

普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus
新核心

理工基础教材

线性代数

第三版

上海交通大学数学系 组编



上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材

015035053

0151.2

188-3

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

线性代数

第三版

上海交通大学数学系 组编



号 150 部是备市底土 甚
· 200 1000 - 150 100
· 合斗深固全 · 薄
· 22.5 · 深
· 圆角方口 · 厚
· 1000 mm 600 X mm 780 本
· 电子 1000 · 纸
· 01512



北航

C1715064

188-3



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地,为满足少学时本科教学需要,特组织编写本教材.

本书分为行列式、矩阵、 n 维向量与线性方程组、特征值与特征向量、 n 维向量空间、实二次型等 6 章. 本书的特点是科学性与通俗性相结合,由浅入深、循序渐进; 每章后附有适量的习题,书末给出全部习题答案.

本书可作为高等院校的工业、农业、林业、医学等专业及成人、高职教育各非数学专业的教材或教学参考书,也可供读者自学及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/上海交通大学数学系组编. —3 版.—

上海: 上海交通大学出版社, 2014

新核心理工基础教材

ISBN 978 - 7 - 313 - 10439 - 7

I . ①线… II . ①上… III . ①线性代数—高等学校—

教材 IV . ①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 014254 号

线性代数

(第三版)

组 编: 上海交通大学数学系

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

出 版 人: 韩建民

印 制: 同济大学印刷厂印刷

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

字 数: 244 千字

版 次: 2003 年 12 月第 1 版 2014 年 1 月第 3 版

书 号: ISBN 978 - 7 - 313 - 10439 - 7/O

定 价: 21.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021 - 64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 13.25

次: 2014 年 1 月第 11 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 021 - 65982320

第三版前言

本书第一版自 2001 年出版以来,已经过多年教学实践,现根据教学积累的一些经验并吸取使用本书的同仁所提出的宝贵意见,对部分内容作了修改,成为第三版.

这次修订,对第 1 章调整了部分例题,突出了行列式的计算功能;第 2 章矩阵的初等变换改放在矩阵运算之后,以尽可能减少重叠部分,又保持内容的连贯性;第 4 章与第 5 章则作了对换,以便在教学时数不足时可完成相关内容的教学. 根据各章节内容的变化,习题的顺序也作了相应的调整.

本次修订工作由吴忠英副教授承担.

在此我们还谨向关心本书和对本书前两版提出宝贵意见的同仁表示深切的谢意,并恳请大家继续关心本书的第三版,对不妥之处予以批评指正.

编 者

于上海交通大学

2013 年 8 月

前　　言

线性代数是工科院校学生必修的一门数学基础课程。随着计算机的普及与发展，线性代数的概念和方法获得了越来越广泛的应用。但由于该课程概念多，逻辑性强，内容抽象，对非数学专业使用统一的教材，给教学带来了不少困难。为此，我们编写了这本教材，以满足不同专业、不同层次的学生对线性代数的不同要求。

本教材力求做到科学性与通俗性相结合，在内容的处理上由直观到抽象，由具体到一般，由浅入深，循序渐进。在第1章中，我们采用了比较简便的递归法来定义行列式，把重点放在行列式的计算和运用上；第2章从求解一般线性方程组的需要出发，引进矩阵的概念及矩阵的初等变换，再讨论矩阵的各种运算；第3章讨论向量组的线性相关性以及线性方程组的解的结构；第4章给出向量空间以及基、坐标等概念，并引进了内积运算；第5章介绍矩阵的特征值和特征向量以及矩阵对角化的方法；第6章介绍实二次型以及化二次型为标准形的方法，并给出正定二次型的概念及其判别法。书中对主要的方法和计算步骤都作了归纳总结，略去了一些较难或叙述较繁琐的证明，重在讲清理论的意义及其用法。书中还配备了丰富的例题和习题，使学生通过学习和练习，能够较好地掌握线性代数的基本概念和方法。本教材课内教学需要36~45学时。

本书前3章由吴忠英编写，后3章由张忆编写。李世栋教授详细审阅了全稿，并提出了许多改进意见，谨在此表示衷心的感谢。

本书的出版得到了上海交通大学出版社与上海交通大学数学系的关心和支持，在此一并表示感谢。

书中存在的不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

于上海交通大学

2001年5月

目 录

1 行列式	1
1.1 n 阶行列式的定义	1
1.2 n 阶行列式的性质及其计算	7
1.3 克莱姆法则	25
附录	30
习题 1	34
2 矩阵	39
2.1 消元法 矩阵	39
2.2 矩阵的运算	43
2.3 可逆矩阵	56
2.4 分块矩阵	62
2.5 矩阵的初等变换 矩阵的秩 初等矩阵	67
习题 2	84
3 n 维向量与线性方程组	92
3.1 n 维向量及其线性相关性	92
3.2 向量组的秩	103
3.3 齐次线性方程组解的结构	111
3.4 非齐次线性方程组解的结构	117
习题 3	122
4 特征值与特征向量	128
4.1 矩阵的特征值与特征向量	128
4.2 相似矩阵与矩阵的对角化	137
习题 4	145

5 <i>n</i> 维向量空间	147
5.1 向量空间及其子空间	147
5.2 向量空间的维数 基与向量的坐标	150
5.3 基变换与坐标变换	153
5.4 向量的内积 标准正交基和正交矩阵	158
习题 5	169
6 实二次型	172
6.1 实二次型的基本概念及其标准形	172
6.2 化二次型为标准形	174
6.3 惯性定理 正定二次型	181
习题 6	187
习题答案	190
S1	190
S2	190
S3	190
S4	190
S5	190
S6	190
S7	190
S8	190
S9	190
S10	190
S11	190
S12	190
S13	190
S14	190
S15	190
S16	190
S17	190
S18	190
S19	190
S20	190
S21	190
S22	190
S23	190
S24	190
S25	190
S26	190
S27	190
S28	190
S29	190
S30	190
S31	190
S32	190
S33	190
S34	190
S35	190
S36	190
S37	190
S38	190
S39	190
S40	190
S41	190
S42	190
S43	190
S44	190
S45	190
S46	190
S47	190
S48	190
S49	190
S50	190
S51	190
S52	190
S53	190
S54	190
S55	190
S56	190
S57	190
S58	190
S59	190
S60	190
S61	190
S62	190
S63	190
S64	190
S65	190
S66	190
S67	190
S68	190
S69	190
S70	190
S71	190
S72	190
S73	190
S74	190
S75	190
S76	190
S77	190
S78	190
S79	190
S80	190
S81	190
S82	190
S83	190
S84	190
S85	190
S86	190
S87	190
S88	190
S89	190
S90	190
S91	190
S92	190
S93	190
S94	190
S95	190
S96	190
S97	190
S98	190
S99	190
S100	190
S101	190
S102	190
S103	190
S104	190
S105	190
S106	190
S107	190
S108	190
S109	190
S110	190
S111	190
S112	190
S113	190
S114	190
S115	190
S116	190
S117	190
S118	190
S119	190
S120	190
S121	190
S122	190
S123	190
S124	190
S125	190
S126	190
S127	190
S128	190
S129	190
S130	190
S131	190
S132	190
S133	190
S134	190
S135	190
S136	190
S137	190
S138	190
S139	190
S140	190
S141	190
S142	190
S143	190
S144	190
S145	190
S146	190
S147	190
S148	190
S149	190
S150	190
S151	190
S152	190
S153	190
S154	190
S155	190
S156	190
S157	190
S158	190
S159	190
S160	190
S161	190
S162	190
S163	190
S164	190
S165	190
S166	190
S167	190
S168	190
S169	190
S170	190
S171	190
S172	190
S173	190
S174	190
S175	190
S176	190
S177	190
S178	190
S179	190
S180	190
S181	190
S182	190
S183	190
S184	190
S185	190
S186	190
S187	190
S188	190
S189	190
S190	190
S191	190
S192	190
S193	190
S194	190
S195	190
S196	190
S197	190
S198	190
S199	190
S200	190
S201	190
S202	190
S203	190
S204	190
S205	190
S206	190
S207	190
S208	190
S209	190
S210	190
S211	190
S212	190
S213	190
S214	190
S215	190
S216	190
S217	190
S218	190
S219	190
S220	190
S221	190
S222	190
S223	190
S224	190
S225	190
S226	190
S227	190
S228	190
S229	190
S230	190
S231	190
S232	190
S233	190
S234	190
S235	190
S236	190
S237	190
S238	190
S239	190
S240	190
S241	190
S242	190
S243	190
S244	190
S245	190
S246	190
S247	190
S248	190
S249	190
S250	190
S251	190
S252	190
S253	190
S254	190
S255	190
S256	190
S257	190
S258	190
S259	190
S260	190
S261	190
S262	190
S263	190
S264	190
S265	190
S266	190
S267	190
S268	190
S269	190
S270	190
S271	190
S272	190
S273	190
S274	190
S275	190
S276	190
