C.A.库尔森　A.杰弗里　著

# 波

农出版社

# 波

〔英〕C. A. 库尔森　A. 杰弗里　著

杨善元　杨燕　译

地震出版社

1988

# 内 容 提 要

本书是A. 杰弗里根据已故作者C. A. 库尔森1941年关于波的基本理论著作修订而成的。

本书广泛论述了各种波的特征和波动方程，其中包括弦上的波，薄膜中的波，杆与弹簧中的纵波，液体中的波，声波，电波，非线性波等。每章均采取数学分析方法。“通论”一章论述了各种波所共同的原理、效应、群速度、衍射以及波在非均匀介质中的传播问题等。

本书可供大专院校有关专业师生以及与波动有关的各门科学研究人员参考。

Waves:
A mathematical approch to
the common types of
wave motion, Longman, 1977

波

〔英〕C.A.库尔森 A.杰弗里 著
杨善元 杨 燕 译
责任编辑：李树菁

地震出版社 出版
北京复兴路63号
北京昌平展望厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 7.75印张 208千字
1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷
印数 0001—1700
ISBN 7-5028-0032-8/P·26
(438) 定价：3.65元

# 译者说明

本书经过四十多年的使用，证明是一本波动理论方面的优秀著作。1977年出第二版时，本书又由英国纽开索大学 A. 杰弗里教授进行修改。

作者 A.杰弗里在1977年1月所写的本书第二版序言中指出，近年来关于非线性波的研究已经有相当大的发展，因此作者感到在新版中增加非线性波方面的材料十分重要。为了在有限的篇幅中增加这些材料，并且能与书中其他部分保持一致，作者曾慎重选择了材料，进行补充修改。

本书的特点为利用数学方法来分析或论述一般类型的波动现象。因此，在阅读本书时，除了要掌握波动物理学的一般理论外，还需要线性与非线性偏微分方程以及向量分析的知识。另一个特点为通过数学分析巧妙地与物理现象联系起来，因此本书既是一般波动学的理论基础，又包括了不少应用数学内容。

波动是自然界中十分广泛的物理现象。当前波动理论已渗透到许多学科中，如水波、声波、电磁波以及固体应力波的理论都属于波动学范围。这本书的重新出版将对从事多门物理专业科学研究和教学工作有很大帮助。

在本书的翻译过程中，作者 A. 杰弗里教授正在北京进行学术访问。他听说这本书将译成中文出版，感到意外高兴，并对本书翻译者表示谢意。同时希望这本书对于想从波动学这门引人入胜的科学获得初步知识的中国读者是有用的。

本书选题由中国矿业学院北京研究生部陈至达教授推荐，并提出许多宝贵意见。初译稿完成后，由中国矿业学院赵国景教授认真审改。译者在此一并致谢。

杨善元

1987年5月

# 目　　录





试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

# 第一章　波动方程

## §1　导　论

我们都熟悉波的概念；例如，当一个石子掉进水池中，产生向外作径向运动的水波；弹钢琴时琴弦振动而发出声音在室内传播；电视台广播时，电波在空中传播。所有这些都是波动的例子，它们具有两个重要的共同性质：第一，能传播到远方；第二，扰动通过介质传播而总的来说介质本身却无任何永久性位移。又如水波带着能量向外传播到整个水池，但当我们注视一个小浮体的运动时，看到池水本身并不随着波的传播方向运动。在下面各章中我们将发现不论传播波的介质是什么，不论是空气、拉紧的弦索、某种液体、一条电缆或其它介质，这两种性质对于所有的波动都是共同的，从而使我们能够把它们联系在一起讨论。在线性波的情况下，它们都取决于某些叫做*波动方程*的微分方程（参阅§5），对于每个单独问题的数学部分来说，只不过是对附有适当边界条件的方程求解，然后恰当地对此解加以说明。

