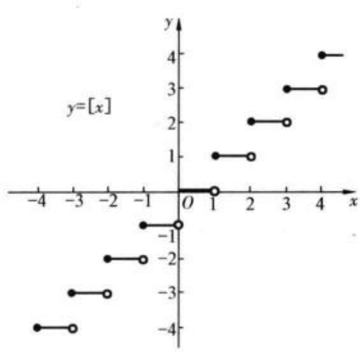


图 1—4

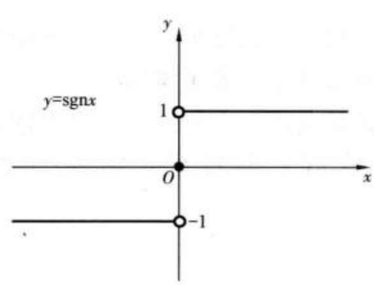


图 1—5

例 1—4 狄利克雷函数(Dirichlet)

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数定义在整个数轴上，把全体实数分成两类，有理数的函数值为 1，无理数的函数值为 0. 数轴上有理点与无理点都是稠密的．图 1—6 是它的示意图．

例 1－5 按 1999 年 3 月 1 日上海市邮政局公布的国内邮件资费表，由上海寄往外埠的信函，首重 100g 内，每重 20g（不超出 20g 按 20g 计算）邮资为 0.80 元；续重 101g～2000g 每重 100g（不足 100g 按 100g 计算）邮资为 2.00 元．这段话确定了邮资与信函重量之间的函数关系．

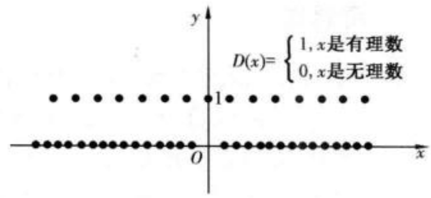


图 1－6

以 $p=p(w)$ 表示这个函数，其中 w 表示信函重量（单位：g），$w\in N$，由于电子秤显示的最小单位为 g，故 w 取正整数，且 $1\leqslant w\leqslant 2000$；$p$ 表示邮资（单位：元），则 $p(w)$ 可表示如下：

$$p(w)=\begin{cases}0.80k, & \text{当 } 20(k-1)<w\leqslant 20k,(k=1,2,3,4,5),\\ 4.00+2.00k, & \text{当 } 100k<w\leqslant 100(k+1),(k=1,2,\cdots,19).\end{cases}$$

$p(w)$ 就是一个分成 24 段的分段函数．

例 1－6 设 $f(x)=\begin{cases}2+x, x\leqslant 0,\\ 2^x, x>0.\end{cases}$ 求 $f(-3)$，$f(0)$，$f(3)$.

解 分段函数计算函数值时，要根据自变量所在的范围，用相应的表达式计算．

$f(-3)=(2+x)|_{x=-3}=2-3=-1, f(0)=(2+x)|_{x=0}=2, f(3)=2^x|_{x=3}=2^3=8.$

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使 $\forall x\in X$（“$\forall$”表示“任意”），都满足 $|f(x)|\leqslant M$，就称函数 f 在 X 上有界．

如果这样的 M 不存在，就称 f 在 X 上无界．换言之，若对任意给定的一个正数 M（无论它多么大），总有某个 $x_0\in X$，使得 $|f(x_0)|>M$，那么称 f 在 X 上无界．

如果存在常数 M_1，使 $\forall x\in X$，都有 $f(x)\geqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界；如存在常数 M_2，使 $\forall x\in X$，都有 $f(x)\leqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界．

函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界．

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是实数域 R 上的有界函数．$y=x^2$ 在实数域 R 上无界，而在 $(0,1)$ 内有界．$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $[1,+\infty)$ 内有界．

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$（I 是 D 的子集），如果 $\forall x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．

单调增加或单调减少的函数均称为单调函数．

例如，$y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，$y=-x^3$ 在定义域内单调减少．

在第三章中将介绍判别函数单调性的更一般方法．

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（当 $x\in D$ 时，必有 $-x\in D$），如果对任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$，就称 $f(x)$ 是偶函数（图 1－7）；如果对任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，就称 $f(x)$ 是奇函数（图 1－8）．

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

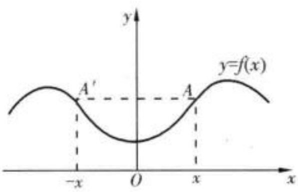


图 1－7

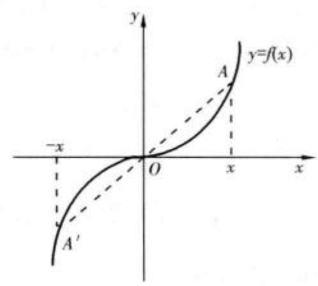


图 1－8

利用函数的奇偶性简化运算是今后解题中常见的手段．函数的奇偶性是针对对称区间而言的．判断函数的奇偶性的方法除根据定义外，也可以利用奇偶性已知的函数来判断．例如，$\sin x$，$\arctan x$，x^3，x^5，x^{2n+1}（n 为正整数）等都是奇函数；$\cos x$，x^2，x^4，x^{2n}（n 为正整数）等都是偶函数．下面给出两个判断奇偶性的重要结论：

（1）两个奇函数的和是奇函数；两个偶函数的和是偶函数；奇函数与偶函数的和既非奇函数又非偶函数．

（2）两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；奇函数与偶函数的乘积是奇函数．

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对每一个 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期．通常说的周期是指最小正周期．

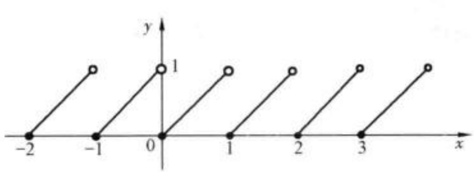


图 1－9

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，$y=\tan x$ 是周期为 π 的周期函数，$y=x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数（图 1－9）．

一个周期为 T 的周期函数，在其定义域内每个长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状．反之，若在定义域内每个长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状，则此函数可延拓成以 T 为周期的周期函数．

应当注意，并不是所有的周期函数都存在最小正周期．例如，本节例 1－4 所给的狄利克雷函数，是周期函数，任何正有理数 r 都是它的周期，因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期．

四、反函数

函数 $y=f(x)$表示了 y 依赖于 x 的对应关系，x 是自变量，y 是因变量．如果反过来，让 y 独立变化，考察 x 如何依赖 y 而变化，就引出了反函数的概念．

定义 1—2 设 $y=f(x)$，$x\in D$ 为单值函数，若对值域 W 中每一个 y，都有确定且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则按此对应法则就得到了一个定义在 W 上的函数，称这个函数为 $f(x)$的反函数，记作：

$f^{-1}:W\to D$ 或 $x=f^{-1}(y)$，$y\in W$.

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以通常把上述反函数写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$.

反函数的定义域是原函数的值域，值域是原函数的定义域，相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in W$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数，见图 1—10.

在同一坐标平面上，$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图像相同，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，见图1—11.

虽然 $y=f(x)$是单值函数，反函数 $y=f^{-1}(x)$却不一定是单值的．一般地，将函数 $f(x)$限制在它的一个单调区间 I 上，这样得到的反函数就是单值的，称为反函数的一个分支．例如，$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$上的反函数．