S277	190
S278	190
S279	190
S280	190
S281	190
S282	190
S283	190
S284	190
S285	190
S286	190
S287	190
S288	190
S289	190
S290	190
S291	190
S292	190
S293	190
S294	190
S295	190
S296	190
S297	190
S298	190
S299	190
S300	190
S301	190
S302	190
S303	190
S304	190
S305	190
S306	190
S307	190
S308	190
S309	190
S310	190
S311	190
S312	190
S313	190
S314	190
S315	190
S316	190
S317	190
S318	190
S319	190
S320	190
S321	190
S322	190
S323	190
S324	190
S325	190
S326	190
S327	190
S328	190
S329	190
S330	190
S331	190
S332	190
S333	190
S334	190
S335	190
S336	190
S337	190
S338	190
S339	190
S340	190
S341	190
S342	190
S343	190
S344	190
S345	190
S346	190
S347	190
S348	190
S349	190
S350	190
S351	190
S352	190
S353	190
S354	190
S355	190
S356	190
S357	190
S358	190
S359	190
S360	190
S361	190
S362	190
S363	190
S364	190
S365	190
S366	190
S367	190
S368	190
S369	190
S370	190
S371	190
S372	190
S373	190
S374	190
S375	190
S376	190
S377	190
S378	190
S379	190
S380	190
S381	190
S382	190
S383	190
S384	190
S385	190
S386	190
S387	190
S388	190
S389	190
S390	190
S391	190
S392	190
S393	190
S394	190
S395	190
S396	190
S397	190
S398	190
S399	190
S400	190
S401	190
S402	190
S403	190
S404	190
S405	190
S406	190
S407	190
S408	190
S409	190
S410	190
S411	190
S412	190
S413	190
S414	190
S415	190
S416	190
S417	190
S418	190
S419	190
S420	190
S421	190
S422	190
S423	190
S424	190
S425	190
S426	190
S427	190
S428	190
S429	190
S430	190
S431	190
S432	190
S433	190
S434	190
S435	190
S436	190
S437	190
S438	190
S439	190
S440	190
S441	190
S442	190
S443	190
S444	190
S445	190
S446	190
S447	190
S448	190
S449	190
S450	190
S451	190
S452	190
S453	190
S454	190
S455	190
S456	190
S457	190
S458	190
S459	190
S460	190
S461	190
S462	190
S463	190
S464	190
S465	190
S466	190
S467	190
S468	190
S469	190
S470	190
S471	190
S472	190
S473	190
S474	190
S475	190
S476	190
S477	190
S478	190
S479	190
S480	190
S481	190
S482	190
S483	190
S484	190
S485	190
S486	190
S487	190
S488	190
S489	190
S490	190
S491	190
S492	190
S493	190
S494	190
S495	190
S496	190
S497	190
S498	190
S499	190
S500	190

1 行列式

在生产实践和科学的研究中,许多变量之间的关系可以直接或近似地用比较简单的一次函数即线性函数来表示。线性代数是研究线性函数的一个数学分支,本书以求解线性方程组为主线,并由此展开线性代数的基本概念和理论。

行列式是由求解线性方程组的需要而建立的一个重要工具,它在数学和其他科学分支上都有广泛的应用。本章给出 n 阶行列式的定义、行列式的性质及其计算法,以及利用行列式求解一类线性方程组的克莱姆(Cramer)法则。

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 2 阶和 3 阶行列式

对于方程个数与未知量个数相同的一次方程组,例如二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1-1)$$

通常用高斯(Gauss)消元法求解,易知当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (1-2)$$

式 1-2 中的分子和分母均为 4 个数分两对相乘后再相减。

我们将 4 个元素 a, b, c, d 排成两行两列,用记号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 表示数值 $ad - bc$, 称

为 2 阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

利用行列式记号,式 1-2 可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中分母是方程组 1-1 中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式,称为系数

行列式;分子则是将方程组右端的常数列分别代替系数行列式的第1、第2列所得的行列式.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时, 方程组 1-1 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

2 阶行列式的计算法也可按如下的对角线法展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

即将实线上的两个元素相乘, 带正号, 而虚线上的两个元素相乘, 带负号, 2 阶行列式则是这两项的代数和.

