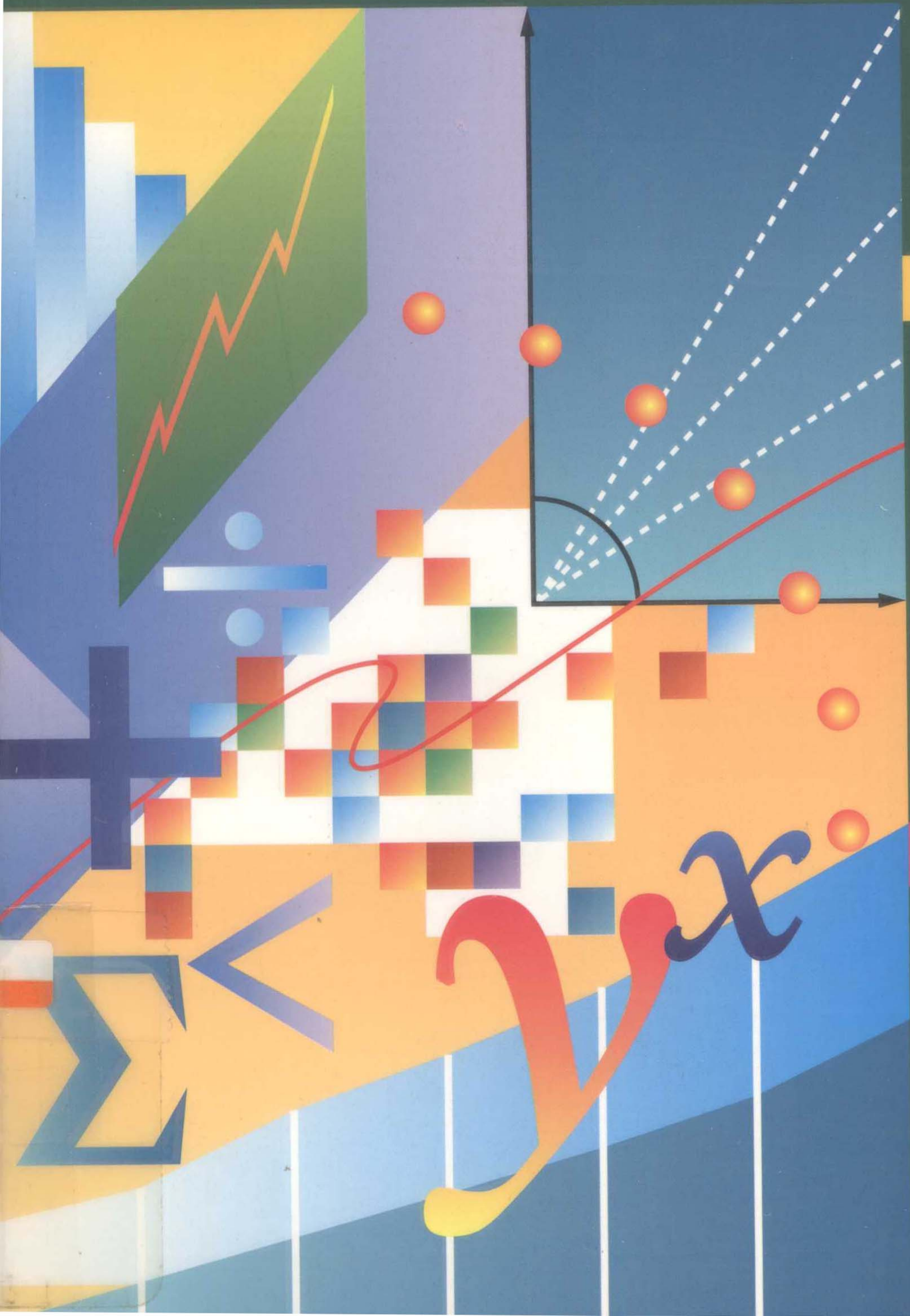
文達附加數學



蘇一方
黃鳴嬋

第三版

教師手冊

2

第四部分

向量

第十二章
二維空間的向量

（相片）路標上的指示牌猶如向量般指示不同地方的方向和距離。

12 二維空間的向量

探討重點

向量是一個包含數值和方向，以用作理解某些物理量（例如力和位移）的抽象概念。這個概念對某些學生可能太抽象而難於理解，教師宜在討論向量運算時提出物理方面的類比。

純量積及其應用是本章的重要部分。學生需要較多的例子以理解向量方法的功效（例如用純量積證明垂直性）和運用的技巧。

本章目的

通過學習本章，你將學會：

1. 界定向量、單位向量和零向量的定義。
2. 用有向線段表示向量。
3. 求向量的和、差以及向量與純量的乘積。
4. 界定位置向量的定義。
5. 求線段分點的位置向量。
6. 在直角坐標系中以 $ai + bj$ 表示向量。
7. 計算向量的純量積。
8. 應用向量證明幾何命題及簡單的物理學問題。

教學重點

時間分配：1

應用實際例子來介紹向量的概念和指出向量和純量之間的分別。亦可用有向線段來表示向量。

自由向量的概念是從向量的相等定義引伸出來的。建立這個概念後，學生便能學習運用向量方法證明兩線段是否平行。

12-1 純量與向量

在物理學中的量可分為兩種。一種量只以數量的大小表示，例如：質量、長度、溫度、體積和電荷等，均可用一實數表示。我們稱這種量

導彈的飛行軌道可用向量表示。

為純量*(或標量)。另一種物理量不僅有數值的大小，且包括方向，例如：力、速度、加速度和電場強度等。我們稱這種量為向量*(或矢量)。

一個具有大小和方向的量稱為向量。

如圖 12.1 所示，某人從 A 向東走 40 m 至 B，然後再向北走 30 m 至 C。

$$\begin{aligned}\text{他所走的總距離} &= AB + BC \\ &= (40 + 30)\ \text{m} \\ &= 70\ \text{m}\end{aligned}$$

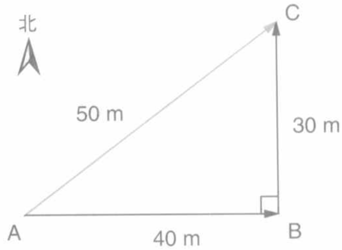


圖 12.1

但是若考慮這個人的位移，他只是由最初在 A 的位置變為最後在 C 的位置，所以位移是 50 m 而方向為由 A 至 C。由此可見，距離是純量而位移是向量。

以上的例子正好啟發我們如何表示向量。如圖 12.2 所示，我們定義由 P 至 Q 的線段為由 P 至 Q 的有向線段*。P 稱為始點*，Q 稱為終點*。由 P 至 Q 的有向線段稱為由 P 至 Q 的向量，記為 $\overrightarrow{PQ}$ 或 $\mathbf{PQ}$。向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的數值（或大小）是由 PQ 的長度所確定的，記為 $|\overrightarrow{PQ}|$，稱它為向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模*。向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向為由 P 至 Q 的方向。

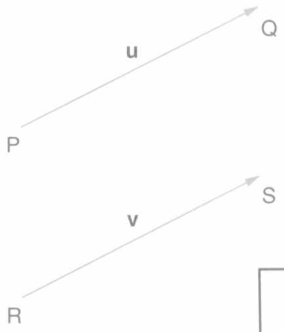


圖 12.2

如果兩個向量有相同的模和方向，則稱此二向量相等。例如，圖 12.2 所示，$\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{RS}$ 是兩相等的向量，我們記為

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}\text{。}$$

故相等的向量並不需要有相同的始點和終點。上面的向量也稱為自由向量*。

如果我們不需要考慮向量的端點時，可以用黑體字母 **a**、**b**、**u**、**v** 或在普通小寫字母上加一箭頭即 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{u}$、$\vec{v}$ 或在字母下面加上 "_" 即 $\underline{a}$、$\underline{b}$、$\underline{u}$、$\underline{v}$ 來表示。

當向量的模為零時，則稱此向量為零向量*。例如，$\overrightarrow{PP}$ 為零向量。零向量可記為 $\mathbf{0}$（或 $\vec{0}$、$\underline{0}$），其方向是無法確定的。

純量 標量	Scalar
向量 矢量	Vector
有向線段	Directed line segment
始點	Initial point
終點	Terminal point
模	Magnitude
自由向量	Free vector
零向量	Zero vector

教學重點

時間分配：2

向量運算的介紹可用有向線段作為輔助。這樣可令學生更易理解運算的法則。

應討論到涉及單位向量和在向量純量積的例子。

12-2 向量的運算

A. 加法

1. 三角形加法

如圖 12.3 所示，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 為兩個連續的位移，此兩位移的結果是 $\overrightarrow{AC}$，因此我們定義

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

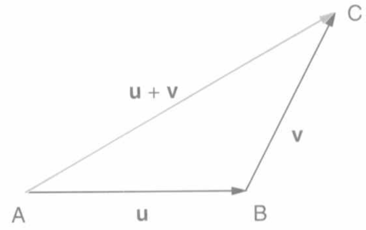


圖 12.3

我們稱此為向量的三角形加法*。

2. 平行四邊形加法

如圖 12.4 所示，ABCD 為以 AB 和 AD 作鄰邊的平行四邊形。因為平行四邊形的對邊平行且相等，

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}。$$

因此 $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

根據三角形加法，

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

即 $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}。$$

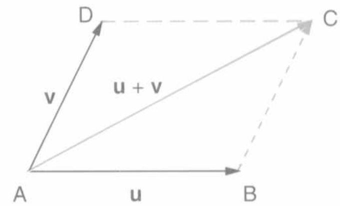


圖 12.4

假如我們用 **u** 和 **v** 表示平行四邊形相鄰的兩邊，則向量和 **u** + **v** 就是平行四邊形的對角線，稱這為向量的平行四邊形加法*。

而且 $$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$$

和 $$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}，$$ ◀ 根據三角形加法。

即 $$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \overrightarrow{AC}。$$

我們得出

$$\boxed{\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}}$$

這表示向量的加法適合加法的交換律。

三角形加法 Triangle law of addition
平行四邊形加法 Parallelogram law of addition

3. 多邊形加法

如果我們需要求若干個向量的和，可以在一個向量的終點順次接著下一個向量的始點，由此連成一條折線，如圖 12.5 所示，

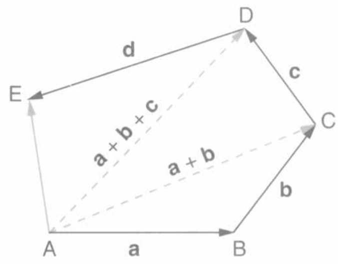


圖 12.5

則
$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AE}\text{。}\end{aligned}$$

因此，由第一個向量的始點至最後一個向量的終點的有向線段就是所求的和。而這些向量以及它們的和可形成一個多邊形，所以稱它為向量的多邊形加法*。

B. 減法

若向量 **b** 和向量 **a** 有相同的模，但是方向相反，則稱 **b** 為 **a** 的負向量*，記為 $-\mathbf{a}$。如圖 12.6 所示，

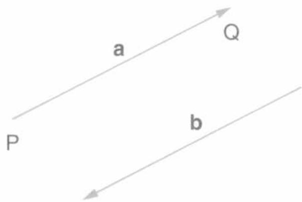


圖 12.6

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}\text{。}$$

也就是若 $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$，

則 $\mathbf{b} = -\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$。

二個向量 **u** 和 **v** 的差記為 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$，定義為 **u** 及 $-\mathbf{v}$ 的和。

即
$$\boxed{\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})}$$

如圖 12.7 所示，

$$\begin{aligned}\mathbf{u}-\mathbf{v} &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{CB}\text{。}\end{aligned}$$

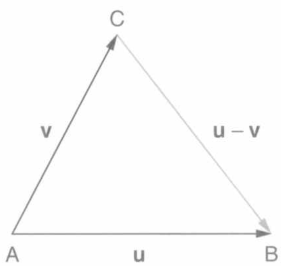


圖 12.7

多邊形加法
Polygon law of addition
負向量
Negative vector

C. 向量與純量的乘積

向量 $\mathbf{u}$ 與純量 k 的乘積記為 $k\mathbf{u}$。若 $k>0$，則 $k\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}$ 方向相同，而模為 $k|\mathbf{u}|$。若 $k<0$，則 $k\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}$ 方向相反，而模為 $|k|\cdot|\mathbf{u}|$。

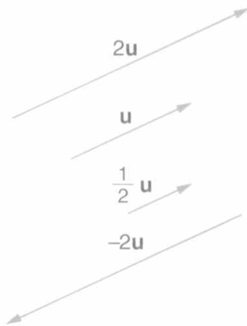


圖 12.8

若一個向量的模為 1 單位，則稱此向量為單位向量*。如果 $\mathbf{u}$ 為一非零向量，則與向量 $\mathbf{u}$ 的方向相同的單位向量記為 $\hat{\mathbf{u}}$，且

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}$$

D. 向量運算的性質

根據以上所敘述的向量的基本運算法則，我們可以證明向量有以下的運算性質：

若 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 為向量，而 m、n 為純量，則
1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
3. $m(n\mathbf{u}) = (mn)\mathbf{u} = n(m\mathbf{u})$
4. $m(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = m\mathbf{u}+m\mathbf{v}$
5. $(m+n)\mathbf{u} = m\mathbf{u}+n\mathbf{u}$

性質(**1**)在前面已經說明過了，下面我們將證明性質(**2**)和(**4**)。而性質(**3**)和(**5**)，則留待同學們自行推證。

性質(2)的證明：

如圖 12.9 所示，$\overrightarrow{OA} = \mathbf{u}$，$\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$，$\overrightarrow{BC} = \mathbf{w}$。

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{OC}\\ \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\ &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{OC}\\ \therefore\quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})\end{aligned}$$

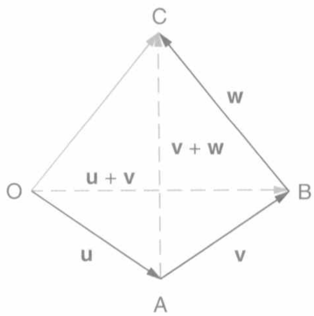


圖 12.9

單位向量
Unit vector

性質(4)的證明：

如圖 12.10 所示，$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$，$\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}$，

$\overrightarrow{A_1B_1} = m\mathbf{u}$，$\overrightarrow{B_1C_1} = m\mathbf{v}$。

$\therefore \quad \dfrac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{B_1C_1}|}{|\overrightarrow{BC}|} = m$

$\because$ $\mathbf{u}$ 和 $m\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ 和 $m\mathbf{v}$ 是有相同方向的向量，

AB // A_1B_1，BC // B_1C_1。

$\therefore \quad \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

因此 $\quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$。

$\therefore \quad |\overrightarrow{A_1C_1}| = m|\overrightarrow{AC}|$

又 $\quad \angle CAB = \angle C_1A_1B_1$，

故 $\quad AC \ // \ A_1C_1$

$\therefore \quad \overrightarrow{A_1C_1} = m\overrightarrow{AC}$，

即 $\quad m\mathbf{u} + m\mathbf{v} = m(\mathbf{u} + \mathbf{v})$。

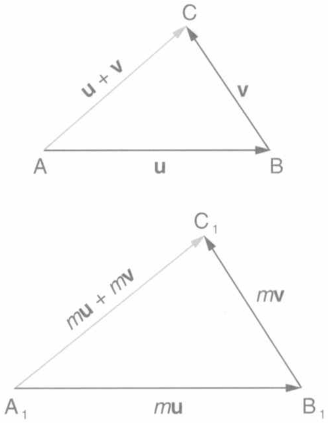


圖 12.10

訣要
有相同的模和方向的兩個向量為相等向量。

【例 1】 *若兩非零向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 之間的夾角為 θ，設 $|\mathbf{u}| = u$，$|\mathbf{v}| = v$，試以 u、v 和 θ 表 $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$。*

實習
課堂練習 #1-4
練習 甲 12

解：

如圖 12.11 所示，

$\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$，$\mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$。

根據平行四邊形加法，

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$。

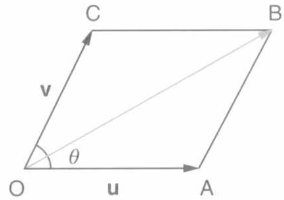


圖 12.11

這裏，OABC 為平行四邊形。

在 ΔOAB 中，根據餘弦公式，

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2(OA)(AB)\cos(180^\circ - \theta)$$

即 $\quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$

$\therefore \quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \underline{\underline{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta}}}$

$\angle OAB = 180^\circ - \theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

【例 2】 *ABCD 為一四邊形，P 和 Q 分別為 AB 和 CD 的中點。證明 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PQ}$。*

實習
練習 甲 1

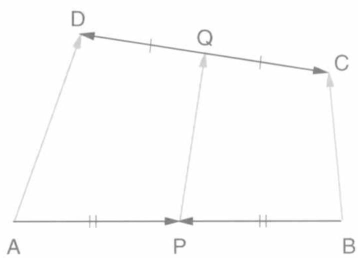


圖 12.12

證明：

如圖 12.12 所示，在四邊形 APQD 中，

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

在四邊形 BCQP 中，

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) + (2) 可得：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC}\\ &= (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QC}) + 2\,\overrightarrow{PQ}\\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + 2\,\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{PQ}$$

實習
課堂練習 #5
練習 甲 2,14

【例 3】 *在 ΔABC 中，D、E、F 分別為 BC、CA 和 AB 的中點。若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$，$\overrightarrow{AC} = \mathbf{q}$，試以 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ 表 $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{FD}$。*

解：

如圖 12.13 所示，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ &= \underline{\underline{-\mathbf{p} + \mathbf{q}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}\\ &= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{p}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FD} &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}(-\mathbf{p} + \mathbf{q})\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\mathbf{q}}}\end{aligned}$$

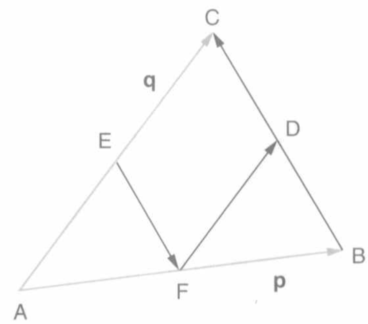


圖 12.13

【例 4】 在 ΔABC 中，M 和 N 分別為 AB 和 AC 的中點。證明 $MN \mathbin{/\!/} BC$，且 $MN = \dfrac{1}{2}BC$。

實習
練習 乙 15,16

證明：

如圖 12.14 所示，

$\because$ M 和 N 為 AB 和 AC 的中點，

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}，\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

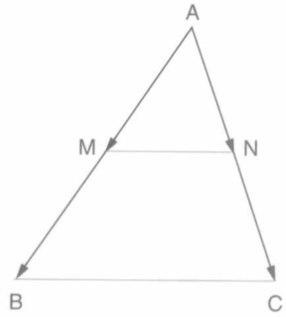


圖 12.14

$$\begin{aligned}\therefore \quad \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的方向相同且 $|\overrightarrow{MN}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$。

即 $MN \mathbin{/\!/} BC$，且 $MN = \dfrac{1}{2}BC$。

注意： 例 4 是用向量的方法證明三角形的中點定理。

【例 5】 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 為兩個互不平行的非零向量。

(a) 若 $m\mathbf{u} + n\mathbf{v} = \mathbf{0}$，證明 $m = n = 0$。

(b) 若 $p\mathbf{u} + q\mathbf{v} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$，證明 $p = r$ 和 $q = s$。

證明：

(a) 根據已知條件，

$$m\mathbf{u} + n\mathbf{v} = \mathbf{0}。$$

$$\therefore \quad m\mathbf{u} = -n\mathbf{v}$$

假設 $m \neq 0$，則

$$\mathbf{u} = (-\frac{n}{m})\mathbf{v}。$$

$\because$ $-\dfrac{n}{m}$ 是一純量，

這表示 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是互相平行的。

但是，這與 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是互不平行的已知條件矛盾，

因此 $m \neq 0$ 的假設是不正確的。

$\therefore$ $m = 0$

從而，$n = 0$。

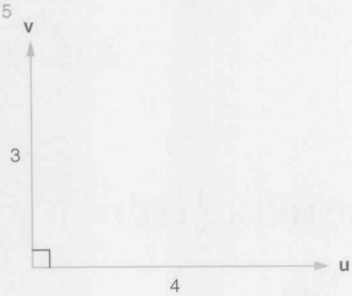
訣要
此例的結論在以後的課題中將加以應用。

(b)
$$p\mathbf{u}+q\mathbf{v} = r\mathbf{u}+s\mathbf{v}$$
$$\therefore \quad (p-r)\mathbf{u}+(q-s)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
利用**(a)**的結果得，
$$p-r = 0 \text{ 和 } q-s = 0$$
$$\therefore \quad p = r \text{ 和 } q = s\text{。}$$

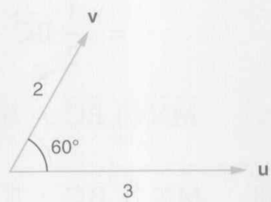
課堂练習 12-2

下列各圖中，已知向量的模如圖所示，試求 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 的模：**(1 – 4)**

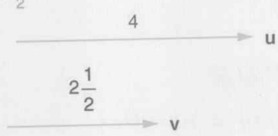
1. 5



2. $\sqrt{19}$



3. $6\frac{1}{2}$



4. 2

5. 已知 ABCDEF 為一正六邊形，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{u}$、$\overrightarrow{BC}=\mathbf{v}$、$\overrightarrow{CD}=\mathbf{w}$。試以 **u**、**v**、**w** 表下列各向量：

(a) $\overrightarrow{DE}$ −u

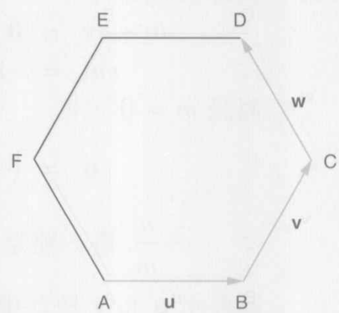
(b) $\overrightarrow{EF}$ −v

(c) $\overrightarrow{FA}$ −w

(d) $\overrightarrow{AC}$ u+v

(e) $\overrightarrow{AE}$ v+w

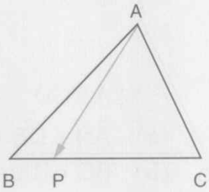
(f) $\overrightarrow{AD}$ u+v+w



練習 12-2

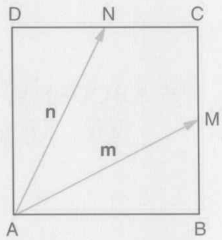
甲部

1. 如圖所示，P 為 BC 上的點，且 PC = 3PB。



   (a) 試以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BP}$ 表 $\overrightarrow{AP}$。 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$
   (b) 試以 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CP}$ 表 $\overrightarrow{AP}$。 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$
   (c) 證明 $4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}$。

2. 圖中所示，ABCD 為一正方形，M、N 分別為 BC 和 CD 的中點。設 $\overrightarrow{AM}=\mathbf{m}$，$\overrightarrow{AN}=\mathbf{n}$。

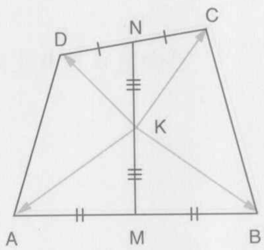


   (a) 試以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 表 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$。
   (b) 試以 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$ 表 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$。
   (c) 試以 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$ 表 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{BD}$。

   $\mathbf{m}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(2\mathbf{m}-\mathbf{n})$ $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\mathbf{m}+\mathbf{n})$

   $\mathbf{n}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(2\mathbf{n}-\mathbf{m})$ $\overrightarrow{BD}=2(\mathbf{n}-\mathbf{m})$

3. 已知 M 和 N 分別為四邊形 ABCD 的邊 AB 和 CD 的中點，K 為 MN 的中點。

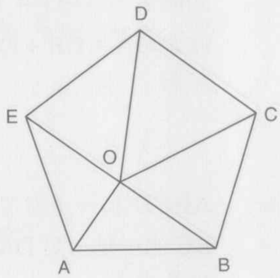


   (a) 證明 $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})$。
   (b) 證明 $\overrightarrow{KN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD})$。
   (c) 試求 $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$。 0

用一個向量表示下列各向量式：(4 – 7)

4. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$ $\overrightarrow{AE}$
5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$ $\overrightarrow{DB}$
6. $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$ $\overrightarrow{BA}$
7. $\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{DA}$

8. 設 O 為五邊形 ABCDE 內的任意一點，證明
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{EO})。$$



練習12-2 (甲) 題解

Q 1

(a) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$

(b) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$

(c) 已知 $PC=3PB$

即 $\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{BP}$

∴ 由 (a) 及 (b)，

$$3\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}=3\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$$
$$4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$$
$$=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CP}$$
$$=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}$$

Q 2

(a) $\mathbf{m}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$
$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (1

$\mathbf{n}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$
$=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .... (2

(b) 解 (1) 和 (2)，
$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(2\mathbf{m}-\mathbf{n})$,
$\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(2\mathbf{n}-\mathbf{m})$.

(c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
$=\frac{2}{3}(2\mathbf{m}-\mathbf{n})+\frac{2}{3}(2\mathbf{n}-\mathbf{m})$
$=\frac{2}{3}(\mathbf{m}+\mathbf{n})$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$
$=\frac{2}{3}(2\mathbf{n}-\mathbf{m})-\frac{2}{3}(2\mathbf{m}-\mathbf{n})$
$=\frac{2}{3}(3\mathbf{n}-3\mathbf{m})$
$=2(\mathbf{n}-\mathbf{m})$

Q 3

(a) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AM}$
$=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{MB}$
$=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KM}$
$2\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}$
∴ $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})$

(b) $\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CN}$
$=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{ND}$
$=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KN}$
∴ $\overrightarrow{KN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD})$

(c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
$=2\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{KN}$
$=2(\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KM})$
$=0$

Q 4

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$
$=\overrightarrow{AE}$

Q 5

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{DB}$

Q 6

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BA}$

Q 7

$\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{DA}$

(請兼看第 12 頁)

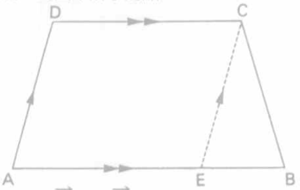
練習12-2(甲) 題解

Q 8

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}$
$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$
$\quad+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OD})$
$\quad+(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA})$
$=2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{EO})$

Q 9

設 E 為圖中所示的點。



則 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$
$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$
$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})$
$\quad+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$
$=2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})$

Q 10

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$
$=-\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{DB}$
$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}$
$=2\overrightarrow{DB}$

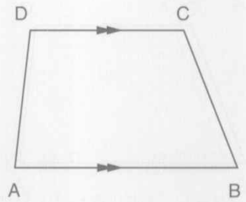
(b) 由 **(a)**，
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{DB}$
$=2\overrightarrow{BD}$
$\therefore\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$
$=2\overrightarrow{BD}+2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$
$=2(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB})$
$=2\overrightarrow{AD}$

Q 11

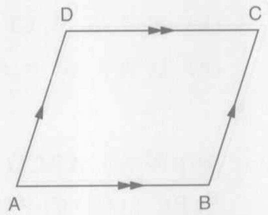
$\because\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$
及 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}$
$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$
$=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$
$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD})$
$=2\overrightarrow{AD}$

---

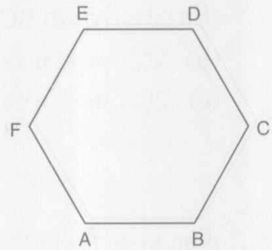
9. 設 ABCD 為一梯形，而 AB // CD。證明
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$
$=2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})$。



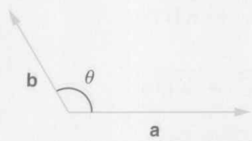
10. 已知 ABCD 為平行四邊形。證明
(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{DB}$。
(b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{AD}$。



11. 若 ABCDEF 為一正六邊形，證明
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AD}$。

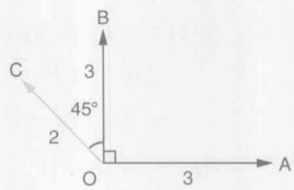


12. 設向量 **a** 和 **b** 之間的夾角為 θ。

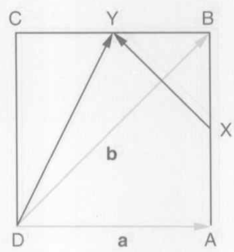


(a) 證明 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$。
(b) 試求 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ 的值，
(i) 若 $|\mathbf{a}|=6$，$|\mathbf{b}|=8$，$\theta=90°$。 10
(ii) 若 $|\mathbf{a}|=4$，$|\mathbf{b}|=3$，$\theta=120°$。 $\sqrt{37}$

13. 如圖示，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=3$ 和 $|\overrightarrow{OC}|=2$。試求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 的模和它與 $\overrightarrow{OA}$ 之間的夾角。 $\sqrt{22}$, 70.2°

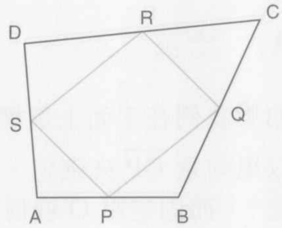


14. ABCD 為一正方形，X 和 Y 分別為 AB 和 BC 的中點。設 $\overrightarrow{DA}=\mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{DB}=\mathbf{b}$，試以 **a** 和 **b** 表示：
(a) $\overrightarrow{XY}$ $\quad\frac{1}{2}(\mathbf{b}-2\mathbf{a})$
(b) $\overrightarrow{DY}$ $\quad\frac{1}{2}(2\mathbf{b}-\mathbf{a})$



乙部

15. ABCD 為一四邊形，P、Q、R、S 分別為各邊的中點。已知 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$，$\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$，$\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$，$\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$。



(a) 以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表 $\overrightarrow{PQ}$。 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

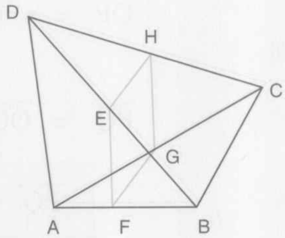
(b) 以 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 表 $\overrightarrow{QR}$。 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(c) 以 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{d}$ 表 $\overrightarrow{RS}$。 $\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$

(d) 以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{d}$ 表 $\overrightarrow{SP}$。 $\frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})$

(e) 求證 PQRS 為平行四邊形。

16. 如圖所示，ABCD 為一四邊形，E、F、G、H 分別為 BD、AB、AC 和 CD 的中點。證明

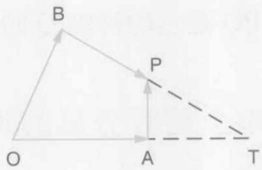


(a) $\overrightarrow{HG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$，

(b) $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$，

(c) EFGH 為平行四邊形。

17. 如圖所示，$\overrightarrow{OA} = 4\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB} = 4\mathbf{b}$ 和 $\overrightarrow{BP} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$。

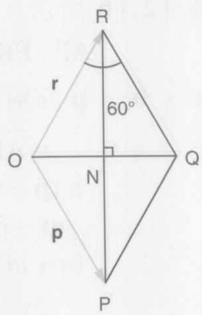


(a) 試以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{AP}$。 $\overrightarrow{OP} = 3(\mathbf{b}+\mathbf{a})$, $\overrightarrow{AP} = 3\mathbf{b}-\mathbf{a}$

(b) 若 BP 和 OA 交於點 T，$BT = mBP$，$OT = nOA$，試求 m 和 n 的值。 $m = 4$, $n = 3$

[提示：$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{OT}$]

18. 設 OPQR 為一菱形，其對角線交於點 N。設 $\angle ORQ = 60°$，$\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$，$\overrightarrow{OR} = \mathbf{r}$。

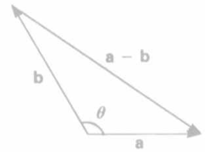


(a) 試求出圖中哪些向量可以表示為 $\mathbf{p}$ 或 $\dfrac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r})$。 $\overrightarrow{RQ}$；$\overrightarrow{RN}$，$\overrightarrow{NP}$

(b) 若 $|\mathbf{p}| = 1$，試求 $|\mathbf{p} + \mathbf{r}|$ 的值。

練習12-2 (甲) 題解

Q 12

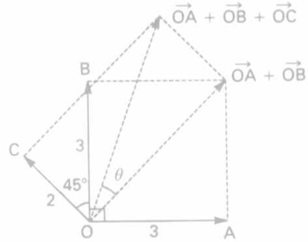


(a) 根據餘弦公式，
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \cos \theta$

(b) (i) 若 $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 8$, $\theta = 90°$,
則 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 6^2 + 8^2 - 2(6)(8) \cos 90°$
$= 100$
$\therefore \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 10$

(ii) 若 $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\theta = 120°$,
則 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 120°$
$= 37$
$\therefore \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{37}$

Q 13



$\because \quad \angle AOB = 90°$

$\therefore \quad |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 = 3^2 + 3^2$
$= 18$
$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 3\sqrt{2}$

$\because \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\therefore \quad |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2$
$= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$
$= 18 + 2^2$
$= 22$

$\therefore \quad |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \sqrt{22}$

$\tan \theta = \dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \theta = 25.2°$

由此，$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 所成的夾角為 $45° + 25.24° = 70.2°$

Q 14

(a) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (-\frac{1}{2}\mathbf{a})$
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) - \frac{1}{2}\mathbf{a}$
$= \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \frac{1}{2}\mathbf{a}$
$= \frac{1}{2}(\mathbf{b} - 2\mathbf{a})$

(b) $\overrightarrow{DY} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CY}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{YB}$
$= \mathbf{b} - \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$
$= \frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$

教學重點

時間分配：2

位置向量可被想像成從同一機場出發的航機路向。與自由向量不同，位置向量有固定的起點。

當學生發現向量和坐標幾何的分點公式相似之處，前者的公式將能較易記憶。

12-3 位置向量

A. 定義

如果我們在平面上選擇一固定點 O，則平面上任意一點 P 的位置可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 來確定。所以，向量 $\overrightarrow{OP}$ 稱為點 P 關於點 O 的位置向量*，而固定點 O 就稱為原點*。

如圖 12.15 所示，P 和 Q 為平面上的任意兩點，若它們的位置向量記為

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} \text{ 和 } \overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}，$$

則

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}。$$

$$\therefore \quad \boxed{\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p}}$$

