普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

线性代数

第三版

上海交通大学数学系　组编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus
新核心
理工基础教材

线性代数

第三版

上海交通大学数学系 组编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地，为满足少学时本科教学需要，特组织编写本教材.

本书分为行列式、矩阵、n 维向量与线性方程组、特征值与特征向量、n 维向量空间、实二次型等 6 章. 本书的特点是科学性与通俗性相结合，由浅入深、循序渐进；每章后附有适量的习题，书末给出全部习题答案.

本书可作为高等院校的工业、农业、林业、医学等专业及成人、高职教育各非数学专业的教材或教学参考书，也可供读者自学及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/上海交通大学数学系组编. —3 版. —
上海：上海交通大学出版社，2014
新核心理工基础教材
ISBN 978-7-313-10439-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—
教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 014254 号

线性代数

(第三版)

组　　编：上海交通大学数学系
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：同济大学印刷厂印刷　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：13.25
字　　数：244 千字
版　　次：2003 年 12 月第 1 版　2014 年 1 月第 3 版　　印　　次：2014 年 1 月第 11 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10439-7/O
定　　价：21.00 元

第三版前言

本书第一版自2001年出版以来，已经过多年教学实践，现根据教学积累的一些经验并吸取使用本书的同仁所提出的宝贵意见，对部分内容作了修改，成为第三版.

这次修订，对第1章调整了部分例题，突出了行列式的计算功能；第2章矩阵的初等变换改放在矩阵运算之后，以尽可能减少重叠部分，又保持内容的连贯性；第4章与第5章则作了对换，以便在教学时数不足时可完成相关内容的教学.根据各章节内容的变化，习题的顺序也作了相应的调整.

本次修订工作由吴忠英副教授承担.

在此我们还谨向关心本书和对本书前两版提出宝贵意见的同仁表示深切的谢意，并恳请大家继续关心本书的第三版，对不妥之处予以批评指正.

编　者
于上海交通大学
2013年8月

前　言

线性代数是工科院校学生必修的一门数学基础课程.随着计算机的普及与发展,线性代数的概念和方法获得了越来越广泛的应用.但由于该课程概念多,逻辑性强,内容抽象,对非数学专业使用统一的教材,给教学带来了不少困难.为此,我们编写了这本教材,以满足不同专业、不同层次的学生对线性代数的不同要求.

本教材力求做到科学性与通俗性相结合,在内容的处理上由直观到抽象,由具体到一般,由浅入深,循序渐进.在第1章中,我们采用了比较简便的递归法来定义行列式,把重点放在行列式的计算和运用上;第2章从求解一般线性方程组的需要出发,引进矩阵的概念及矩阵的初等变换,再讨论矩阵的各种运算;第3章讨论向量组的线性相关性以及线性方程组的解的结构;第4章给出向量空间以及基、坐标等概念,并引进了内积运算;第5章介绍矩阵的特征值和特征向量以及矩阵对角化的方法;第6章介绍实二次型以及化二次型为标准形的方法,并给出正定二次型的概念及其判别法.书中对主要的方法和计算步骤都作了归纳总结,略去了一些较难或叙述较繁琐的证明,重在讲清理论的意义及其用法.书中还配备了丰富的例题和习题,使学生通过学习和练习,能够较好地掌握线性代数的基本概念和方法.本教材课内教学需要36～45学时.

本书前3章由吴忠英编写,后3章由张忆编写.李世栋教授详细审阅了全稿,并提出了许多改进意见,谨在此表示衷心的感谢.

本书的出版得到了上海交通大学出版社与上海交通大学数学系的关心和支持,在此一并表示感谢.

书中存在的不妥之处,恳请广大读者批评指正.

编　者

于上海交通大学

2001年5月

目　录

1 行列式

在生产实践和科学研究中，许多变量之间的关系可以直接或近似地用比较简单的一次函数即线性函数来表示. 线性代数是研究线性函数的一个数学分支，本书以求解线性方程组为主线，并由此展开线性代数的基本概念和理论.

行列式是由求解线性方程组的需要而建立的一个重要工具，它在数学和其他科学分支上都有广泛的应用. 本章给出 n 阶行列式的定义、行列式的性质及其计算法，以及利用行列式求解一类线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 2 阶和 3 阶行列式

对于方程个数与未知量个数相同的一次方程组，例如二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

通常用高斯(Gauss)消元法求解，易知当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式 1-2 中的分子和分母均为 4 个数分两对相乘后再相减.

