



信息与计算机科学丛书 — 60

后小波与变分理论及其在 图像修复中的应用

徐 晨 李 敏 张维强 著
孙晓丽 宋宜美



科学出版社



“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算机科学丛书 60

后小波与变分理论及其在 图像修复中的应用

徐 晨 李 敏 张维强 著
孙晓丽 宋宜美

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要内容是后小波理论、变分方法及两者结合起来在图像处理中的应用,在理论和算法上有较深入的探讨,并有数值实验和创新成果。附录中归纳和编制了常用小波基和后小波基图形,方便读者选用。

本书可作为高等院校相关专业的教学参考书,也可供相关领域科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

后小波与变分理论及其在图像修复中的应用/徐晨等著. —北京:科学出版社, 2013.9

(信息与计算科学丛书; 60)

ISBN 978-7-03-038608-3

I. ①后… II. ①徐… III. ①小波理论-应用-图像处理-研究②变分法-应用-图像处理-研究 IV. ①O17②TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 217126 号

责任编辑:王丽平/责任校对:刘亚琦

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 9 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2013 年 9 月第一次印刷 印张:18

字数:345 000

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 多册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前 言

本书是作者承担的国家自然科学基金项目“后小波域图像修复建模与算法研究”(No.61070087)全面系统的总结.后小波分析和变分方法是当前数字图像处理和计算机视觉等领域具代表性的两种研究方法.后小波分析是在小波分析的基础上发展起来的,是小波理论的新进展,对于含线奇异、面奇异的二维或高维函数,后小波分析显示出了比小波分析更好的“稀疏”表示能力.变分方法是图像处理中的另一有效工具,在图像去噪、图像增强、边缘检测等方面已经取得很多成功的应用.本书以图像处理为应用背景,对后小波分析和变分方法以及两者相结合在理论和算法上作了较深入的探讨,并有数值实验,且体现了作者们自己的科研成果.

本书的撰写由项目负责人徐晨教授主持,参加撰写的有项目组成员李敏副教授、张维强副教授、孙晓丽副教授、宋宜美副教授等,由赵瑞珍教授和冯纪强博士、李飞鹏硕士编制了附录中常用的小波基和后小波基的系列图形.

石钟慈院士在本书的完成过程中给予了亲切的关心和指导,在此表示衷心的感谢.

本书的出版得到国家出版基金的资助,科学出版社的编辑为本书出版付出了辛勤劳动,在此一并表示深切的谢意.

限于作者水平及时间仓促,书中疏漏及不妥之处在所难免,敬请读者指正,不胜感激.

著 者

2013年1月1日

目 录

《信息与计算科学丛书》序

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 图像处理的数学模型和数学方法	1
1.2 小波分析概述	3
1.3 后小波的发展	5
1.4 变分 PDE 图像处理	8
第 2 章 基本理论介绍	11
2.1 函数的度量空间	11
2.2 图像的表示与逼近	16
2.2.1 图像的表示	16
2.2.2 线性逼近	17
2.2.3 非线性逼近	18
2.3 小波变换	19
2.4 后小波分析	21
2.4.1 脊波变换	21
2.4.2 曲线波变换	25
2.4.3 波原子变换	29
2.4.4 复小波变换	32
第 3 章 变分 PDE 图像恢复模型	35
3.1 几种直接偏微分方程图像恢复模型	35
3.1.1 各向同性的热扩散方程	35
3.1.2 Perona-Malik 各向异性扩散方程及其改进模型	35
3.1.3 Weickert 张量扩散方程模型	39
3.1.4 自适应张量扩散方程模型	41
3.2 变分 PDE 图像恢复模型	49
3.2.1 积分泛函极小化与 Euler 方程	49
3.2.2 基于能量泛函极小化的变分模型	51
3.2.3 用于 TV 图像去噪的小波方法	53