## §2　前进波的一般形式

我们来研究一个扰动 $\phi$，它以速度 $c$ 沿 $x$ 轴正方向传播。无需明确地说明 $\phi$ 的函义，它可能是水波的升高或一个波动的电场值。其次，由于扰动正在运动，因此 $\phi$ 决定于 $x$ 与 $t$。当 $t=0$，$\phi$ 将为 $x$ 的某一函数 $f(x)$。$f(x)$ 为波形，因为若把 $t=0$ 时扰动 $\phi$ 与 $x$ 的相对位置“拍照”，那么所得的曲线为 $\phi=f(x)$。若假定传播时形状不变，则时间 $t$ 以后的图象将与 $t=0$ 时的形状完全一致，不同者，仅仅是这个波形曲线已在 $x$ 轴上向正方向移动了 $ct$ 长的距离。假如取点 $x=ct$ 作为原点，并设从这个原点测量的

，于是 $x = X + ct$，则新原点的波形图为

$$\phi = f(X).$$

相对于原来的原点，则意味着

$$\phi = f(x - ct). \tag{1}$$

这个方程是以恒定速度 $c$ 沿着 $x$ 轴的正方向传播又不变形的波的最一般的表达式。若波是朝负方向传播，则改变式（1）中的 $c$ 的符号就得出

$$\phi = f(x + ct). \tag{2}$$

## §3 谐振波

波的最简单的例子为谐振波，它的波形图为一正弦或余弦曲线。于是，若 $t = 0$时波形图为

$$(\phi)_{t=0} = a\cos mx,$$

并且这个波以恒速 $c$ 向右运动，在时刻 $t$ 的位移或扰动则为

$$\phi = a\cos m(x - ct). \tag{3}$$

扰动 $a$ 的最大模数叫做振幅。这种类型的波形图按有规则距离 $2\pi/m$ 就重复一次。$2\pi/m$ 为周期波的波长 $\lambda$。所以式（3）可改写为

$$\phi = a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct). \tag{4}$$

一个完整波经过任一点所需时间就称为这个波的周期 $\tau$。按照式（4），当 $t$ 增加 $\tau$ 时，幅角 $\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$ 必然经历一完整的数值循环。于是从余弦函数的周期性就得出如下结论：

$$2\pi c\tau/\lambda = 2\pi.$$

因此

$$\tau = \lambda/c. \tag{5}$$

这样一个周期波的频率 $n$ 为单位时间内通过一固定观察者的波的数目。显然，



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

$$n = 1/\tau, \tag{6}$$

因此

$$c = n\lambda, \tag{7}$$

方程式( 4 )于是可写成下列两个相等形式的波的任何一个，即

$$\phi = a\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right), \tag{8}$$

或

$$\phi = a\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - nt\right). \tag{9}$$

有时引进波数 $k$ 是很有用的，它表示单位距离内波的数目。于是

$$k = 1/\lambda, \tag{10}$$

并且可以把( 9 )式写成

$$\phi = a\cos 2\pi(kx - nt). \tag{11}$$

若比较两个相类似的波

$$\phi_1 = a\cos 2\pi(k\pi - nt),$$

$$\phi_2 = a\cos\{2\pi(k\pi - nt) + \varepsilon\},$$

就可看出，除了 $\phi_2$ 位移了相当于 $\varepsilon\lambda/2\pi$ 的一个距离 $\varepsilon/2\pi k$ 外，$\phi_2$ 和 $\phi_1$ 一样。量 $\varepsilon$ 叫做 $\phi_2$ 相对于 $\phi_1$ 的相。若 $\varepsilon = 2\pi$，$4\pi$，…，则位移就正好是1，2，…，波长，并且我们说这些波都同相；若 $\varepsilon = \pi$，$3\pi$，…则这些波正好反相。

即便一个波不是谐振波，但波形是由一个规律地重复图形组成，则波长、周期、频率与波数仍然适用，并且式( 5 )、( 6 )、( 7 )与(10)仍然成立。

## §4 平 面 波

把( 1 )式推广到三维平面波的情况是可能的。所谓平面波就是这样一种波：垂直于它的传播方向的一个平面上的所有各点的扰动都是相同的。这种平面通常称为波阵面，并且垂直于它自己

的前进方向以速度 $c$ 传播。

假设沿传播方向的单位法向量为 $\boldsymbol{\nu}$，并且它的方向余弦为($l$，$m$，$n$)。若分量为（$x$，$y$，$z$）的 $\mathbf{r}$ 为时刻 $t$ 在波阵面上一般点 $P$ 的位置向量。从图 1 可以看出波阵面的方程式为