我们将 4 个元素 a,b,c,d 排成两行两列，用记号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 表示数值 $ad - bc$，称为 **2 阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

利用行列式记号，式 1-2 可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中分母是方程组 1-1 中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式，称为系数

行列式;分子则是将方程组右端的常数列分别代替系数行列式的第1、第2列所得的行列式.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,方程组 1-1 有**唯一解**:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

2 阶行列式的计算法也可按如下的对角线法展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即将实线上的两个元素相乘,带正号,而虚线上的两个元素相乘,带负号,2 阶行列式则是这两项的代数和.

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=2, \\ x_1+4x_2=3. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=10\neq 0,$$

所以方程组有唯一解,又由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7,$$

故方程组的解

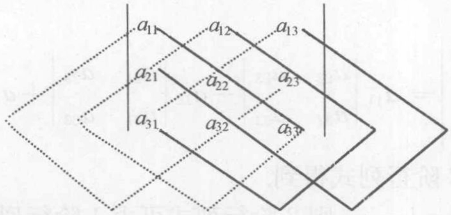
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{5},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{10}.$$

进一步给出 9 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,3)$,定义 **3 阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

等式右端为 3 阶行列式的算式,称为行列式的展开式. 展开式共有 6 项,每一项为位于不同行且不同列的 3 个元素的乘积,符号是 3 正 3 负. 3 阶行列式也可按下图所示的对角线法展开:



其中实线上的 3 个元素的乘积带正号,虚线上的 3 个元素的乘积带负号.

例 1.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &= 2\times7\times2+(-5)\times(-1)\times5+1\times(-3)\times(-9)- \\ &\quad 1\times7\times5-(-5)\times(-3)\times2-2\times(-1)\times(-9) \\ &= 28+25+27-35-30-18 \\ &= -3\,. \end{aligned}$$

给出三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

用高斯消元法求解,并利用行列式记号,则当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

时,方程组有唯一解,且它的解可以简单地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 为将方程组的常数项依次替换 D 的第 j 列所得的 3 阶行列式.

为了将此结果推广到未知量更多的线性方程组,需要给出 n 阶行列式的定义.观察 3 阶行列式的展开式,它是所有可能的、位于不同行不同列的 3 个元素的乘积的代数和,将它们按第 1 行的各个元素合并,则 3 阶行列式也可用如下方法按第 1

行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

即 3 阶行列式可以由 2 阶行列式得到.

定义 1 阶行列式 $|a| = a$，则 2 阶行列式可由 1 阶行列式得到：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,|a_{22}| - a_{12}\,|a_{21}|.$$

于是，可以由较低阶的行列式计算高阶行列式. 下面采用递归的方法来定义 n 阶行列式.

1.1.2 n 阶行列式的定义

定义 **给出 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，称**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式（可简记为 $|a_{ij}|_n$ 或 $|a_{ij}|$）.

当 $n=1$ 时

$$D = |a_{11}| = a_{11},$$

当 $n \geqslant 2$ 时

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k},$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$，$M_{1j}$ 为 D 中划去第 1 行、第 j 列后所剩元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式 $(j=1,2,\cdots,n)$.

一般地，用 M_{ij} 来记 D 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列后所剩元素按原来

顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的**余子式**，并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\-1&2&0&1\\0&3&2&3\\1&4&-1&-2\end{vmatrix},$$

它的位于第 3 行、第 2 列上的元素 3 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&-1&-2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-2$$

由定义可知，n 阶行列式是由其元素的乘积构成的和式，用数学归纳法可以证明它的展开式共有 $n!$ 项，每一项为位于不同行不同列的 n 个元素的乘积. 在所有的项中，带正号的项和带负号的项各占一半($n>1$).

如上定义的行列式，当 $n>3$ 时，对角线法不再成立，但它具有许多统一的性质. n 阶行列式通常也采用另一种等价的定义，可参见本章附录.

n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**，相应地，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角元**，另一条对角线则称为**副对角线**.

主对角线以上元素全为零的行列式(即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$)

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为**下三角行列式**(行列式中空白处元素全为零，以下同). 主对角线以下元素全为零的行列式(即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$) 称为**上三角行列式**.