3.2.4	基于 TV 和小波的图像恢复模型	57
第 4 章	基于曲线波和反应扩散方程的图像去噪算法	64
4.1	引言	64
4.2	反应扩散滤波器模型及改进	64
4.2.1	Nordström 能量泛函极小化	64
4.2.2	基于图的数字滤波	66
4.2.3	改进的反应扩散滤波器模型与滤波算法	68
4.2.4	数值实验	69
4.3	迭代滤波器模型的性质与迭代算法的收敛性	74
4.3.1	迭代滤波器模型的性质	74
4.3.2	滤波器模型迭代算法的收敛性	75
4.3.3	反应扩散滤波器模型的推广	78
4.4	结合曲线波的反应扩散滤波算法	80
第 5 章	基于波原子变换的图像去噪算法	84
5.1	引言	84
5.2	波原子理论	85
5.2.1	波原子的定义	85
5.2.2	波原子的构造及变换系数	85
5.3	波原子在图像处理中的应用	88
5.3.1	波原子硬阈值去噪算法	88
5.3.2	数值实验与分析	88
5.4	结合全变差最小的波原子去噪算法	92
5.4.1	全变差正则化模型	92
5.4.2	结合全变差最小的波原子去噪算法	93
5.4.3	数值实验	94
5.5	结合循环平移的波原子去噪算法	95
5.5.1	循环平移思想	96
5.5.2	结合循环平移的波原子去噪算法	97
5.5.3	数值实验与分析	97
第 6 章	基于复小波变换的图像质量评价指标	100
6.1	引言	100
6.2	传统图像质量评价指标	101
6.2.1	基于强度的相似性指标	101
6.2.2	基于几何的相似性指标	103
6.2.3	结构相似性指标	104

6.3	复小波域结构相似性指标	105
6.3.1	基于复小波的结构相似度指标	106
6.3.2	CW-SSIM 指标的敏感度分析	107
6.4	CW-SSIM 指标的检验	109
6.4.1	CW-SSIM 指标的鲁棒性	109
6.4.2	CW-SSIM 指标在图像去噪中的应用	113
第 7 章	耦合边缘提取的后小波图像分解模型	115
7.1	图像分解和边缘检测的发展历史	115
7.1.1	图像分解的发展历史	115
7.1.2	边缘检测的发展历史	117
7.2	结合半二次规整化的图像卡通-纹理-边缘分解法	119
7.2.1	图像分解变分模型	119
7.2.2	模型 (7.7) 的优化策略	120
7.2.3	半二次规整化的基本原理	122
7.2.4	新模型的描述	124
7.2.5	新模型的数值离散	127
7.2.6	数值实验	128
7.3	基于曲线波的图像卡通-纹理-边缘分解法	133
7.3.1	新模型的描述卡通 + 纹理 + 噪声 + 边缘分解	133
7.3.2	算法	136
7.3.3	数值实验	138
7.3.4	结论	140
第 8 章	变换域变分模型	141
8.1	Besov 空间及其小波刻画	141
8.1.1	Besov 空间的描述	141
8.1.2	Besov 空间的小波刻画	143
8.1.3	变分 PDE 在图像分解中的研究现状	144
8.2	一类基于 Besov 空间与负 Hilbert-Sobolev 空间的变分模型	147
8.2.1	主要思想	147
8.2.2	新变分模型的极小化	147
8.2.3	新变分模型的解与小波阈值之间的关系	148
8.2.4	数值实验	152
8.3	基于投影的图像分解变分模型	155
8.3.1	新变分模型的极小化	155
8.3.2	小波阈值与投影之间的关系	158

8.3.3	数值实验	161
8.4	一类基于 Besov 空间与齐次 Besov 空间的变分模型	164
8.4.1	Besov 空间 $(1, 1, s)$ 的变分模型	165
8.4.2	Besov 空间 (p, p, s) 的变分模型模型 I	167
8.4.3	Besov 空间 (p, p, s) 的变分模型模型 II	168
8.4.4	算法	169
8.4.5	算法的收敛性分析	170
8.4.6	数值实验	172
8.5	小结	178
第 9 章	基于小波与变分 PDE 的图像修补模型	179
9.1	变分 PDE 图像修补方法的发展历史	179
9.2	基于 Taylor 展开的 3 阶 PDE 图像去噪修补模型	183
9.2.1	基于 Taylor 展开的 3 阶偏微分方程修补模型	183
9.2.2	基于 Taylor 展开的 3 阶偏微分方程去噪修补模型	185
9.2.3	数值实验及分析	187
9.3	基于曲率驱动的小波域图像修补模型	188
9.3.1	小波域全变差修补模型	189
9.3.2	基于曲率驱动的小波域图像修补模型	190
9.3.3	离散格式与数值实验	193
9.4	基于非局部正则算子的图像修补模型	196
9.4.1	非局部算子简介	196
9.4.2	基于非局部曲率驱动的图像修复模型	198
9.4.3	数值实验及分析	200
第 10 章	迭代正则化与逆尺度空间	202
10.1	迭代正则化方法和逆尺度空间简介	202
10.2	基于 VO 变分模型的迭代正则化	203
10.2.1	基于 ROF 变分模型的迭代正则化 (OBG 模型)	203
10.2.2	基于 VO 变分模型的迭代正则化	204
10.2.3	数值离散	206
10.2.4	数值实验	207
10.3	基于平移不变小波阈值的迭代正则化与逆尺度空间方法	211
10.3.1	Xu 方法的介绍	211
10.3.2	Xu 迭代正则化方法在 Besov 空间 $(1, 1, \alpha)$ 中的推广	212
10.3.3	基于平移不变小波变换的非线性逆尺度空间	217
10.3.4	数值实验	220

