普通高等院校数学类规划教材

应用微积分（第二版）

CALCULUS

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

下册

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等院校数学类规划教材

应用微积分
CALCULUS

（第二版）

组编　大连理工大学城市学院基础教学部
主编　曹铁川
编者　（以编写章节先后排序）
王淑娟　高旭彬　张宇红
张　鹤　肖厚国　张　颖

下册

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分. 下册 / 大连理工大学城市学院基础教学部组编. — 2版. — 大连 ：大连理工大学出版社，2013.8

普通高等院校数学类规划教材

ISBN 978-7-5611-8082-2

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 172478 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023

电话：0411-84708842 邮购：0411-84703636 传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn

丹东新东方彩色包装印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：15.75 字数：364 千字

2010 年 7 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版

2013 年 8 月第 4 次印刷

责任编辑：王 伟 责任校对：骁 杰

封面设计：熔点创意

ISBN 978-7-5611-8082-2 定 价：32.00 元

前言

在高等教育中，微积分是理工、经管、农医等众多院校、众多专业的一门重要的基础课，其理论与方法有着广泛的应用领域。

微积分课程一般也称为高等数学。可能有人会问：大学阶段学习的高等数学与中学阶段学习的初等数学在研究对象与研究方法上有什么不同呢？我们知道，数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学。初等数学研究的基本上是常量，即在某一运动过程中保持不变的量；初等数学研究的图形多是形状确定的规则几何形体。在研究方法上，初等数学基本上是采用形式逻辑的方法，静止孤立地对具体的"形"与"数"逐个进行研究。高等数学研究的对象主要是变量；高等数学研究的图形多是不规则的几何形体，如抽象的曲线、曲面以及由它们构成的几何形体，而且将"形"与"数"紧密联系在一起，相互渗透。在研究方法上，高等数学不再是孤立地、逐个地讨论问题，而是从整体上普遍地解决问题。

例如，导数或微分与积分构成了微积分理论的两个重要方面，导数是从微观上研究函数在某一点处的变化状态，而积分则是从宏观上研究函数在某一区间或区域上的整体形态。在研究方法上，无论是导数还是积分都引入了"无限"的思想，通过极限的方法使问题得以解决。简而言之，函数是微积分的主要研究对象，极限是微积分的研究方法和基础。

微积分产生于17世纪，正值工业革命的盛世。航海造船业的兴起，机械制造业的发展，运河渠道的开掘，天文物理的研究诸多领域面临着许多亟待解决的应用难题，呼唤着新的数学理论和方法的出现。牛顿和莱布尼兹总结了数学先驱们的研究成果，集大成，创立了微积分，并直接将其应用于科研与技术领域，使科学技术呈现出突飞猛进的崭新面貌。可以说，微积分是继欧几里得几何以后全部数学中最伟大的创造。直至今日，作为数学科学的重要支柱，微积分仍保持着强大的生命力。

当今世界正从工业时代步入信息时代。科学技术的日新月异，大大扩展了数学的应用领域。相应地，对当代大学生数学素养的要求也在不断提高，期待着更多数学基础扎实，创新能力强，综合素质佳的人才涌现。

《应用微积分》是为普通高等院校，特别是应用型本科院校所编写的数学教材。通过本课程的学习，可获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用，以及向量代数与空间解析几何、无穷级数与微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能。考虑到授课对象的特点，在编写过程中，我们力求突出以下几个方面：

(1)在教材内容的选择上,既注意到微积分理论的系统性,又在不失严谨的前提下,适当删减或调整知识体系。例如,在极限部分,突出了函数极限的地位,而把数列极限作为函数极限的特例,避免了叙述上的重复,使主旨内容更为简明;在一元函数积分学中,先讲定积分概念,而不定积分和积分法作为定积分的计算工具自然引出,这样就还原和强调了积分的思想。在多元函数积分学中,把重积分、第一型曲线、曲面积分统一为数量值函数在几何形体上的积分,与一元函数定积分前后呼应,既便于理解,又削减了篇幅。在微分方程的初等积分法中,突出了一阶线性微分方程,而把一阶齐次方程、伯努利方程、可降阶方程统一归为利用变量代换求解的微分方程,使这部分内容脉络更为清晰。