主对角元以外的元素全为零的行列式称为**对角行列式**.

例 1.3 证明 n 阶下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad (1-3)$$

证 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时,结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立,则由定义和归纳假设,n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1-4}$$

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \begin{matrix} & \\ ⋰ & \end{matrix} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} & & & a_{2,n-1} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}a_{1n}(-1)^{1+n-1}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} & & & a_{3,n-2} \\ & & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)}a_{1n}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} & & & a_{3,n-2} \\ & & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

即

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}, \qquad (1-5)$$

特别当副对角线以下元素全为零时

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \qquad (1-6)$$

例如

$$D_3 = \begin{vmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_3 & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times 2}{2}} a_1a_2a_3 = -a_1a_2a_3,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4\times 3}{2}} a_1a_2a_3a_4 = a_1a_2a_3a_4.$$

1.2 n 阶行列式的性质及其计算

直接用定义计算行列式一般比较繁琐，下面我们由定义来推导出行列式的性质，利用它们往往可以简化行列式的计算.

1.2.1 n 阶行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换得到的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 可用数学归纳法来证明，详细证明参见本章附录. 此性质说明行列式中行与列的地位是相同的，从而对行成立的性质对列也一样成立. 为方便起见，下面

各性质仅对行加以叙述，若将行换成列结论同样成立.

例 1.5 计算 n 阶上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由性质 1 及式 1-3 可得

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于任一行各元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\,(i=1,2,\cdots,n),\qquad (1-7)$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

式 1-7 称为行列式按第 i 行展开的展开式. 将性质 2 中的行换成列，即行列式可按第 j 列展开，展开式为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\,(j=1,2,\cdots,n).$$

性质 2 的证法与性质 1 类似，略.

例 1.6 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解 将等式左端的行列式按第 3 列展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=x^2-5x+6=(x-2)(x-3),$$

原方程即 $(x-2)(x-3)=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

性质 3 用一常数 k 乘行列式某一行的各元素所得的行列式等于用同一数去乘此行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即若行列式某一行元素有公因子可以提出来.

将等式左端行列式按第 i 行展开,再提取公因子即可得到结果.

推论　若行列式某一行的元素全为零,则此行列式等于零.

此即性质 3 中取 $k=0$ 的情形.

性质 4　若行列式某一行的各元素是两项之和,则此行列式可拆为如下的两个行列式相加:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即这两个行列式对应行的每一个元素分别取两和数之一,其余元素不变.

性质 4 的证明只要按需要拆项的行展开即可.

性质 5　若行列式有两行对应元素相等,则此行列式等于零.

证　即证若有 $i \neq j, a_{il} = a_{jl} (l = 1,2,\cdots,n)$,则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

用数学归纳法证明. 显然结论对 2 阶行列式成立. 假设结论对$n-1$阶行列式成

立，则对 n 阶行列式 D 按第 k 行展开 $(k\neq i,j)$：

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl},$$

由于 a_{kl} 的余子式 $M_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$ 为含 D 中第 i,j 行的 $n-1$ 阶行列式，必有两行元素对应相等，由归纳假设

$$A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0\ (l=1,2,\cdots,n),$$

从而 $D=0$.

由性质 3 和性质 5 立即可得如下推论：

推论　若行列式中有两行对应元素成比例（即 $a_{il}=ka_{jl}$；$i\neq j$；$l=1,2,\cdots,n$），则此行列式为零.

例 1.7　不计算行列式，仅利用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 2 & x+1 & 3 \\ 3 & 3 & x+1 \end{vmatrix}=(x-1)(x-2)(x+3).$$

证　令

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 2 & x+1 & 3 \\ 3 & 3 & x+1 \end{vmatrix},$$

显然，$f(x)$ 是 x 的 3 次多项式，且立方项的系数为 1，又

$$f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{性质 5}}0,$$

$$f(2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{性质 5}}0,$$

$$f(-3)=\begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{的推论}]{\text{性质 5}}0,$$

即 3 次代数方程 $f(x)=0$ 有 3 个实根：$x_1=1,x_2=2,x_3=-3$，从而

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3),$$

得证.

性质 6　行列式某一行各元素加上另一行对应元素的 k 倍，行列式的值不变，即