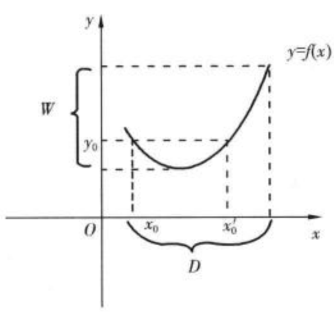


图 1—10

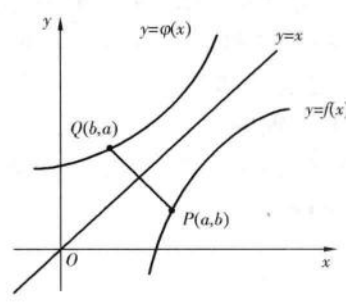


图 1—11

五、复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为基本初等函数．

1)幂函数

函数 $y=x^{\mu}$(μ 是常数)称为幂函数．幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域要视 μ 的值而定．例如，$y=x^{-\frac{1}{3}}$的定义域为 $x\in R$，$x\neq0$，$y=x^{\frac{1}{2}}$的定义域是$[0,+\infty)$，$y=x^3$ 定义域为 R 等．但无论 μ 取何值，幂函数在$(0,+\infty)$内总有定义．$y=x^{\mu}$ 中，$\mu=1,2,\frac{1}{2}$(图 1—12)，$\mu=3$(图 1—13)，$\mu=-1$(图1—14)，这些都是最常见的幂函数．

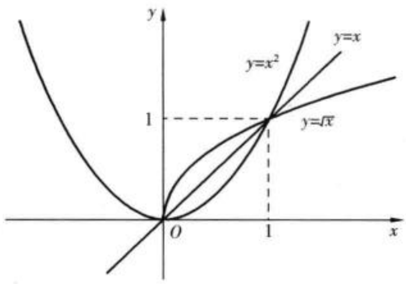


图 1—12

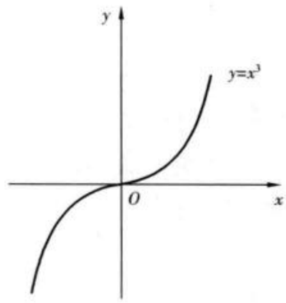


图 1—13

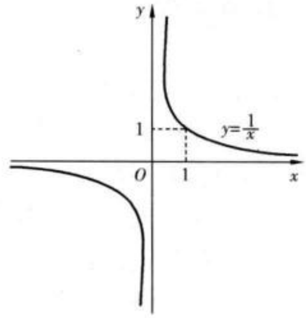


图 1—14

2)指数函数和对数函数

函数 $y=a^x$(a 是常数,且 $a>0,a\neq1$)称为指数函数,定义域为 R. 因为对于任何实数 x,总有 $a^x>0$,又 $a^0=1$,所以指数函数的图形总是在 x 轴的上方,且通过(0,1)点(图 1—15). 若 $a>1$,指数函数 a^x 是单调增加的.若 $0<a<1$,指数函数 a^x 是单调减少的.

$y=(\frac{1}{a})^x=a^{-x}$的图形与 $y=a^x$ 的图形是关于 y 轴对称的.

以常数 e=2.718281828459045…为底的指数函数 $y=e^x$ 是科学技术中常用的指数函数,关于常数 e 的意义将在第六节中说明.

对数函数是指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记作 $y=\log_a x$(a 是常数,且 $a>0,a\neq1$).对数函数的定义域是$(0,+\infty)$,它的图形与指数函数 $y=a^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,总位于 y 轴的右方且通过(1,0)点. 当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加;当$0<a<1$时,它单调减少(图 1—16). 当 $a=e$ 时,把 $\log_a x$ 记为 $\ln x$,称为自然对数函数. 这是工程中常见的函数.

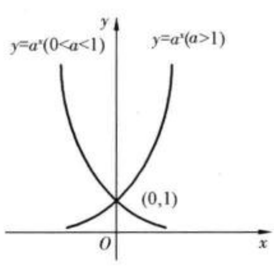


图 1—15

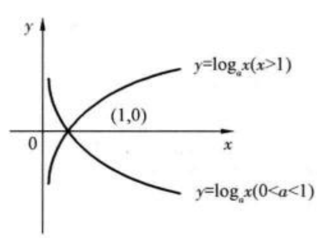


图 1—16

通过计算,可将 $y=\log_a x$ 转换成自然对数函数. 事实上,由 $y=\log_a x$ 定义可知 $a^y=x$,两端取自然对数 $y\ln a=\ln x$ 从而$y=\frac{\ln x}{\ln a}$,这就是转换关系式.

3)三角函数和反三角函数

(1)三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 的性质如表 1—2 所示.