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解, 又由于

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

故方程组的解

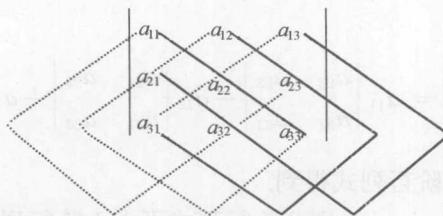
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{10}.$$

进一步给出 9 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 定义 3 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

等式右端为 3 阶行列式的算式, 称为行列式的展开式. 展开式共有 6 项, 每一项为位于不同行且不同列的 3 个元素的乘积, 符号是 3 正 3 负. 3 阶行列式也可按下图所示的对角线法展开:



其中实线上的 3 个元素的乘积带正号,虚线上的 3 个元素的乘积带负号.

例 1.2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= 2 \times 7 \times 2 + (-5) \times (-1) \times 5 + 1 \times (-3) \times (-9) - \\ &\quad 1 \times 7 \times 5 - (-5) \times (-3) \times 2 - 2 \times (-1) \times (-9) \\ &= 28 + 25 + 27 - 35 - 30 - 18 \\ &= -3. \end{aligned}$$

给出三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

用高斯消元法求解,并利用行列式记号,则当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组有唯一解,且它的解可以简单地表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j (j = 1, 2, 3)$ 为将方程组的常数项依次替换 D 的第 j 列所得的 3 阶行列式.

为了将此结果推广到未知量更多的线性方程组,需要给出 n 阶行列式的定义. 观察 3 阶行列式的展开式,它是所有可能的、位于不同行不同列的 3 个元素的乘积的代数和,将它们按第 1 行的各个元素合并,则 3 阶行列式也可用如下方法按第 1

行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

即 3 阶行列式可以由 2 阶行列式得到。

定义 1 阶行列式 $|a| = a$, 则 2 阶行列式可由 1 阶行列式得到：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} |a_{22}| - a_{12} |a_{21}|.$$

于是, 可以由较低阶的行列式计算高阶行列式. 下面采用递归的方法来定义 n 阶行列式.

1.1.2 n 阶行列式的定义

定义 给出 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式(可简记为 $|a_{ij}|_n$ 或 $|a_{ij}|$).

当 $n = 1$ 时

$$D = |a_{11}| = a_{11},$$

当 $n \geq 2$ 时

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k},$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$, M_{1j} 为 D 中划去第 1 行、第 j 列后所剩元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式, 即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式, A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式 ($j = 1, 2, \dots, n$).

一般地, 用 M_{ij} 来记 D 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列后所剩元素按原来

顺序组成的 $n-1$ 阶行列式, 称为 a_{ij} 的余子式, 并称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

例如, 行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix},$$

它的位于第 3 行、第 2 列上的元素 3 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

由定义可知, n 阶行列式是由其元素的乘积构成的和式, 用数学归纳法可以证明它的展开式共有 $n!$ 项, 每一项为位于不同行不同列的 n 个元素的乘积. 在所有的项中, 带正号的项和带负号的项各占一半 ($n > 1$).

如上定义的行列式, 当 $n > 3$ 时, 对角线法不再成立, 但它具有许多统一的性质. n 阶行列式通常也采用另一种等价的定义, 可参见本章附录.

n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中, 元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线, 相应地, $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n}$ 称为主对角元, 另一条对角线则称为副对角线.

主对角线以上元素全为零的行列式(即当 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为下三角行列式(行列式中空白处元素全为零, 以下同). 主对角线以下元素全为零的行列式(即当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$) 称为上三角行列式.

主对角元以外的元素全为零的行列式称为对角行列式.