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}=lx+my+nz=p,$$

其中 $p$ 为从原点 $O$ 算起沿着向量 $\boldsymbol{\nu}$ 至与波阵面相交的 $Q$ 点的垂直距离。

由于平面的波阵面沿 $\boldsymbol{\nu}$ 以恒速 $c$ 运动，因此若 $t=0$ 时 $Q$ 至 $O$ 的距离为 $\alpha$，于是 $p=\alpha+ct$，上述结果可写成

$$lx+my+nz-ct=\alpha \quad (\text{常数}) \qquad (12)$$

若在任何时刻 $t$，对所有满足式(12)的 $x$、$y$、$z$，$\phi$ 是个常数，显然，

$$\phi=f(lx+my+nz-ct)$$

或

$$\phi=f(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}-ct) \qquad (13)$$

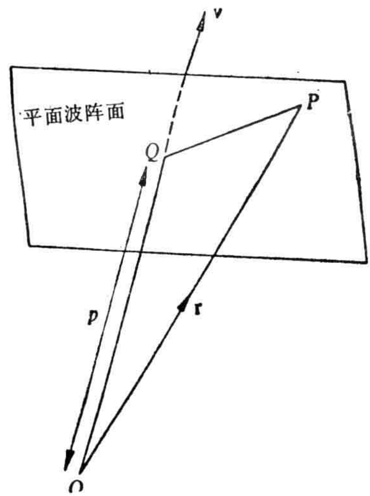

图 1

为一函数，它满足所有这些要求，所以它代表沿 $l:m:n$ 方向以速度 $c$ 传播的平面波，且没有形态上的变化。后面讨论非线性波时将看到波阵面这个名词也用于表征虽然与此有关却稍有差别的一种波的性质。

## §5 波动方程

表达式(13)是在第 1 页所提到的波动方程的特解。因为 $l$，

$m, n$ 是方向余弦，$l^2+m^2+n^2=1$，且易验证，若 $f$ 可微分二次，函数 $\phi$ 就满足微分方程

$$\nabla^2\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \tag{14}$$

它与拉普拉斯方程很相似。这个方程称为*波动方程*。它是数学中最重要的线性偏微分方程之一，因为它代表了所有类型的速度为常数的线性波动。表达式(1)，(2)，(8)，(9)，(11)和(13)都是这个方程的特解。随着后面各章对不同类型的波动的研究，我们将发现，方程(14)总是出现，而我们的任务就是选择适合特定问题的解。对一些常常出现的解的类型，我们将在本章的后面对其中的几个进行讨论，但在这之前，必须对已涉及到的这个基本方程的一个主要性质做进一步的解释。

## §6 叠加原理

波动方程是线性的，即方程中只出现 $\phi$ 以及它的各阶偏导数的一次项。因此，若 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 是方程(14)的两个解，则 $a_1\phi_1+a_2\phi_2$ 也是该方程的一个解，其中 $a_1$ 与 $a_2$ 为两个任意常数。这是*迭加原理*的一个实例，它说明了对一切相应的线性方程，我们都可以迭加任意个单独的解而形成新的函数，它们也都是方程的解。这个原理常要用到，它确实是求解波动方程方法的基本原理。

把两个具有同样振幅和速度沿相反方向运动的谐振波加起来，这是在许多问题中十分重要的一个迭加的特例。那么，用类似于(11)式的两个具有相同振幅且沿相反方向运动的波，就得到

$$\begin{aligned}\phi &= a\cos 2\pi(kx-nt)+a\cos 2\pi(kx+nt)\\ &= 2a\cos 2\pi kx\cos 2\pi nt.\end{aligned} \tag{15}$$

它称为*驻波*，以区别于以前的*前进波*。它得此名是因为波形不向前运动。总之，$\phi$ 在 $\cos 2\pi kx=0$的点处为零，即

$$x=\pm\frac{1}{4k},\quad \pm\frac{3}{4k},\quad \pm\frac{5}{4k}\cdots.$$

这些点称为波的波节，在波节间，$\phi$ 的振幅 $2a\cos 2\pi kx$ 为最大的各点称为波腹。两个相邻的波节或波腹间的距离是$1/2k$，由式(10)，这个数值是波长的一半。