(2)考虑到应用型本科院校的实际,在引出概念、定理、公式方面,尽可能按照认识规律,从直观背景出发,深入浅出,提出问题,解决问题,水到渠成地得出结论。对某些概念还从不同角度加以阐述、类比,使学生接受起来形象易懂。例如,对于闭区间上连续函数的介值定理和罗尔中值定理,除讲明其几何意义外,还给出其物理解释;在引出初学者不易理解的泰勒公式时,不厌其详地阐述多项式逼近函数的思想,结合几何形象,分析如何获取最为理想的多项式,并以二阶泰勒公式为例,自然推广,引出泰勒定理。本教材十分重视基础的训练和基本能力的培养,和一些传统教材相比,每一章节围绕着相关定理和运算法则,配置的例题更为丰富,每一节后的习题数量也较为充足。考虑到有的学生有志于攻读更高层次的学位,在每一章后附有复习题,这些题目概念性强,综合性强,可满足这部分学生的学习需要。

(3)注重应用意识的培养,突出微积分的强大应用功能。当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者P·D·拉克斯(Peter D. Lax)指出:“目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃,而且成就辉煌,但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其他学科的相互关系。这种不平衡对于数学及其使用者都是有害的。纠正这种不平衡是一种教育工作,这必须从大学一开始做起,微积分是最适合从事这项工作的一门课程。”“在微积分里,学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言,可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉。最后,很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案。”我们非常赞赏这些观点。为了激发学生的学习热情,开阔眼界,活跃思想,培养学习兴趣和应用意识,在选材上,我们非常注意联系应用实际,除经典的力学、物理学实例外,还增加了化学、生态、经济、管理、生命科学、军事、气象、医学、农业及日常生活中的实例。特别是在每一章的后面都设有“应用实例阅读”一节,提出了一些饶有趣味且具有真实背景的实际问题,用本章学到的微积分知识加以解决,相信这些内容的设置,会进一步激发学生的学习兴趣。

(4)本教材注重高等数学与初等数学内容的衔接,附有初等数学中的常见曲线、基本初等函数、极坐标与直角坐标的基本内容。对于重要数学名词还给出了中英文对照,为学生阅读英文材料提供方便。

本教材由大连理工大学城市学院基础教学部组织编写，曹铁川任主编并负责统稿。参加上册(第 1 版)编写的教师有孙晓坤、高桂英、佟小华、刘怡娣、牛方平、宋尚文；参加下册(第 1 版)编写的教师有王淑娟、麻艳、高旭彬、张宇红、杜娟、张鹤、肖厚国。

本教材还配有《应用微积分同步辅导》教学参考书。

本教材第 2 版是在《应用微积分》第 1 版的基础上，根据近年来的教学实践，按照精品课教材的要求，修订而成。本次修订主要是对例题和习题做了较多的调整，删除了个别繁难的题目，充实了较多的基础性训练，使理论部分和题目部分更为协调，更有利于教与学。修订工作由曹铁川、杨巍、初丽、张颖完成。

当前我国高等教育正从精英教育向大众教育转化，办学模式和培养目标也呈现出了多元化的特点。本教材的编写也是为适应新形势而做的探索和尝试。我们期待着读者和同行提出宝贵的意见和建议。

编著者

于大连理工大学城市学院

2013 年 7 月

目 录

第5章 向量代数与空间解析几何

向量是对自然界和工程技术中存在着的既有大小又有方向的一类量的概括和抽象. 作为重要的数学工具,向量代数在许多领域都有广泛的应用.

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何问题. 空间直角坐标系的建立,把空间的点与三元有序数组对应起来,空间曲面和曲线与三元方程和方程组对应起来,空间向量及其运算的几何形式与坐标形式对应起来. 正是这种形与数的结合,使几何目标得以用代数方法达到,反过来,代数语言又因有了几何解释而变得直观.

向量代数与空间解析几何既是独立的知识体系,同时又是学习多元函数微积分前应作的必要准备.