例 1.3 证明 n 阶下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1-3)$$

证 用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 则由定义和归纳假设, n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特别地, n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1-4)$$

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n = (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} a_{1n} (-1)^{1+n-1} a_{2,n-1} \begin{vmatrix} & & a_{3,n-2} & \\ & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)} a_{1n} a_{2,n-1} \begin{vmatrix} & & a_{3,n-2} & \\ & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{nn}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{nn},$$

即

$$D_n = \begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{nn}, \quad (1-5)$$

特别当副对角线以下元素全为零时

$$D_n = \begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ \ddots & & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{nn}. \quad (1-6)$$

例如

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ a_3 & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3 \times 2}{2}} a_1 a_2 a_3 = -a_1 a_2 a_3,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ a_3 & & & \\ a_4 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4 \times 3}{2}} a_1 a_2 a_3 a_4 = a_1 a_2 a_3 a_4.$$

1.2 n 阶行列式的性质及其计算

直接用定义计算行列式一般比较繁琐,下面我们由定义来推导出行列式的性质,利用它们往往可以简化行列式的计算.

1.2.1 n 阶行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换得到的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D^T ,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^T$.
性质 1 可用数学归纳法来证明,详细证明参见本章附录. 此性质说明行列式中行与列的地位是相同的,从而对行成立的性质对列也一样成立. 为方便起见,下面

各性质仅对行加以叙述,若将行换成列结论同样成立.

例 1.5 计算 n 阶上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

解 由性质 1 及式 1-3 可得

$$D = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于任一行各元素与其代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1-7)$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

式 1-7 称为行列式按第 i 行展开的展开式. 将性质 2 中的行换成列, 即行列式可按第 j 列展开, 展开式为

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} (j = 1, 2, \dots, n).$$

性质 2 的证法与性质 1 类似, 略.

例 1.6 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 将等式左端的行列式按第 3 列展开:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3), \end{aligned}$$

原方程即 $(x-2)(x-3) = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

性质 3 用一常数 k 乘行列式某一行的各元素所得的行列式等于用同一数去乘此行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即若行列式某一行元素有公因子可以提出来.

将等式左端行列式按第 i 行展开, 再提取公因子即可得到结果.

推论 若行列式某一行的元素全为零, 则此行列式等于零.

此即性质 3 中取 $k=0$ 的情形.

性质 4 若行列式某一行的各元素是两项之和, 则此行列式可拆为如下的两个行列式相加:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

即这两个行列式对应行的每一个元素分别取两和数之一, 其余元素不变.

性质 4 的证明只要按需要拆项的行展开即可.

性质 5 若行列式有两行对应元素相等, 则此行列式等于零.

证 即证若有 $i \neq j, a_{il} = a_{jl}$ ($l=1, 2, \dots, n$), 则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

用数学归纳法证明. 显然结论对 2 阶行列式成立. 假设结论对 $n-1$ 阶行列式成

立,则对 n 阶行列式 D 按第 k 行展开 ($k \neq i, j$):

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^n a_{kl}A_{kl},$$

由于 a_{kl} 的余子式 M_{kl} ($l = 1, 2, \dots, n$) 为含 D 中第 i, j 行的 $n-1$ 阶行列式, 必有两行元素对应相等, 由归纳假设

$$A_{kl} = (-1)^{k+l}M_{kl} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

从而 $D = 0$.

由性质 3 和性质 5 立即可得如下推论:

推论 若行列式中有两行对应元素成比例 (即 $a_{il} = ka_{jl}; i \neq j; l = 1, 2, \dots, n$), 则此行列式为零.

例 1.7 不计算行列式, 仅利用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 2 & x+1 & 3 \\ 3 & 3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x+3).$$

证 令

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 2 & x+1 & 3 \\ 3 & 3 & x+1 \end{vmatrix},$$

显然, $f(x)$ 是 x 的 3 次多项式, 且立方项的系数为 1, 又

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{性质 5}} 0,$$

$$f(2) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{性质 5}} 0,$$

$$f(-3) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{性质 5 的推论}} 0,$$

即 3 次代数方程 $f(x) = 0$ 有 3 个实根: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$, 从而

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3),$$

得证.

性质 6 行列式某一行各元素加上另一行对应元素的 k 倍, 行列式的值不变, 即