10.4 基于等级分解的图像多尺度表示方法	227
10.4.1 中间空间的介绍	227
10.4.2 基于等级分解的图像多尺度表示	228
10.4.3 新方法的相关数学性质	229
10.4.4 新方法的数值离散	231
10.4.5 数值实验	233
10.5 小结	239
参考文献	240
附录 A 现代数值分析概想	250
A.1 数值分析与坐标几何	250
A.1.1 从笛卡儿坐标几何说起	250
A.1.2 坐标与分析	250
A.2 投影与逼近	251
A.2.1 内积空间中的投影定理	251
A.2.2 内积空间中的逼近概念	251
A.3 现代数值分析的总框架	254
A.3.1 H 空间中的广义 Fourier 分析	254
A.3.2 函数空间中的投影定理	255
A.3.3 现代数值分析中常用的子空间例	256
附录 B 常用小波基和后小波基	257
B.1 常用小波基	257
B.1.1 Daubechies 小波	257
B.1.2 墨西哥帽状小波 (亦称 Bubble 小波)	258
B.1.3 Morlet 小波	258
B.1.4 插值样条小波	259
B.1.5 Coifman 小波	259
B.1.6 Littlewood-Paley 小波 (等价于 Sinc 小波)	260
B.1.7 Strömberg 小波	260
B.1.8 样条小波	261
B.1.9 Meyer 小波	261
B.1.10 Battle-Lemarié 小波	262
B.1.11 双正交小波	262
B.1.12 Vaidyanathan 小波	263
B.1.13 Hardy 小波	264
B.1.14 单边指数小波	264

B.2 常用后小波基	265
B.2.1 脊波	265
B.2.2 曲线波	266
B.2.3 波原子	267
B.2.4 复小波	270
参考文献	270
索引	271
《信息与计算科学丛书》已出版书目	273

第1章 绪 论

在图像处理的发展过程中,数学始终都起着举足轻重的作用.图像处理的研究也随着计算技术的不断发展而不断深入.一方面,随着图像处理在天文、太空、医学、生物、视频监控等众多领域的应用,迫切需要现代数学提供理论支撑和分析技术;另一方面,数学方法与图像处理相结合,又为数学建模、调和分析、计算方法、小波理论等分析技术的发展提供了新的契机.

小波分析理论和变分 PDE 理论是当前图像处理领域中具有代表性的也是用之有效的两大数学分析工具.我们正是基于这个背景承担了国家自然科学基金项目“后小波域图像修复建模与算法研究”(2011 年 1 月—2013 年 12 月).两年多来,我们在后小波理论(小波分析的进一步发展)结合变分 PDE 理论并应用于图像处理等方面作了较为系统、深入的研究和探讨.本书正是这个课题的全面总结,既有理论探讨,又有数字实践,也反映了我们自己的科研成果.

1.1 图像处理的数学模型和数学方法

图像是用各种观测系统以不同形式和手段观测客观世界而获得的,可以直接或间接作用于人眼并产生视知觉的实体^[1,2].客观世界在空间上是三维的,但一般从客观景物得到的图像是二维的.一幅图像可以用一个二维数组 $u(x, y)$ 来表示,这里 x 和 y 表示二维空间 XY 中的一个坐标点的位置,而 u 则代表图像在点 (x, y) 的某种性质 F 的数值.例如常用的图像是灰度图,这时 u 表示灰度值,它对应于客观景物被观察到的亮度.

常见图像是连续的,即 u, x, y 的值可以是任意实数.为了能用计算机对图像进行加工和处理,需要把连续的图像在坐标空间 XY 和性质空间 F 上都进行离散化处理.对灰度图像而言,也就是要在图像域上离散地取样,在每个像素上的灰度值也是离散的,通常分成 128 或 256 个等级.这种离散后的图像称为数字图像.本书中主要讨论数字图像,即 u, x, y 都在整数集合中取值.由于人的视觉能区分的灰度级有限(小于 128),所以数字图像在视觉上的效果近似于连续图像.

为了能够有效地处理图像,首先需要知道如何从数学的角度理解和表示图像.例如,用二维的函数来表示一幅图像是否合适,需不需要加一些适当的约束条件等.迄今,数学上主要从三方面来研究图像处理:概率统计、小波分析和偏微分方程.这里介绍它们对应的三类图像建模和表示的方法.

1. 随机场模型 (random field modeling)

人们最早是借助于随机过程理论建立的图像模型. 该模型将图像 f 看成是随机场的一个抽样结果, 即图像可以用一些 Gibbs 或 Markov 随机场模型来模拟. 随机场模型在描述纹理比较丰富的自然图像 (如树和山等) 方面是较理想的模型.

2. 小波模型 (wavelets modeling)

图像都是通过一组微传感器的响应 (或相片感应器) 得来的. 在最近的二十年里, 人们逐渐认识到并且证明了这些局部的响应可以用小波来近似. 小波作为一种新的表示方法, 让我们对图像的看法有了根本性的变化. 新的 JPEG2000 协议和 FBI 指纹数据库的成功压缩是它最有影响力的两项应用. 它的理论还在不断的发展中, 最近几年出现的各种后小波就是小波理论的进一步发展.

3. 正则空间(regularity spaces) 模型

在传统图像处理的线性滤波理论里, 图像 f 被认为是 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 中的一个元素. 因为 Sobolev 空间的函数具有连续性, 所以 Sobolev 模型在处理一幅图像的某块均匀区域的时候是很好的, 但它不足以作为一整幅图像的模型, 因为它模糊了图像的边缘. 目前有两个非常有名的模型可以处理边缘的问题. 一个是 Mumford 和 Shah 的物体边缘模型^[3], 该模型假设理想图像 f 是由不连续的均匀物体块 $[f_k, \Omega_k]$ 及正则边界 $\partial\Omega_k$ (用一维的 Hausdorff 测度描述) 组成的, $f_k \in H^1(\Omega_k)$. 另一个是 Rudin, Osher 和 Fatemi 的 BV(bounded variation) 图像模型^[4], 该模型是假设理想图像具有有界的全变差 $\int_{\Omega} |Df|$. 所有这些基于正则化的图像模型一般只适用于纹理较少并且没有快速振荡的图像. 从解的存在性的证明可以看出, Mumford-Shah 模型是在 BV 空间 (具体而言是 Radon 测度 Du 分解部分中 Cantor 集 $D^c u$ 为 0 的 SBV 空间) 求解能量函数的最优解^[5].

到二十世纪六七十年代为止, 以 Fourier 分析为代表的线性处理方法占据了几乎整个数字图像处理领域. 人们借助于随机过程理论, 建立了图像模型, 通过概率论以及在此基础上建立的信息论建立了图像编码的框架; Weiner 滤波、卡尔曼滤波等线性滤波方法为数字图像处理提供了有力的理论支持; 而 Fourier 变换则被广泛运用在图像处理的几乎所有分支中. 这些数学工具极大地促进了图像处理的发展和运用.

自 20 世纪 80 年代以来, 非线性科学开始逐渐渗透到图像处理方法之中, 许多新颖的数学工具被引入到图像处理领域, 使得相关理论变得多元化. 尤其以小波和多尺度分析为代表的信息处理方法, 继承和发展了 Fourier 分析, 将函数论和逼近论的最新成果应用到工程领域中, 建立起了完整的系统框架, 在图像编码、图像分

割、纹理识别、图像滤波、边缘检测、特征提取和分析等方面的应用中都已经取得了非凡的成果. 目前, 小波分析方法已成为图像处理的基础理论之一. 一方面, 小波的理论和应用研究在不断深入, 人们利用各种方法构造适于不同环境需要的各种小波基, 如多小波、多维小波、M 带小波、小波包、第二代提升小波以及新发展起来的各种后小波等. 另一面, 小波的应用领域以及小波与其他学科的交叉结合也在不断地拓展, 如小波分析与变分 PDE 相结合应用于图像处理就是当前新兴的热门课题.

10 年来, 变分 PDE 的图像处理方法一直是研究热点, 主要是通过直接的偏微分方程演化模型和能量泛函极小化的变分模型来处理图像问题. 我们的研究工作主要是利用后小波理论和变分 PDE 理论以及它们的交叉结合来进行图像处理.

1.2 小波分析概述

小波的起源可以追溯到 20 世纪初. 1910 年 Haar 提出了规范正交小波基的思想, 构造了紧支撑的正交函数系——Haar 函数系, 这是最早的小波基. 1936 年 Littlewood 和 Paley 对 Fourier 分析建立了二进制频率分量分组理论 (L-P 理论): 对频率按 2^j 进行划分, 其 Fourier 变换的相位变化并不影响函数的大小, 这是多尺度分析思想的最早来源. 1946 年 Gabor 提出的加窗 Fourier 变换 (或称短时 Fourier 变换) 对弥补 Fourier 变换的不足起到了一定的作用, 但并没有彻底解决这个问题. 后来, Calderon, Zygmund, Stern 和 Weiss 等将 L-P 理论推广到高维, 并建立了奇异积分算子理论. 1965 年 Calderon 给出了再生公式. 1974 年, Coifmann 对一维 H^p 空间和高维 H^p 空间给出了原子分解. 1975 年, Calderon 用他最先提出的再生公式给出了抛物型 H^1 的原子分解, 这一公式现在成为许多函数分解的出发点, 其离散形式已接近小波展开. 此后许多数学家按照不同的需求, 给出了各自函数空间上的“原子分解”“分子分解”“拟正交分解”“框架分解”等. 1976 年, Peetre 在用 L-P 方法给出 Besov 空间统一描述的同时, 引入 Besov 空间的一组基, 其展开系数的大小刻画了 Besov 空间本身. 1981 年, Stromberg 通过对 Haar 正交基的改进, 引入了 Sobolev 空间 H^s 的正交基. 这些工作为小波分析奠定了基础.

小波变换是法国地质物理学家 Morlet 于 1984 年在分析地震资料时提出的. 后来, 他与法国理论物理学家 Grossmann 共同研究小波理论. 他们首先提出了“小波”这一概念, 建立了完整的连续小波变换的几何体系, 其基础是平移和伸缩变换下的不变性. 1985 年, 法国数学家 Meyer 首次提出光滑的正交小波基^[6], 后来被称为 Meyer 基, 对小波理论作出了重要的贡献. 1986 年, Meyer 及其学生 Lemarie 提出了多尺度分析的思想. 1988 年, Daubechies 利用多尺度思想构造出具有紧支集的正交小波基^[7], 这样小波分析的系统理论初步建立起来. 1988 年 Mallat 将计算机

视觉领域的多尺度分析的思想引入到小波分析中,提出多分辨分析^[6~10]的概念,用多分辨分析来定义小波,从尺度函数出发构造出了正交小波基,为此前各种小波基的构造建立了统一的框架.另外将离散小波变换与 Daubechies 紧支正交小波相结合提出了 Mallat 塔式分解算法,为离散小波变换建立了快速算法,并把它应用到图像处理中^[11~13]. Mallat 算法的作用和地位相当于 Fourier 分析中的 FFT 算法. Mallat 算法的提出宣告了小波分析从理论研究阶段走向应用研究阶段.

随着小波理论和实际应用的进一步结合,人们逐渐认识到小波各种性能的重要性.小波的主要性能指标包括:对称性/线性相位、紧支撑/有限冲激响应(FIR)、消失矩和正则性等.两带正交小波无法同时满足这些性质(Haar 小波除外),Cohen、Daubechies 和 Feauveau 放宽正交性要求,构造了两带双正交小波,其中分析与合成滤波器不同,但满足精确重构条件(或称为双正交条件).1990 年,崔锦泰和王建忠将其推广为有限冲激响应和无限冲激响应互为对偶的非正交滤波器库形式,构造了最小支撑的线性相位的样条小波族^[14,15].同年,Beylkin 和 Coifman 等将小波变换应用于算子理论.1991 年,Jaffard 和 Laurencot 将小波变换应用于偏微分方程数值解.