用类似于式(13)的相等振幅的谐振波函数，求得对应的三维驻波，由

$$\begin{aligned}\phi &= a\cos\ \{2\pi(\nu\cdot\mathbf{r}-ct)/\lambda\}\ +a\cos\ \{2\pi(\nu\cdot\mathbf{r}+ct)\lambda\}\\ &=2a\cos(2\pi\nu\cdot\mathbf{r}/\lambda)\cos(2\pi t/\lambda)\end{aligned} \tag{16}$$

给出。在此情况下，$\phi$ 总是在平面

$$\nu\cdot\mathbf{r}=lx+my+nz=\pm(2m+1)\lambda/4$$

上为零，其中 $m=0$，1，…，这些面叫**波节面**。

## §7 解的特殊类型

这里我们将得到波动方程的一些特殊类型的解，它们能够用于后面各章的特殊问题中。我们可以把这些解分成代表驻波和前进波的两个主要类型。

我们曾讨论了一维前进波。有待于解的方程是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

它的最一般的解可由达朗伯方法获得。改用新的变量 $u=x-ct$ 和 $v=x+ct$，于是在此变换下容易验证

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v},\qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi}{\partial u}+c\frac{\partial\phi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}-2c^2\ \frac{\partial\phi^2}{\partial u\partial v}+c^2\ \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}.$$

采用这些变换，波动方程就化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}=0.$$

它的最一般的解是

$$\phi=f(u)+g(v).$$

$f$ 和 $g$ 是任意两个可微分二次的单变量函数。这个解对原来的变量则为

$$\phi=f(x-ct)+g(x+ct). \tag{17}$$

§2的谐振波是此式的特殊情况，在那里，$f$ 和 $g$ 是余弦函数。$f$ 和 $g$ 两个波以速度 $c$ 沿相反的方向传播，$f$ 向右而 $g$ 向左传播。

二维波动方程是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}. \tag{18}$$

通过达朗伯方法的一个明显的推广得到仅含平面波的最一般的解是

$$\phi=f(lx+my-ct)+g(lx+my+ct), \tag{19}$$

其中，如前所述，$f$ 和 $g$ 是任意两个可微分二次的单变量函数，且 $l^2+m^2=1$。严格说来，应称这些波为线波，因为在任何时刻，沿着直线 $lx+my=$ 常数，$\phi$ 总是常数。

对三维的情况，这个偏微分方程是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \tag{20}$$

且仅含平面波的最一般的解是

$$\phi=f(lx+my+nz-ct)+g(lx+my+nz+ct), \tag{21}$$

其中 $l^2+m^2+n^2=1$，且 $f$、$g$ 满足如前所述的相同的可微分条件。

不过，还有其他不含有平面波的前进波型的解。因为假设我们将式(20)变换为球面极坐标 $r$、$\theta$、$\psi$，则这三维波动方程化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial\psi^2}$$

$$=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}. \tag{22}$$

如果我们对具有球对称（即与 $\theta$ 和 $\psi$ 无关）的解感兴趣，就必须解一个较简单的方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \tag{23}$$

它可以写成

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi),$$

这说明（参阅方程(17)）它有解

$$r\phi=f(r-ct)+g(r+ct),$$

其中 $f$ 和 $g$ 仍是任意两个可微分二次的单变量函数，因此可知它有前进波型的解

$$\phi=\frac{1}{r}f(r-ct)+\frac{1}{r}g(r+ct). \tag{24}$$

我们现在转入讨论驻波型的解。这些解都可以用所谓分离变量法得到。对于一维的情况，必须解方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

我们来求形如

$$\phi=X(x)T(t)$$

的解，这里 $X$ 和 $T$ 分别是仅与 $x$ 有关和仅与 $t$ 有关的待定函数。将 $\phi=X(x)T(t)$ 代入微分方程，且用乘积 $X(x)T(t)$ 除方程两端，就得到一个只含常导数的方程



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongboo