

罗小平 编著

过程装备测控技术

——线性与非线性控制理论及应用

GUOCHENGZHUANGBEI CEFKONGJISHU
XIAXING YU FEIXIAXING KONGZHI LILUN JI YINGYONG



化学工业出版社

过程装备测控技术

——线性与非线性控制理论及应用

罗小平 编著



化学工业出版社

· 北 京 ·

本书对过程装备与控制工程专业领域的现代控制原理进行了较为详细的阐述,各章节自成体系。介绍了过程控制线性系统的状态空间分析法、能控性和能观性、状态空间的结构分解、基于状态空间分析法的控制系统设计。并在此基础上介绍了非线性系统的能控性能观性及其结构分解、基于坐标变换的非线性系统部分线性化、非线性系统状态反馈精确线性化、非线性定值控制与随动控制等,同时介绍了线性自适应控制、非线性自适应控制,并对系统的不确定性描述及 H_∞ 控制的标准问题、互质分解、线性分式变换、 H_∞ 控制的稳定分析、 H_∞ 控制标准问题的 Riccati 方程解法、 H_∞ 状态反馈控制、 H_∞ 输出反馈控制、耗散性及能量存储函数、非线性状态反馈鲁棒控制、非线性输出反馈鲁棒控制等进行了较为详细的阐述。

本书可作为高等院校过程装备与控制工程、工业自动化等相关专业的研究生教材,也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

过程装备测控技术——线性与非线性控制理论及应用/
罗小平编著 北京:化学工业出版社,2013.2
ISBN 978-7-122-16085-0

I. ①过… II. ①罗… III. ①过程控制 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 304324 号

责任编辑:程树珍 金玉连
责任校对:宋 夏

装帧设计:杨 北:

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)
印 刷:北京市振南印刷有限责任公司
装 订:三河市宇新装订厂
787mm×1092mm 1/16 印张 20 $\frac{1}{2}$ 字数 509 千字 2013 年 11 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询:010-64518888 (传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899
网 址: <http://www.cip.com.cn>
凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:68.00 元

版权所有 违者必究

前言

过程装备与控制工程专业覆盖过程装备设计及过程装备控制等工业领域,实行大口径、宽适应方向办学,强调学生的动手能力、创新能力的基本训练,培养从事过程装备设计、机械制造自动化、过程装备控制等领域的高级人才,本书是为该专业研究生编写的控制类教材,主要供学生在学完本科自动控制原理、过程装备控制技术等课程后继续深入学习使用,以线性控制为主的内容可供硕士研究生使用,以非线性控制为主的内容可供博士研究生使用。根据专业教学特点,并结合本专业的“一体两翼”概念,即以“化工装备”为主体,以“化工过程”及“过程控制”为两翼,所编教材更进一步丰富了专业内涵,为本专业研究生进一步深入学习高等过程控制提供了良好的素材。

过程装备控制技术广泛应用于石化、轻工、食品、冶金、电力等行业,近年来,随着过程生产的复杂化及集成化,控制策略发生了根本性变化,由原来的以经典控制理论为主的控制方法逐步演化为以现代控制理论为基础的控制方法,控制结果的自适应性、鲁棒性、最优性、智能性、被控过程的非线性等得到了更为全面的考虑。本教材最后一章选择了一些近年来发表在国际杂志上的控制示例供读者参考。

本书在编写过程中力求遵守简单易懂,重点突出,知识实用等原则,重点放在介绍现代控制理论的核心思想与控制方法的引入原理上。考虑到工科研究生的数学基础,本书不追求定理的严格证明,并对所需微分几何、泛函分析等数学知识进行了简明扼要的介绍。本书也可作为工科电类、自动化类、力学类专业学生学习线性与非线性控制理论的参考,同时对高等学校相关专业教师、工程技术人员对非线性控制、自适应控制、鲁棒控制的应用研究具有一定的参考价值。

全书共分5章,第1章介绍了线性控制系统的基本原理及其设计方法,是后续章节的基础;第2章介绍了非线性控制系统的基本概念、分析原理与设计方法;第3章介绍了线性与非线性自适应控制的基本原理与设计方法;第4章在补充了相关的数学基础知识后重点介绍了线性与非线性鲁棒控制的分析原理与设计方法;第5章给出了上述章节的综合应用示例,5.2~5.7节的示例由研究生查阅国际文献并整理而成,研究生宁常军提供了5.2~5.4节的示例整理,研究生钟艳提供了5.5节的示例整理,研究生陈朗提供了5.6节的示例整理,研究生王维提供了5.7节的部分示例整理。由于书中公式较多,研究生黄大鹏、宁常军、钟艳、王维等为初稿打印付出了艰辛的努力,在此表示感谢!

本书的编写得到了华南理工大学研究生重点课程建设项目的支持,所涉及的微细通道相变传热控制研究得到了国家自然科学基金的资助(编号:21276090)。本书在编写过程中得到了众多学科前辈的大力指导及相关学科老师的热情帮助,在此表示衷心的感谢!

由于编者知识有限,书中缺点在所难免,恳请广大读者批评指正。

编者

2013年3月于广州

目 录

1 状态空间分析法	1
1.1 线性系统的状态空间表示	1
1.1.1 状态空间的基本概念	1
1.1.2 线性系统的状态空间表达式	2
1.1.3 状态空间表达式的建立	3
1.2 线性系统的状态解	14
1.2.1 线性定常连续系统齐次方程的解	14
1.2.2 线性定常连续系统的状态转移矩阵	15
1.2.3 线性定常连续系统非齐次状态方程的解	19
1.3 系统的能控性和能观性	20
1.3.1 线性连续系统的能控性	20
1.3.2 线性连续系统的能观性	22
1.3.3 能控及能观标准型	24
1.4 线性系统状态空间的结构分解	35
1.4.1 按能控性分解	36
1.4.2 按能观性分解	39
1.5 传递函数的状态空间实现	43
1.6 线性系统的稳定性	51
1.6.1 平衡状态	51
1.6.2 李雅普诺夫稳定性定义	52
1.6.3 李亚普诺夫第一法	53
1.6.4 李亚普诺夫第二法	55
1.7 基于状态空间分析法的控制系统设计	59
1.7.1 两类反馈结构对系统能控性、能观性的影响	61
1.7.2 两类反馈系统的极点配置	63
1.7.3 状态观测器	69
1.7.4 带状态观测器的状态反馈系统设计	79
参考文献	80
2 过程系统的非线性控制	81
2.1 非线性系统的能控性与能观性	81
2.1.1 能控性	81
2.1.2 能观性	85
2.2 非线性系统的局部能控性能观性分解	89
2.2.1 非线性系统能控性分解	95
2.2.2 非线性系统的能观性分解	100
2.3 基于坐标变换的非线性系统部分线性化	104
2.4 非线性系统状态反馈的精确线性化	113

2.5	非线性系统的全维状态观测器	119
2.6	非线性广义过程的定值控制与随动控制	125
2.6.1	非线性定值控制	125
2.6.2	非线性随动控制	131
	参考文献	136
3	自适应控制	138
3.1	线性自适应控制系统	138
3.1.1	参数最优化设计方法	138
3.1.2	Lyapunov 稳定性设计方法	140
3.2	非线性自适应控制	153
3.2.1	自适应定值控制	155
3.2.2	自适应随动控制	163
	参考文献	166
4	线性与非线性鲁棒控制	167
4.1	鲁棒控制的数学基础	167
4.1.1	距离空间	167
4.1.2	线性赋范空间	167
4.1.3	Banach 空间	167
4.1.4	Hilbert 空间	169
4.1.5	常用时域函数空间及其范数	170
4.1.6	常用频域函数空间及其范数	172
4.1.7	系统及其范数	176
4.2	系统不确定性描述与 H_∞ 控制标准问题	181
4.2.1	系统的不确定性描述	181
4.2.2	互质分解	186
4.2.3	线性分式变换	194
4.2.4	系统的稳定性及控制器的参数化设计	197
4.2.5	H_∞ 控制的标准化	205
4.2.6	H_∞ 标准化控制问题的稳定分析	212
4.2.7	广义被控过程的可稳定性	216
4.2.8	H_∞ 标准问题与模型匹配问题	219
4.3	标准 H_∞ 控制问题的 Riccati 方程解法	221
4.3.1	Riccati 方程与 H_∞ 范数	221
4.3.2	Lyapunov 方程及 Riccati 不等式	225
4.3.3	有理函数矩阵的内外分解	228
4.4	H_∞ 状态反馈控制	230
4.4.1	状态可测, 干扰不可测情况	231
4.4.2	状态和干扰都可测情况	234
4.5	H_∞ 输出反馈控制	238
4.5.1	H_∞ 输出反馈简化情况	238
4.5.2	H_∞ 输出反馈的一般情况	241

4.6 非线性鲁棒控制	242
4.6.1 耗散系统与能量存储函数	242
4.6.2 非线性状态反馈鲁棒控制	248
4.6.3 非线性输出反馈鲁棒控制	251
参考文献	253
5 控制理论应用实例	254
5.1 微细通道相变传热系统状态反馈精确线性化控制	254
5.1.1 微槽中流动汽泡的动力学模型	254
5.1.2 动力模型的 Lie 代数结构	256
5.1.3 状态反馈精确线性化控制的构建	256
5.2 基于状态观测器的连续搅拌反应釜非线性温度控制	257
5.2.1 数学模型的建立	258
5.2.2 降阶观察器	258
5.2.3 输入-输出反馈线性控制器的设计	259
5.2.4 输出反馈反推控制器设计	261
5.2.5 仿真	263
5.2.6 结论	266
5.3 基于非线性模型的二元蒸馏塔控制	267
5.3.1 精馏塔降阶模型	268
5.3.2 控制算法的建立	268
5.3.3 精馏塔模型	269
5.3.4 状态估计	269
5.3.5 控制器参数整定	270
5.3.6 结果分析	270
5.4 模拟五效蒸发器模型的非线性控制研究	271
5.4.1 MIMO GLC 结构简介	271
5.4.2 五效蒸发器的 MIMO GLC	273
5.4.3 蒸发模型的非线性控制	274
5.4.4 蒸发器模型的闭环仿真	280
5.4.5 结论	285
5.5 家畜建筑物温湿度非线性控制	288
5.5.1 非线性控制基础	288
5.5.2 家畜建筑物内湿热控制的数学模型	289
5.5.3 温湿度调节非线性鲁棒控制器设计	291
5.5.4 模拟研究	293
5.6 不可压缩流体的非线性控制	296
5.6.1 二维 Navier-Stokes 方程空间分解	296
5.6.2 非线性模型降阶	298
5.6.3 非线性控制	299
5.6.4 Burgers 方程的非线性有限维控制	301
5.6.5 二维槽道非线性有限维控制	304

5.7 轴向压缩系统喘振的非线性控制	307
5.7.1 喘振模型	307
5.7.2 基于模型的观测器设计	308
5.7.3 输入输出反馈线性化输入的推导	310
5.7.4 系统喘振控制器和观测器验证方法	312
5.7.5 闭环系统性能评价	313
5.7.6 结论	315
附录 喘振模型方程	316
参考文献	318

1 状态空间分析法

在经典控制理论中,用传递函数来设计和分析单输入-单输出系统,而传递函数是从系统的外部观察系统时得出的系统数学模型的一种描述,不涉及系统内部的动态过程,因而传递函数被称为系统的外部描述模型。从能否完全揭示系统的全部运动状态来论,传递函数显然有其不足之处。

在现代控制理论中,系统是用由一组状态变量构成的一阶微分方程组来描述的,这组状态变量能够表达系统内部运动的全部动态过程,因而它能更深刻地揭示系统的特征。由于系统的状态空间描述不但能反映系统的外部行为,而且能揭示系统内部的运动规律,所以它被称为系统的内部描述模型。由于状态空间分析方法可以很方便地处理初始条件,又适用于非线性系统、多输入多输出系统、时变系统、随机系统和离散系统,同时又可方便地用计算机求解,所以它很快就发展起来,并得到了广泛的应用。

1.1 线性系统的状态空间表示

1.1.1 状态空间的基本概念

1.1.1.1 状态

状态是指系统过去、现在和将来的运动状况,即系统在时域中的行为或运动信息的集合。

1.1.1.2 状态变量

系统的状态变量是指可以完全表征系统运动状态的最少个数的一组变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$, 并且满足下列两个条件:

(1) 在任何时刻 $t=t_0$, 这组变量的值 $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, $\dots$, $x_n(t_0)$ 都表示系统在该时刻的状态;

(2) 当系统在 $t \geq t_0$ 的输入和上述初始状态确定的时候,状态变量应完全能表征系统在将来的行为。

【例 1.1】RLC 网络如图 1.1 所示。

图中, $u(t)$ 为输入电压, u_c 为输出电压。

系统有两个储能元件,即电容 C 和电感 L ,显然电流 $i(t)$, 电感电压 $u_L(t)$, 电容电压 $u_c(t)$ 都可以作为状态变量。然而,完全描述该网络的状态只需两个状态变量就足够了。可以写出

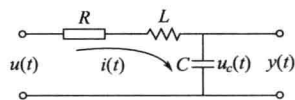


图 1.1 RLC 网络

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u \\ C \frac{du_c}{dt} = i \end{cases} \quad (1.1.1)$$

由式(1.1.1)可以看出,只要知道了初始电流 $i(t_0)$ 和电容 C 上的初始电压 $u_c(t_0)$,并且知道 $t \geq t_0$ 时电压 $u(t)$,那么在 $t \geq t_0$ 时,网络中任一时刻的状态就可以确定。所以 $i(t_0)$

和 $u_c(t_0)$ 是最少一组变量。

1.1.1.3 状态向量

设一个系统有 n 个状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$, 用这 n 个状态变量作为分量所构成的矢量 $\mathbf{X}$, 称为该系统的状态向量。

1.1.1.4 状态空间

状态矢量所有可能值的集合称为状态空间。系统在任一时刻的状态都可用状态空间中的一点表示。

1.1.1.5 状态方程

描述系统的状态变量与输入变量之间关系的一阶微分方程组称为系统的状态方程。状态方程表征了系统由输入所引起的内部状态的变化, 即系统的内部描述。

1.1.1.6 输出方程

描述系统输出变量与输入变量及状态变量之间函数关系的代数方程称为输出方程。输出方程表征了系统内部状态的变化和输入所引起系统输出的变化, 它是一个变换过程, 即系统的外部描述。

1.1.1.7 状态空间表达式

系统状态方程和输出方程的组合称为状态空间表达式, 又称为动态方程。状态空间表达式反映了控制系统的全部信息, 是对系统的完整描述。

1.1.2 线性系统的状态空间表达式

对于一个有 r 个输入 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\dots$, $u_r(t)$; m 个输出 $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\dots$, $y_m(t)$ 的连续时间系统 (图 1.2), 假设能充分描述该系统的 n 个状态变量为 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$, 则每个状态变量在任何时刻 t 的一阶导数可表示为该时刻的 n 个状态变量和 r 个输入的一个函数, 即

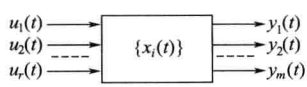


图 1.2 多输入-输出
连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2r}u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nr}u_r \end{cases} \quad (1.1.2)$$

多输入-输出系统可用图 1.2 所示的一个方块来表征

输出方程为

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \dots + d_{1r}u_r \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \dots + d_{2r}u_r \\ \vdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \dots + d_{mr}u_r \end{cases} \quad (1.1.3)$$

线性系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad t \geq t_0 \quad (1.1.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} & \mathbf{D}(t) &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

若系统是线性定常系统, 则 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ 等矩阵的元素既不依赖于输入、输出, 也与时间无关。

1.1.3 状态空间表达式的建立

对系统的状态描述可以通过微分方程, 传递函数, 方框图等建立。不论上述哪种系统或哪种方法, 一般都遵循步骤: ①确定系统的状态; ②选择状态变量; ③根据系统的给定形式, 列写系统的状态方程; ④化简状态方程, 并写成矩阵形式。

1.1.3.1 由系统微分方程建立状态空间表达式

(1) 系统输入量中不含导数项

设有如下单输入、单输出的线性系统

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{y(t)}$$

该系统的运动方程可用下述微分方程描述

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = bu \quad (1.1.6)$$

这是一个 n 阶系统, 有 n 个状态变量。根据微分方程理论, 当 $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ 及 $t \geq 0$ 时的 $u(t)$ 已知, 方程的解就唯一被确定。因此可选输出量 y 及 y 的各阶导数共 n 个变量作为系统的一组状态变量。令

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} \end{cases} \quad (1.1.7)$$

由上式可看出各个状态变量依次是变量 y 的各阶导数, 满足此条件的变量称为相变量。现在取相变量作为状态变量, 故上式可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + bu \end{cases} \quad (1.1.8)$$

上式就是系统的状态方程，写成矩阵式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

系统的输出为 y ，而 $y=x_1$ ，因此有

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

写成一般式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.1.9)$$

式中，矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 可写成下面的形式

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

【例 1.2】 已知系统的输入输出微分方程为

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 3u$$

试列写其状态空间表达式。

解 选 $\frac{y}{3}, \frac{\dot{y}}{3}, \frac{\ddot{y}}{3}$ 为状态变量，即 $x_1 = \frac{y}{3}, x_2 = \frac{\dot{y}}{3}, x_3 = \frac{\ddot{y}}{3}$ ；可得

$$\dot{x}_1 = \frac{\dot{y}}{3} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\ddot{y}}{3} = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\dddot{y}}{3} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u$$

$$y = 3x_1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 系统输入量中含有导数项

设线性定常系统的运动方程可用下述微分方程描述, 即

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_nu^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1.1.10)$$

一般输入量中导数项的次数小于或等于系统的次数 n 。为了避免在状态方程中出现 u 的导数项, 可以选择如下的一组状态变量。

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\ \vdots \\ x_{n-1} = \dot{x}_{n-2} - \beta_{n-2} u = y^{(n-2)} - \beta_0 u^{(n-2)} - \beta_1 u^{(n-3)} - \cdots - \beta_{n-2} u \\ x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-1} u \end{cases} \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)反映了 y 及 y 的各阶导数与状态变量之间的关系, 整理可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} \dot{u} \end{cases} \quad (1.1.12)$$

结合式(1.1.10) ~ 式(1.1.12) 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} \dot{u} \\ \quad = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n \\ \quad + (b_n - \beta_0) u^{(n)} + (b_{n-1} - \beta_1 - a_{n-1} \beta_0) u^{(n-1)} \\ \quad + (b_{n-2} - \beta_2 - a_{n-1} \beta_1 - a_{n-2} \beta_0) u^{(n-2)} \\ \quad \vdots \\ \quad + (b_1 - \beta_{n-1} - a_{n-1} \beta_{n-2} - a_{n-2} \beta_{n-3} - \cdots - a_1 \beta_0) \dot{u} \\ \quad + (b_0 - a_{n-1} \beta_{n-1} - a_{n-2} \beta_{n-2} - \cdots - a_0 \beta_0) u \end{cases} \quad (1.1.13)$$

若选择

$$\begin{cases} \beta_0 = b_n \\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_1 - a_{n-1}\beta_{n-2} - a_{n-2}\beta_{n-3} - \cdots - a_1\beta_0 \\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \cdots - a_0\beta_0 \end{cases} \quad (1.1.14)$$

则由式(1.1.13)可得系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + \beta_n u \end{cases} \quad (1.1.15)$$

系统输出方程为

$$y = x_1 + \beta_0 u \quad (1.1.16)$$

可写成矩阵的形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad (1.1.17)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad (1.1.18)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (1.1.19)$$

从上面的分析可见,不论输入函数 $u(t)$ 是否含有导数项,系统矩阵 $\mathbf{A}$ 都是一样的。这说明系统矩阵只与系统本身有关,而与输入无关。输入函数的导数项只能改变输入矩阵 $\mathbf{B}$ 中的元素。

【例 1.3】 给定系统方程为 $\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$, 输出量为 $y(t)$, 控制量为 $u(t)$, 试写出状态空间表达式。

解 令

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\ x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\ x_4 = \dot{x}_3 - \beta_3 u = \ddot{\ddot{y}} - \beta_0 \ddot{\ddot{u}} - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} - \beta_3 u \end{cases}$$

利用式(1.1.14) 确定待定系数。

$$\begin{cases} \beta_0 = b_3 = 0 \\ \beta_1 = b_2 - a_2\beta_0 = 1 - 4 \times 0 = 1 \\ \beta_2 = b_1 - a_2\beta_1 - a_1\beta_0 = 1 - 4 \times 1 - 2 \times 0 = -3 \\ \beta_3 = b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 = 3 - 4 \times (-3) - 2 \times 1 - 1 \times 0 = 13 \end{cases}$$

得状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u = x_3 + (-3)u = x_3 - 3u \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + \beta_3 u = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 13u \end{cases}$$

输出方程

$$y = x_1 + \beta_0 u = x_1 + 0u = x_1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1.1.3.2 由系统传递函数建立状态空间表达式

传递函数转化为状态方程的方法有多种, 以下介绍两种将传递函数转化为标准状态方程的方法。

第一种方法是直接求解系统输出的最高导数项 $y^{(n)}(t)$ 表达式, 并作为综合点的输出, 而后通过积分求 $y(t)$ 及其各阶导数项, 并按 $y^{(n)}(t)$ 的表达式反馈给综合点。