20 世纪 90 年代初期,小波理论的一个重大发展是 Wickerhauser 和 Coifman 等提出的“小波包”的概念^[16],它对信号频带的划分突破了小波等 Q 划分的限制,不仅对低通分量作分解,同时也对高通分量作分解,从而可以聚焦到感兴趣的任意频段,使对信号的分析更加灵活方便.但是,小波包分析要解决的问题是最优基的选择和信号的自适应最优表示.

1992 年,Donoho 等提出了“内插小波”的概念^[17],他们把正交小波的细分过程和对称迭代内插泛函相结合^[18],使小波的构造更为灵活简单.内插小波的重要作用是可以有效地消除所谓的 Mallat 误差.由于信号的长度都是有限的,在进行处理时必须先对信号进行延拓,否则会造成边界效应.为克服该问题,1993~1994 年,许多学者从不同的角度提出了“区间小波”^[19]的思想和构造方法.

1994 年,Goodman 等基于 r 元多分辨分析建立了多小波的基本理论框架^[20],并给出了样条多小波的例子.1996 年,Donovan, Gernimo, Hardin 和 Massopust 将分形理论中的迭代函数系统用于双尺度差分方程组,再次利用分形差值构造了所谓的 DGHM 多小波.由于多小波能同时具有紧支性、实对称性、正交性和高阶消失矩等性质,且多小波的构造比单小波更加灵活,所以多小波已经成为 20 世纪末小波研究的一个热点.

1995 年,Sweldens^[21]提出了通过“提升方法”(lifting scheme)构造第二代小波的新思想,利用这种方法可以构造非欧空间中不允许伸缩和平移、Fourier 变换不再适用的小波基,使小波的构造摆脱了对 Fourier 变换的依赖性.它不是某个特殊函数的伸缩和平移,而第一代小波是小波母函数的伸缩和平移.提升方法还可以构

造第一代双正交小波,如多维不可分离的小波、M 带多维小波、加权小波等.利用提升过程实现小波变换有一些优点:定位运算,无需辅助存储单元,提高计算速度,实现整数小波变换等.

1.3 后小波的发展

二十多年来,小波不仅在理论和方法上取得了突破性的进展,而且在图像处理、数据压缩、机器视觉、故障诊断、雷达分析等方面都得到了广泛深入的应用,取得了令人瞩目的成就.随着应用领域的不断深入和拓广,经典的小波分析也就逐渐表现出它的不足之处.为了更好地处理高维奇异性,一类带有方向性的稀疏表示方法——后小波分析应运而生(也称为多尺度几何分析).它的产生符合人类视觉皮层对图像有效表示的要求,即局部性、方向性和多尺度性.其目的是为具有面奇异或线奇异的高维函数找到最优或最稀疏的表示方法.如图 1.1 表示了后小波分析长条形结构的基能更好地逼近奇异曲线.

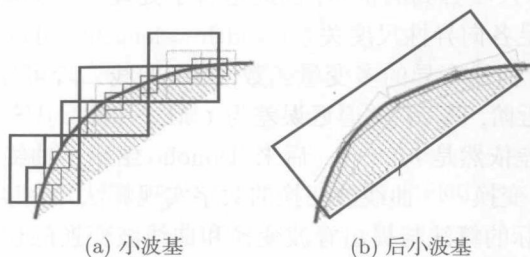


图 1.1 不同基奇异曲线逼近性能

1998 年,为了解决小波不能有效地处理高维奇异性的问题,Candès 和 Donoho 提出了“脊波”(ridgelet)的概念,并给出脊波的基本理论框架^[22].其基本思想是用一系列脊函数的叠加来表示相当广泛的函数类,它不但具有离散变换的近似正交的脊函数框架,而且其构造可用小波理论作为指导.脊波变换是一种非自适应的高维函数表示方法,对具有直线奇异的多变量函数能达到“最优”的逼近阶,但对含曲线奇异的多变量函数,其逼近性能只相当于小波变换,不具有最优的非线性逼近误差衰减阶.