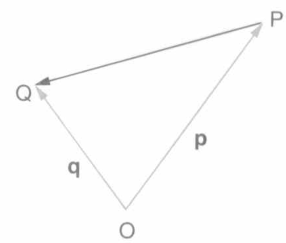


圖 12.15

因此，平面上任意一個向量都可以用位置向量來表 $\overrightarrow{PQ}$ 是它的終點 Q 的位置向量與始點 P 的位置向量的差。

B. 線段分點的位置向量

如圖 12.16 所示，點 P 內分線段 AB 成 $m : n$，

即 $\quad AP : PB = m : n$。

設 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{p}$ 分別為 A、B、P 關於點 O 的位置向量。

則

$$\begin{aligned} n\,\overrightarrow{AP} &= m\,\overrightarrow{PB} \\ \therefore \quad n(\mathbf{p}-\mathbf{a}) &= m(\mathbf{b}-\mathbf{p}) \\ n\mathbf{p} - n\mathbf{a} &= m\mathbf{b} - m\mathbf{p} \\ (n+m)\mathbf{p} &= n\mathbf{a} + m\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{p} = \frac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n}}$$

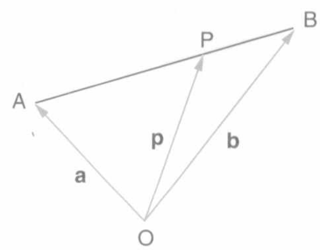


圖 12.16

當 P 外分 AB 時，則比值 $m : n$ 取負數。

位置向量
Position vector
原點
Origin

若 M 為 AB 的中點，即 $m : n = 1 : 1$，則

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

【例 1】 *在 ΔOAB 中，點 P 分 AB 為 $3:1$。若點 A 和點 B 關於點 O 的位置向量分別為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，試求點 P 關於點 O 的位置向量 $\mathbf{p}$。*

實習
課堂練習 #1
練習 甲 4

解：

$$\mathbf{p} = \frac{1\mathbf{a}+3\mathbf{b}}{3+1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{p} = \frac{1}{4}\mathbf{a}+\frac{3}{4}\mathbf{b}$$

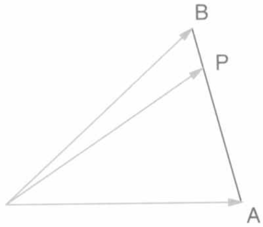


圖 12.17

【例 2】 *如圖 12.18 所示，$ABCD$ 為一平行四邊形，O 為平面上的任意一點，G 為 ΔAOD 的重心。若 A、B、C 關於點 O 的位置向量分別為 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$，試以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 表示點 D 和 G 的位置向量。*

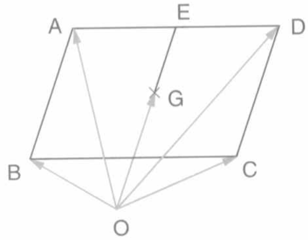


圖 12.18

實習
課堂練習 #2

解：

$\because$ AB // DC 和 AB = DC

平行四邊形的對邊平行且相等。

$$\therefore \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
即 $$\overrightarrow{OD} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

設 E 為 AD 的中點。

則 $$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$$

而 $$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$$

三角形的重心分中線為 2 : 1。

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$$
$$= \frac{1}{3}[\mathbf{a}+(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})]$$
$$= \frac{2}{3}\mathbf{a}-\frac{1}{3}\mathbf{b}+\frac{1}{3}\mathbf{c}$$

實習
練習 甲 6
乙 11

【例 3】 如圖 12.19 所示，C 為 OB 的中點，$AD:DC=1:2$。若 A 和 B 關於點 O 的位置向量分別為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，試求

(a) D 的位置向量，

(b) $AE:EB$ 的值。

解：

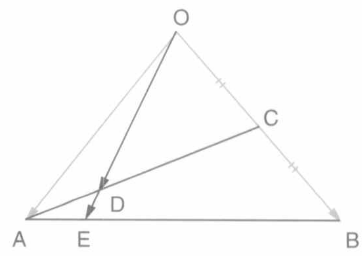


圖 12.19

(a)
$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$$
$$\overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{1+2} = \frac{2\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{6}\mathbf{b}}}$$

(b) 設 $AE:EB = r:1$。

則 $\overrightarrow{OE} = \dfrac{\mathbf{a}+r\mathbf{b}}{1+r}$ ....(1)

設 $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD}$。

則 $\overrightarrow{OE} = k(\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{6}\mathbf{b})$ ....(2)

由(1)和(2)，
$$\frac{1}{1+r}\mathbf{a}+\frac{r}{1+r}\mathbf{b} = \frac{2k}{3}\mathbf{a}+\frac{k}{6}\mathbf{b}$$
。

$\because$ $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互不平行，

$\dfrac{1}{1+r} = \dfrac{2k}{3}$ ....(3)

及 $\dfrac{r}{1+r} = \dfrac{k}{6}$ ....(4)

參閱第 12-2 節例 5 的結論。等式兩邊的 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 前面的純量相等。

$\dfrac{(4)}{(3)}$: $r = \dfrac{1}{4}$

即 $AE:EB = \dfrac{1}{4}:1 = \underline{\underline{1:4}}$