如二阶系统

$$W(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.1.20)$$

可写为

$$b_0 U(s) = (s^2 + a_1 s + a_0) Y(s)$$

设初始条件为零, 对上式求 Laplace 逆变换得

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (1.1.21)$$

由式(1.1.21) 求输出 $y(t)$ 的最高阶导数

$$\ddot{y}(t) = b_0 u(t) - a_1 \dot{y}(t) - a_0 y(t) \quad (1.1.22)$$

根据式(1.1.22) 可构建状态方框图, 需要把 $\ddot{y}(t)$ 作为综合点的输出, 如图 1.3(a) 所示, 然后沿着综合点的输出方向逐渐添加积分方框 $\int$, 直到总输出为 $y(t)$ 为止。参见图 1.3(b)。

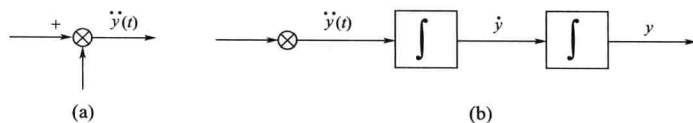


图 1.3 方框图的画法

式(1.1.22) 含有 y 的各阶导数, 再按式(1.1.22) 反馈给综合点即可得如图 1.4 所示框图; 把积分方框的输出变量定义为状态变量, 则可得系统的状态方框图 (图 1.5)。

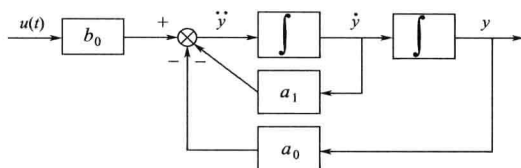


图 1.4 系统方框图

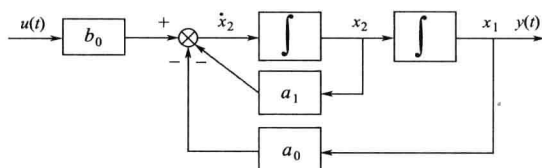


图 1.5 基于系统状态描述的方框图

如图 1.5 可得出

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = b_0 u(t) - a_0 x_1 - a_1 x_2$$

由此得状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (1.1.23)$$

系统输出

$$y = x_1$$

其中, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ 。

对于多阶系统, 设有传递函数

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1.1.24)$$

设

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

即

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)Y(s) = b_0U(s)$$

对上式两侧取 Laplace 反变换得

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$$

可得

$$y^{(n)}(t) = b_0u(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1y'(t) - a_0y(t) \quad (1.1.25)$$

把 $y^{(n)}(t)$ 作为综合点的输出, 并在输出方向引入 n 个积分方框 $\int$, 从而得 y 的各阶导数项及输出 y , 而后按式(1.1.25) 引入反馈得如图 1.6 所示状态方框图。

把 b_0 移到右侧不改变传递函数的结果, 并根据前述方法定义 $\int$ 后的输出为状态变量得图 1.7。

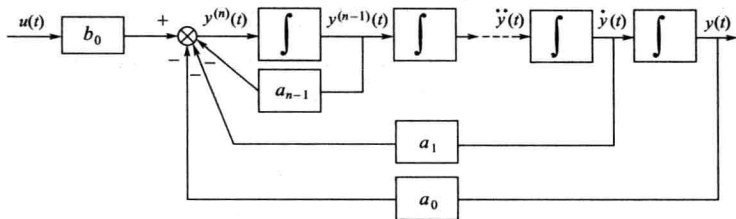


图 1.6 与微分方程对应的多重反馈方框图

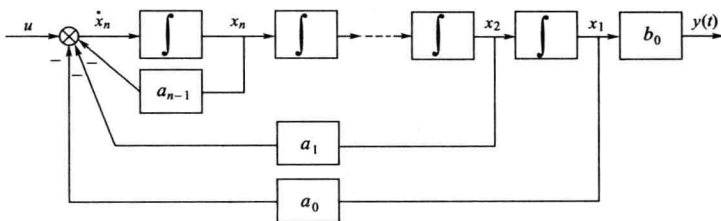


图 1.7 与状态方程对应的多重反馈方框图

由此得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n \end{cases} \quad (1.1.26)$$

$$y = b_0 x_1 \quad (1.1.27)$$

以上两式可记为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.1.28)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.1.29)$$

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]_{1 \times n}^T, \quad \mathbf{C} = (b_0, 0, \cdots, 0)_{1 \times n} \quad (1.1.30)$$

形如式(1.1.29)的矩阵称为友矩阵, 其对应的状态方程为标准 I 型状态方程。友矩阵的显著特点是其特征多项式易于求解, 从而为系统的极点配置提供方便, 同时也为系统的稳定性判定提供方便。

由 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 得矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 多项式方程为:

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (1.1.31)$$

此式可由式(1.1.29)直接代入 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 求得。