脊波变换的核心主要是经过 Radon 变换把线状奇异性变换成点状奇异性.小波变换能有效地处理在 Radon 域的点状奇异性,其本质就是通过对小波基函数添加一个表征方向的参数得到的,所以它不但与小波一样有局部时频分析的能力,还具有很强的方向选择和辨识能力,可以非常有效地表示信号中具有方向性的奇异特征.这是小波方法所不能达到的.2000 年,M. N. Do 给出了一种脊波变换的数字化

实现方法——有限脊波变换^[23]. 该方法对图像作有限 Radon 变换后再作小波分析, 得到了一组正交脊波基. 但是有限脊波变换是在代数直线上求和, 有很强烈的环绕噪声, 使得处理的图像效果并不理想. 2002 年, Donoho 等^[24] 用快速 SlantStack 方法取代了有限 Radon 变换方法, 提出基于真脊函数的数字脊波变换. SlantStack 方法是在真的几何直线上求和, 较好地消除了环绕噪声. 缺点是会引入四倍的冗余, 因而使得该方法不适合作图像压缩.

脊波变换对具有直线奇异的图像具有最优的非线性逼近阶, 但是对含曲线奇异的多变量函数, 其逼近性能甚至不如小波. 针对脊波变换不能处理曲线奇异的问题, Candès 提出了单尺度脊波变换的概念^[25], 主要思想是利用剖分的方法, 用直线逼近曲线. 单尺度脊波变换解决了含曲线奇异的多变量函数的稀疏逼近问题.

曲线波 (curvelet) 变换是在单尺度脊波变换的基础上发展起来的, 也是对曲线奇异的一种非自适应稀疏表示. 单尺度脊波变换的基本尺度是固定的, 而曲线波变换则不然, 它在所有可能的尺度 $s \geq 0$ 上进行分解, 实际上曲线波变换是一种多尺度的方块脊波变换. 曲线波综合了脊波擅长直线的特征和小波适合点状特征的优点, 并充分利用了多尺度独到的优势, 因此适合于处理一大类图像问题. 曲线波变换基的支撑区间满足各向异性尺度关系: $\text{width} \approx \text{length}^2$, 可以很好地逼近图像中的奇异曲线. 对于含曲线奇异的多变量函数, 其中曲线二阶可导, 那么曲线波变换具有几乎最优的逼近阶, 其 M 项逼近误差为 $CM^{-2}(\log M)^{1/2}$. 值得注意的是, 非线性小波逼近的误差依然是 M^{-1} 阶. 后来, Donoho 给出了曲线波的数字实现方法——数字曲线波变换^[13]. 曲线波变换的数字实现算法冗余度高达 $16J+1$ (J 是尺度分解层数), 实际的算法与提出脊波变换和曲线波变换的初衷产生了违背. 但是, 大的冗余很有利于去噪, 因而在 2002 年, J. L. Starck 用数字曲线波变换进行图像去噪, 得到了非常好的效果. 接着, 将曲线波用在图像增强^[16] 上, 图像边缘比小波清晰, 视觉效果较好.

为了解决数字曲线波大的冗余问题, E. J. Candès 等^[17] 又提出了第二代曲线波变换. 它直接通过频率划分定义而不是利用脊波变换, 并提出了两种快速算法, 即基于不等价-空间快速 Fourier 变换 (USFFT) 和基于特殊选择的 Fourier 采样的绕叠. 两种算法都返回了一系列具有尺度参数、方向参数和空域位置参数的曲线波系数. 另外, 当处理 $n \times n$ 的图像时, 两种变换的计算复杂度为 $O(n^2 \log n)$.

第二代曲线波变换完全摆脱了对脊波变换的依赖, 其冗余度仅为 7.2, 大大减少了一代数字曲线波变换的冗余. 二代曲线波基的支撑区间仍然满足各向异性尺度关系. 二代曲线波变换直接在频域中定义, 首先对图像作 Fourier 变换, 然后求得不等空间点上的 Fourier 变换的值, 接着用一个光滑窗与分割的频域区间作内积, 然后用二维逆 Fourier 变换得到曲线波变换系数. 使用快速 Fourier 变换使得曲线波的计算量几乎和小波变换的计算量差不多, 大大减少了一代曲线波变换的计算量.