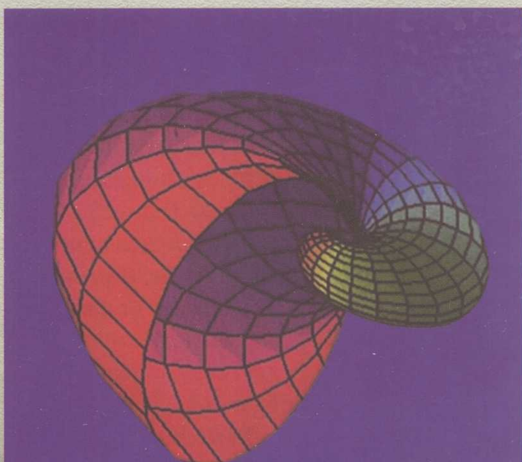
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何 上册

第三版

孟道骥 著



科学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何

（上 册）
（第三版）

孟道骥 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

数学分析、高等代数与解析几何是大学数学系的三大基础课程. 南开大学数学系将解析几何与高等代数统一为一门课程, 此举得到了同行们的普遍认同, 本书就是这种思想的尝试.

本书分上、下册, 第 1 章讨论多项式理论; 第 2 章介绍行列式, 包括用行列式解线性方程组的 Cramer 法则; 第 3 章矩阵, 主要介绍矩阵的计算、初等变换及矩阵与线性方程组的关系; 第 4 章介绍线性空间; 第 5 章介绍线性变换; 第 6 章多项式矩阵是为了讨论复线性变换而设的; 第 7 章介绍Euclid空间; 第 8 章介绍双线性函数与二次型; 第 9 章讨论二次曲面; 第 10 章介绍仿射几何与射影几何. 本书附有相当丰富的习题.

本书可供高等院校数学系学生用作教材, 也可供数学教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何(上、下册)/孟道骥著. —3 版. —北京: 科学出版社, 2014.3

("十二五"普通高等教育本科国家级规划教材·南开大学数学教学丛书)

ISBN 978-7-03-039766-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孟… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 026688 号

责任编辑: 王 静 / 责任校对: 韩 杨
责任印制: 阎 磊 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998 年 8 月第一版 开本: 720 × 1000 B5
2007 年 1 月第二版 印张: 31
2014 年 3 月第三版 字数: 622 000
2014 年 3 月第十六次印刷

定价: 54.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

丛书第三版序

《南开大学数学教学丛书》于 1998 年在科学出版社出版, 2007 年出版第二版, 整套丛书列入“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”中. 又过去几年了, 整套丛书又被列入“‘十二五’普通高等教育本科国家级规划教材”中. 这些都表明本丛书得到了使用者、读者以及南开大学, 特别是科学出版社的有效支持与帮助, 我们特向他们表示衷心的感谢!

我们曾被问及这套丛书的主编, 编委会是哪些人. 这套丛书虽然没有通常意义上的主编和编委会, 但是有一位“精神主编”: 陈省身先生. 中国改革开放后, 年事已高的陈省身先生回到祖国, 为将中国建设成数学大国、数学强国奋斗不息. 他这种崇高的精神感召我们在他创建的南开大学数学试点班的教学中尽我们的力量. 这套丛书就是我们努力的记录和见证.

陈省身先生为范曾的《庄子显灵记》写了序. 在这篇序中陈先生说在爱因斯坦书房的书架上有一本德译本老子的《道德经》.《道德经》第一句话说: “道可道, 无常道”. 道总是在发展着的. 我们曾说: “更高兴地期待明天它 (《南开大学数学教学丛书》) 被更新、被更好的教材取而代之.” 当然这需要进行必要的改革.《道德经》还说:“治大国若烹小鲜.” 就是说要改革, 但不能瞎折腾.

我们虽已年过古稀 (有一位未到古稀但也逾花甲), 但仍想为建设数学强国出一点力, 因此推出这套丛书的第三版. 同时也藉此感谢支持帮助过我们的诸位! 陈省身先生离开我们快十周年了, 我们也藉此表示对陈省身先生的深切怀念!

全体编著者

2013 年 9 月于南开大学

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国, 也就是“实现中国数学的平等和独立”[①]. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的, 要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多, 而在精, 要层次高. 也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

20 世纪 80 年代中期, 国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生, 需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力, 1986 年在南开建立了数学专业的试点班. 这些做法取得了成功, 并在基础学科的教学中有了推广. 1990 年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”, 南开数学专业成为基地之一. 从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的, 如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一, 一次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中均获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生, 其中许多人取得了很好的成绩.

当然, 取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开的, 是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等先生或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订, 或到南开任教等. 有了这些指导、帮助与支持, 南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验, 并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学的部分教材, 编著者们长期在南开数学专业任教, 不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去, 日积月累地形成了这套教材. 所以可以说这些教材不是“编”出来的, 而是在长期教学中“教”出来的, “改”出来的, 凝聚了我们的一些心血. 这些教材的共同点, 也是我们教学所遵循的共同点是: 首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学; 同时又要适当地开拓知识面, 尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法; 教学的目的是提高学生的能力, 因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法, 也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版, 这对编著者是件大好事. 编著者虽然尽了很大努力, 一则由于编著者的水平所艰, 二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中, 因此这套教材中的缺欠和不足肯定存在. 我们恳请

①陈省身: 在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话.

各位同行不吝指正, 从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长, 进而扬长避短, 改进我们的教学. 同进通过这套教材也可向同行们介绍南开的经验教训以供他们参考, 或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们, 同时也希望能继续得到他们的帮助. 办好南开的数学专业, 办好所有学校的数学专业, 把中国数学搞上去, 使中国成为数学大国是我们的共同愿望! 这个愿望一定能实现!

全体编著者

1998 年 6 月于南开大学

第三版前言

本书现在的第三版是将第二版做了少许的修改. 主要的改动有下面几处.

一、在预备知识 0.2 中添加了复数的基本内容, 在习题中也相应增加了几个有关的题目. 这是因为中学教学改革后, 复数的内容大幅度减少, 有的中学甚至不讲了. 复数又非常重要, 经常要用.

二、在 3.4 后面, 添加一段关于打洞技巧的阐述. 打洞技巧是华罗庚将矩阵的初等变换和分块运算结合起来而得到的一种矩阵计算技巧. 这是矩阵运算基本技巧之一.

三、4.7 添加了将矩阵等价标准形用于线性方程组理论的内容. 用这种方法求线性方程组的通解比用传统的寻找自由未知量求线性方程组的通解更快捷. 还添加了用线性映射理论研究线性方程组理论的例子.

四、4.11 添加了将线性映射用于研究矩阵的秩的几个例子. 这样比纯粹的矩阵方法更简捷.

五、在 4.5 与 4.6 之后分别添加了 Hamilton-Cayley 定理的另外两种证明. 书中一共有三种证明 Hamilton-Cayley 定理的方法. 这样有利于从不同的角度去理解这个极其重要的定理.

我们希望所有这些增加的内容都可以更好地诠释本书.

孟道骥

2013 年 9 月于南开大学

第二版前言

1996 年 10 月第六届全国代数会在上海华东师范大学举行时，我有幸与科学出版社的资深编辑刘嘉善先生住在同一房间. 这是我第一次结识这位在全国负有盛名的编辑. 刘嘉善先生是天津人，我在南开大学工作，自然多了几分亲近，交谈也就很多.

刘嘉善先生问起南开大学数学系的情况. 我将数学试点班的教学改革的情况告诉了他，并将我讲授的高等代数与解析几何课程改革向他作了较详细的介绍. 我们的改革是将高等代数与解析几何两门课融合为一门课，现在这样做的学校比较多了，当时是很少的，至少除南开大学外，我没有听说过. 其实，就是在南开也并非所有人都赞成. 我为此课程编写的讲义没有得到有关部门的出版支持，据说是因为改革太大了.

刘嘉善先生对我们的改革和讲义表现出极大的热情，让我给他一本讲义. 我回到天津后，将讲义寄给他. 1997 年 2 月，春节后，收到他的信，说科学出版社准备出版这个讲义，并问我还有没有别的好讲义. 我想自陈省身先生建议办数学试点班以来，已有 10 个年头了. 在这 10 年中，南开数学试点班的教学做了许多工作，教学质量有了很大提高. 为了进一步提高，应当广泛征求意见与帮助. 出版我们的讲义是征求意见和帮助的最好途径之一. 因此我告诉刘嘉善先生，数学试点班许多教材都是很好的. 科学出版社决定出一套《南开大学数学教学丛书》. 科学出版社的林鹏先生与刘嘉善先生还特地来南开与我们商谈有关事宜.

在当时的南开大学数学学院院长沈世镒教授、副院长王公恕教授及南开大学副教务长兼教务处处长骆家舜教授等的大力支持下，出版此丛书的事宜终于落实了. 本书作为此丛书的第一本于 1998 年出版.

此后，事情有了许多变化，一些学校陆续将高等代数与解析几何并为一门课，除我们自己使用我们的书外，还有一些学校也使用我们的书. 同时也有将两门并为一门课的教材出版. 我们的课程成为教育部“理科人才基地创建名牌课程”的首批项目，继而成为首批优秀项目，后又成为“国家精品课程”. 本书也相继列入“中国科学院规划教材”，“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”.

更令人可喜的是，在几年中得到许多朋友 (既有教师，也有学生；既有老朋友，也有新朋友) 的各种各样的帮助. 这些帮助使我感动，深深感觉已不再是“两间余一卒，荷戟独彷徨”的情形.

应该要说的是，我退休之后这样的帮助更多了. 先后有东北师范大学，南京大

学, 中国科技大学等学校让我去讲课. 一般是为硕士生和博士生讲李群、李代数方面的课程. 特别值得说说的是在中国科技大学讲了一年, 除李群、李代数外, 还为数学的本科生讲了一年的线性代数课. 中国科技大学数学系在代数方面由于深受她的创建人华罗庚先生的影响, 有很好的传统和优势. 数学界中流传的"龙生龙, 凤生凤, 科大的学生会打洞"(也有说成"龙生龙, 凤生凤, 华罗庚的学生会打洞") 就是生动的写照. 因此在这里讲课也是学习, 而且要学习就要如华罗庚先生所说的"弄斧到班门".

所有这些帮助使我感到这个教材有必要进行一些修改.

科学出版社支持了本书的出版, 还继续支持出本书的第二版, 很高兴有一个机会来弥补本书不足之处. 当然我们不指望本书尽善尽美. 高等代数与解析几何是数学中两个历史悠久、内容深刻、应用广泛的领域, 我们在教学中或在科研中应用它们时都是不断加深对它们的理解. 我们希望能在今后的学习、教学, 特别是研究中和朋友们一起, 更好地理解它们.

在第二版出版时, 我们要感谢科学出版社的朋友和所有帮助过我们的朋友. 特别要感谢邓少强、朱林生、王立云、史毅茜和王艳等, 没有他们具体的帮助, 第二版是不可能问世的.

作者还要感谢国家自然科学基金 (10571119) 的大力资助. 作者也不忘怀南开大学教务处, 南开大学数学科学学院和南开大学核心数学与组合数学重点实验室的帮助与支持.

孟道骥

2007 年 1 月于中国科技大学

目　　录

（上　册）

引 言

0.1 概 述

数学分析、高等代数与解析几何是大学数学系的三大基础课程. 事实上, 它们也是理工科的基础, 由于数学、计算机的广泛应用, 以致经济、管理等专业今天也离不开计算机, 离不开数学, 离不开数学就离不开这三个基础. 通常在数学系它们是三门独立的课程, 在教学中占有重要的地位, 并占有很大比例. 由于在大学教学中要反映科学的新发展, 就必须在大学开设一些新的课程. 事实上, 各大学数学系中开设与计算机有关的课程已经越来越多了, 这样就必须重新安排原来的课程以节省时间. 由于数学分析与高等代数是数学中的两大支柱, 应用又特别广泛, 这两门课几乎没有削减的可能. 其实, 高等代数还随着计算机的普及而不断增强. 如许多非数学专业开设的课程除高等数学 (数学分析加解析几何) 这一传统课程外, 还增加了线性代数 (高等代数的一部分). 在这种情况下, 大多数数学系是采取削减解析几何的办法来减少基础课的学时. 无疑, 过分削减甚至取消解析几何是对数学学习的重大损失. 其实, 高等代数与解析几何关系非常密切, 这两门课程的内容不可避免地有很多重叠部分. 因而若将这两门课程合起来, 不仅可以省出许多时间, 而且也不会太多地削减解析几何的内容. 从某种意义上说, 反而会使这两门课程都得到加强. 南开大学数学系数学专业就是本着这一宗旨将解析几何与高等代数统一为一门课程. 这种作法也为数学家陈省身、杨忠道、王叔平等所提倡, 本书是力求反映这种思想的尝试.

大家知道, 初等代数是研究数及代表数的文字的代数运算 (加法、减法、乘法、除法、乘方、开方) 的理论和方法, 也就是研究多项式 (实系数与复系数) 的代数运算的理论和方法. 而多项式方程及多项式方程组的解 (包括解的公式和数值解) 的求法及其分布的研究恰为初等代数学研究的中心问题. 以这个中心问题为基础发展起来的一般数域上的多项式理论与线性代数理论就是所谓的**高等代数**.

多项式理论有很长的历史. 高等代数中的多项式不仅是实系数、复系数多项式, 而且包括一般数域的数为系数的多项式. 求一元多项式方程 (高次方程) 的解, 或一元多项式的根, 实际上就是求此多项式的一次因式. 因而一元多项式理论将以因式分解为中心来展开. 而多元多项式的问题复杂得多, 我们只以对称多项式为中心来展开.

高等代数的另一部分, 即线性代数理论, 虽然历史久远, 但在 20 世纪才形成一个独立分支. 线性代数起源于 (多元) 一次方程组 (又叫线性方程组) 的解法. 几何、力学与物理学等学科中的许多概念 (如向量等) 也是它的源泉. 线性代数大致可以分为矩阵、线性空间和代数型三个对象. 这三个对象间的关系是非常密切的, 以致线性代数中的大部分问题在这三种理论中的每一种都有等价的说法. 因此, 在学习线性代数时要熟练地从一种理论的叙述转移到另一种去. 当然, 这三者的着眼点是不一样的. 矩阵的观点与实际计算结合得最多, 技巧性也很强. 而代数型许多是从几何、力学与物理学科中提出来的. 线性空间则着眼于更深刻、更透彻地揭示线性代数中各种问题的本质. 这里, 各种概念的明确性是至关重要的. 此外, 要指出行列式不仅在历史上, 而且在今天仍然是一个重要的工具.

古典几何学是以空间图形为其研究对象的, 如各种平面图形、空间图形等, 其方法是直接考察图形. 这种方法称为综合几何法或纯粹几何法. 在古希腊时代, 几何学几乎代表了全部数学. 文艺复兴后, 代数学在欧洲迅速发展. 17 世纪以后, 数学分析发展非常显著, 几何学也摆脱了和代数学相脱离的状态. 特别是 R. 笛卡儿在空间设立坐标系之后, 可以用方程来表示图形; 反过来, 图形也可以表示方程. 所谓方程, 实际就是数与数之间的关系. 例如, 在平面直角坐标系中, $ax+by=c$(a, b, c 为常数; x, y 为未知数) 表示了一条平面直线. 反过来, 一条直线也代表了这样一个方程. 又例如, $x^2+y^2=r^2$ 在平面直角坐标系中表示以原点为中心, r 为半径的圆周. 反过来, 一个圆周也代表了一个二元二次方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. 按照坐标把图形改变成数与数之间的关系问题而对之进行处理的方法称为**解析几何**.

以代数方法来研究几何问题, 对某些问题带来很大方便. 但因方法所限, 研究的对象不可避免地有所限制. 因而解析几何系统研究的平面曲线是一次曲线 (直线) 与二次曲线 (如圆、双曲线、抛物线等); 系统研究的空间曲面为一次曲面 (平面)、二次曲面以及锥面、柱面和旋转面; 空间曲线多作为两曲面的交线.

既然解析几何是以代数为工具的, 因而本着 “工欲善其事, 必先利其器” 的原则, 我们基本上是先讨论代数, 而后用它去解决几何问题. 但是, 代数, 特别是线性代数中许多概念、结果又概括了几何、力学、物理等学科中一些概念、结果, 而产生更抽象、更本质的概念和结果. 故有时先讲解析几何中的 “原始” 的概念、结果对理解代数也是很有好处的, 也只有这样才能将这两门课真正统一起来.

不用坐标而直接考察图形的纯粹几何方法不仅用于古典几何的研究, 而且也用于射影几何的研究. 射影几何是由透视图法而发展起来的, 它可以说是纯粹几何法指导下的产物. 与射影几何密切相关的是仿射几何. 现在射影几何与仿射几何也都可以用线性代数方法来研究, 因而有人将解析几何、仿射几何与射影几何统归于线性几何之中. 我们也将以代数的观点介绍仿射几何与射影几何的基本概念与基本定理, 如 Desargue 定理等. 由于教学课时所限, 也只能如此而已.

许以超在《线性代数与矩阵论》一书的序中说: "所谓线性代数学, 就是或者直接研究线性空间的几何问题, 或者将线性空间的一些几何问题化为矩阵问题." K. W. Gruenberg 与 A. J. Weir 在其*Linear Geometry* (《线性几何》) 一书的序中第一句话就说:"这主要是一本关于线性代数的书." 这些看法也适用于本书.

本书的第 1 章讨论多项式理论. 我们在实际教学中只讲授一元多项式部分, 多元多项式部分在抽象代数中讲授. 第 2 章是行列式, 包括用行列式解线性方程组的 Cramer 法则. 第 3 章矩阵主要是讲矩阵的计算、初等变换及矩阵与线性方程组的关系. 这 3 章的习题一般说来技巧性较强. 为了介绍一些技巧, 我们在这 3 章的最后都安排了一些例题. 第 4 章是线性空间. 其中第一、二节可以说是解析几何, 这样我们可以更清楚线性空间的几何背景. 第 5 章是线性变换. 第 6 章多项式矩阵是为了讨论复线性变换而设的. 实际上, 在第 5 章的第 8 节及其习题中这个问题已经解决, 但这种方法在其他书中未曾见过, 一般书上都采用第 6 章的方法, 这两种讲法采用一种即可. 我们采用第 5 章第 8 节的讲法, 因此第 6 章的多项式矩阵理论可以作为抽象代数中模论中更一般结果的特例. 第 7 章 Euclid 空间是通常 Euclid 几何的推广. 向量的长度与向量间的夹角起着关键性的作用. 在三维 Euclid 空间中的向量积与混合积是解析几何中的重要内容与重要工具, 我们在本章最后一节讲述. 第 8 章是双线性函数与二次型, 实际上也是多元二次多项式, 这是用代数方法研究的最重要的工具之一. 它在数学分析中也是很有用的, 因而在这章最后两节分别论述二次型在数学分析与解析几何中的应用. 至此, 高等代数的内容可以告一段落. 同时解析几何中平面、直线的理论也基本论述完毕. 作为解析几何学工具的代数也准备完了, 因而在第 9 章我们就可以很轻松地讨论二次曲面了. 第 10 章是仿射几何与射影几何, 我们仍然采用代数方法而不是纯粹几何方法来处理.

最后要说明的是, 线性空间的张量代数在几何学 (如微分几何学)、物理学中有广泛的应用, 因而也是很重要的. 按其性质应属于线性代数, 但一般却不在高等代数的课程中讲授, 有的在抽象代数中讲授, 有的在微分几何课中讲授. 由于课时的原因, 本书也不介绍.

正式内容前的预备事项一是介绍连加号、连乘号; 一是介绍数学归纳法. 当然也可以在正式内容中介绍, 单独介绍一下的好处是避免讲述正式内容时枝叶过多而分散学生的注意力.

0.2 预备事项

1. 连加号 (Σ) 在数学中, 为了使数学式表示简单明确, 通常要规定一些特殊符号. 连加号就是其中之一.

n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

简记为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

当然, 也可以记为 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 等.

序列

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_p,\ \cdots,\ b_q,\ \cdots$$

中从第 p 项到第 q 项之和, 则可记为

$$\sum_{i=p}^{q} b_i \quad 或 \quad \sum_{p \leqslant i \leqslant q} b_i.$$

又如

$$\sum_{i=0}^{k} b_{2i+1}$$

则表示上述序列的第 1 项到第 $2k+1$ 项中所有奇数项的和, 即

$$\sum_{i=0}^{k} b_{2i+1} = b_1 + b_3 + \cdots + b_{2k+1}.$$

以后, 还可能出现两个、三个, 甚至更多个连加号在一起的情况.

如有 mn 个数, 我们可将它们排成一个长方阵: m 个 (横) 行, n 个 (竖) 列. 将第 i 行, 第 j 列的数表示为 a_{ij} 即有下面的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行各数之和分别为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j},\quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j},\quad \cdots,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{mj}.$$

然后, 再将这些数求和, 即

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1\,j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2\,j}\right)+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n} a_{m\,j}\right)$$

这时可将此数记为

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}.$$

这数实际上是 mn 个数的总和. 当然, 我们也可先按列求和, 而后将各列之和相加而求得总和. 因此, 我们有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

其他还有许多情况, 以后再逐渐熟悉.

2. 连乘号 (Π) 与连加号相类似地, 有连乘号 Π.

n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之积

$$a_1a_2\cdots a_n$$

简记为

$$\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

当然, 也可以有多重连乘号. 例如前面所说的 mn 个排成长方阵的数的积, 可表示为

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij} \quad 或者 \quad \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{i\,j}.$$

有时可能用到一些别的表示法. 如

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j-a_i)$$

表示所有 $i<j$ 的 a_j-a_i 因子的乘积, 即

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j-a_i)=&(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\\ &(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\\ &\cdots\\ &(a_n-a_{n-1})\end{aligned}$$

为 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 个因式之积.

3. 数学归纳法 我们知道, 证明一个与自然数有关的性质 $E(n)$ 对所有自然数成立, 首先对数 1 证明 $E(1)$ 成立, 然后在"归纳假设"之下, 即假定数 n 具有性质 $E(n)$ 来证明数 $n+1$ 具有性质 $E(n+1)$.

这种证明方法的可靠性在于自然数集 $\mathbf{N}$ 有下面性质.

完全归纳原理 设 S 为 $\mathbf{N}$ 的子集, 而且满足

1) $1 \in S$;

2) 若 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$.

那么, $S = \mathbf{N}$.

自然数集 $\mathbf{N}$ 除了上面的完全归纳原理的性质外, 还有一个很重要的定理.

定理 0.2.1 自然数集 $\mathbf{N}$ 的任一非空子集都有一个最小数.

证 设 S 是 $\mathbf{N}$ 的一个非空子集. 于是有 $k \in S$, 因此集合

$$S_k = S \cap \{1,\ 2,\ \cdots,k\} = \{s \in S | s \leqslant k\}$$

是有限集, 于是有最小数 m.

显然, $m \in S$, $s \in S_k$, 则 $s \geqslant m$. 又若 $n \in S$, $n \notin S_k$, 则 $n > k \geqslant m$. 故 m 是 S 的最小数.

由这个定理, 我们可以建立第二数学归纳法:

为证明一个与自然数有关的性质 $E(n)$ 对所有自然数成立, 首先证明 $E(1)$ 成立. 在归纳假设对每个小于 n 的数 $k(<n)$ $E(k)$ 成立下, 证明 $E(n)$ 成立. 那么, $E(n)$ 对所有自然数都成立.

事实上, 假设使 $E(n)$ 不成立的自然数集为 S. 若 S 非空, 即 $S \neq \varnothing$. 则 S 中有最小数 n_0, $k < n_0$ 时, $E(k)$ 成立. 故 $E(n_0)$ 成立, 即 $n_0 \notin S$. 矛盾. 因而我们知道第二归纳法成立.

例 0.1 证明 Fibonacci 序列

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n = 3,\ 4,\ \cdots$$

的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

证 直接验算有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\\ =&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1;\end{aligned}$$