本章先引进向量的概念,并结合实际背景给出向量的运算. 接着通过空间直角坐标系的建立,对向量及其运算用坐标法进行量化处理. 在空间解析几何部分,又以向量为工具着重讨论平面和空间直线方程. 在曲面方程中,着重讨论柱面、旋转曲面及锥面,并用截痕法研究二次曲面的图形.

5.1 向量及其运算

5.1.1 向量的概念

在现实生活中,我们遇到的量常可以分为两种类型. 一类量在取定测量单位之后,用一个实数就可以表示出来,如长度、体积、温度、质量、能量等,这类量称为**数量**或**标量**(scalar). 另一类量不仅有大小,而且还有方向,例如,描述一个物体的运动速度,只指出速度的大小还不够,还要同时指出速度的方向才算完整. 类似的量还有很多,如力、位移、加速度、力矩、电场强度等. 像这样既有大小又有方向的量,称为**矢量**或**向量**(vector).

向量通常用有向线段表示,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点,B 为终点所表示的向量记作 $\boldsymbol{AB}$. 向量还常用黑体字母或加箭头的字母表示,如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{F}$ 等. 向量的大小称为向量的**模**(norm),记作 $|\boldsymbol{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$ 等.

在实际问题中遇到的具体向量,有时与起点有关,有时与起点无关,在数学上只讨论与起点无关的向量,即所谓**自由向量**,也就是只考虑向量的大小和方向这两方面的属性,

而不考虑它的起点在何处. 因而本教材中的向量可以任意作平行移动，只要平移后能完全重合的向量都认为是相等的. 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果它们的模相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**(unit vector). 模等于 0 的向量称为**零向量**(zero vector)，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向可以看做是任意的，即可根据情况任意指定. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

若将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，则表示它们的有向线段的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5-1)，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

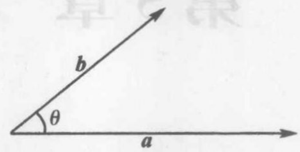

图 5-1

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π，即它们的方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因为相互平行的向量经平移后可以位于同一直线上，故又称两平行的向量**共线**. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **垂直**或**正交**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

因为零向量的方向可以看做是任意的，因此在具体问题中，零向量可以认为与任何向量都平行或垂直.

5.1.2 向量的线性运算

向量最基本的运算是向量的加法和向量与数的乘法，这两种运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

在力学中，求力的合成与分解用的是平行四边形法则，在物理学中出现的向量也用这个方法进行合成与分解. 由此可以规定向量的加法运算.

对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$. 在以 AB、AD 为邻边所作的平行四边形 $ABCD$ 中，记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AC}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 5-2)，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

此规则称为向量相加的**平行四边形法则**.

求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的运算称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法. 也可用下面的方法求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5-3)：作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{AC}$ 表示的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，此规则称为向量相加的**三角形法则**. 从图 5-2 和图 5-3 中可明显看出，用平行四边形法则和用三角形法则求出的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一致的. 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行时，用三角形法则求它们的和也是适用的.

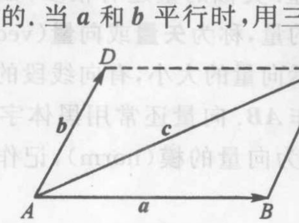

图 5-2

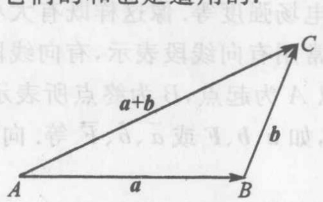

图 5-3

向量的加法满足下列运算规律：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律).

由向量加法的平行四边形法则知，交换律显然是成立的，结合律则可由图 5-4 得到验证.

根据零向量、负向量的定义及加法的运算规律，立即得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

利用负向量可以规定向量的**减法**，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

向量的减法也可以用三角形法则表示(图 5-5).

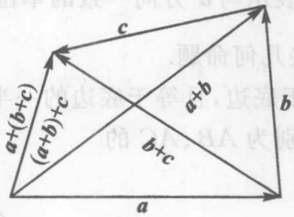

图 5-4

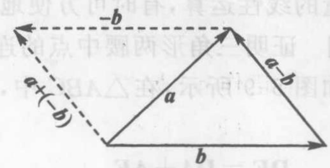

图 5-5

因为向量的加法满足交换律和结合律，所以加法可以推广至求任意有限个向量和的情况. n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

并容易看出只要把 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 依次首尾相接，则由 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点的有向线段所表示的向量即为所求的和. 图 5-6 给出了 $n=5$的情况：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

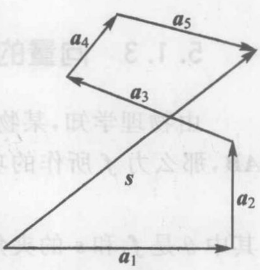

图 5-6

2. 向量与数的乘法(简称数乘)

设 $\boldsymbol{a}$ 是一向量，λ 是一实数，我们定义 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的**乘积**(简称数乘)是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$，它的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(图 5-7).

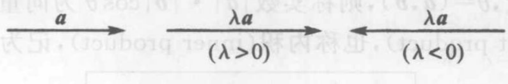

图 5-7

特别地，

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

当 $\lambda=0$ 时，

$$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

显然，对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，μ，数乘满足下列运算规律：

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$(结合律)；

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(对实数的分配律)；

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(对向量的分配律).

由向量加法和数乘的定义可以直接推出(1)、(2). 图 5-8 给出了(3)的几何解释.

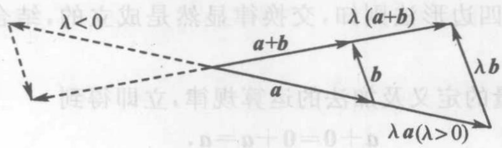

图 5-8

由数与向量的乘法定义可以得到下面两个重要结论:

(1)$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是:存在实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 或 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,其中 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量.

利用向量的线性运算,有时可方便地证明一些几何命题.

【例 5-1】 证明三角形两腰中点的连线平行于底边,且等于底边的一半.

证明 如图 5-9 所示,在△ABC 中,D、E 分别为 AB、AC 的中点,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{DE}&=\boldsymbol{DA}+\boldsymbol{AE}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{BA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AC})=\frac{1}{2}\boldsymbol{BC},\end{aligned}$$

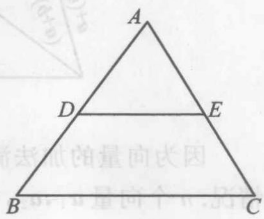

图 5-9

所以 $\boldsymbol{DE}/\!/\boldsymbol{BC}$,且 $|\boldsymbol{DE}|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{BC}|$.

5.1.3 向量的数量积(点积、内积)

由物理学知,某物体在力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下,沿直线从点 A 移至点 B,用 $\boldsymbol{s}$ 表示物体位移 $\boldsymbol{AB}$,那么力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 5-10).

由此我们规定向量的数量积运算.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量,$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,则称实数 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(scalar product),或称**点积**(dot product),也称**内积**(inner product),记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.}$$

按照数量积的定义,力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功可表示为 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

下面给出数量积的几何意义.

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线为 l,且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$. 用有向线段 $\boldsymbol{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$,过点 A 和点 B 作平面垂直于直线 l,并与 l 分别交于点 A' 和点 B'(图 5-11),则称点 A' 和点 B' 分别为点 A 和点 B 在 l 上的**投影**,称有向线段 $\boldsymbol{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影向量**. 容易看出

$$\boldsymbol{A'B'}=(|\boldsymbol{AB}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a,$$

称上式中的实数 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**(projection),并记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$. 当 $0\leqslant$

$\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量的长度；当$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量长度的相反数；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于零. 我们还注意到，无论向量 $\boldsymbol{b}$ 如何平移，它在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影都是同一个实数，即具有唯一性.

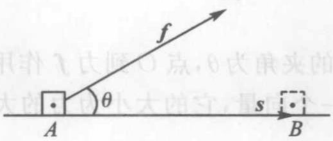

图 5-10

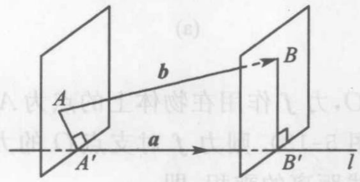

图 5-11

根据数量积的定义，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，立即得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}.$$

这表明，数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影的$|\boldsymbol{a}|$倍，特别是当 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ、μ，向量的数量积满足下面的运算规律：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(数乘结合律)；

(3)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

由数量积的定义还可推知：

> 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模
>
> $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$
>
> 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角满足
>
> $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$
>
> $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是
>
> $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

【例 5-2】 设流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 流经平面 Π，在 Π 上有一面积为 A 的区域，$\boldsymbol{e}_n$ 为垂直于 Π 的单位向量[图 5-12(a)]，试用数量积表示流体经过该区域且流向 $\boldsymbol{e}_n$ 所指一侧的流量(即单位时间内流过该区域的流体质量)，已知流体的密度为常数 ρ.

解　单位时间内流经该区域的流体是底面积为 A、斜高为$|\boldsymbol{v}|$的斜柱体[图 5-12(b)]. 设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角为 θ，则此斜柱体的体积为

$$V=A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n.$$

从而所求流量为

$$\Phi=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n.$$

5.1.4　向量的向量积(叉积、外积)

在物理学中，讨论刚体转动时，要考虑作用在刚体上的力所产生的力矩. 例如，一物体

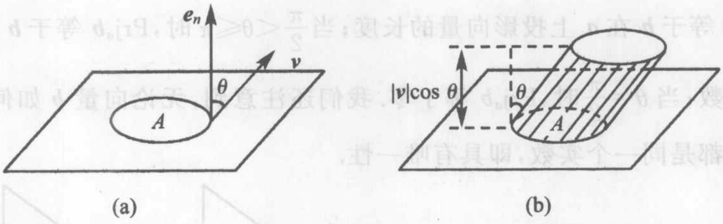

图 5-12

的支点为 O，力 f 作用在物体上的点为 A，f 与 OA 的夹角为 θ，点 O 到力 f 作用线的距离为 $|OP|$（图 5-13）. 则力 f 对支点 O 的力矩 M 是一个向量，它的大小为力的大小与支点到力作用线距离的乘积，即

$$|\boldsymbol{M}|=|OP|\,|\boldsymbol{f}|=|\boldsymbol{OA}|\,|\boldsymbol{f}|\sin\theta.$$

M 的方向垂直于 OA 与 f，指向符合“右手法则”，即当右手的四指从 OA 转向 f 时（转角为两者的夹角），大拇指的指向就是 M 的方向. 由此我们规定向量的向量积运算.

设 a、b 是两个向量，$\theta=(\widehat{a,b})$，规定 a 与 b 的**向量积**（vector product）是一个向量，记作 $a\times b$，它的模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

它的方向垂直于 a 和 b，并且 a、b、$a\times b$ 符合右手法则（图 5-14）.

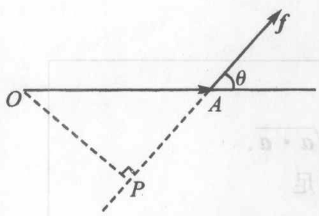

图 5-13

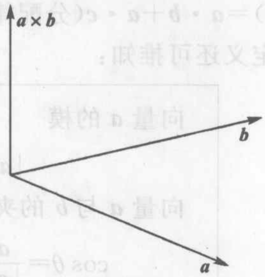

图 5-14

向量的向量积也称向量的**叉积**（cross product）或**外积**（outer product）.

据此定义，上述力矩可以记作 $M=OA\times f$.

两向量的向量积有如下几何意义：

(1) $a\times b$ 的模 $|a\times b|$ 是以 a、b 为邻边的平行四边形的面积（图 5-15）；

(2) $a\times b$ 与一切既平行于 a 又平行于 b 的平面垂直.

向量积的几何意义在后面的空间解析几何中有着重要的应用.

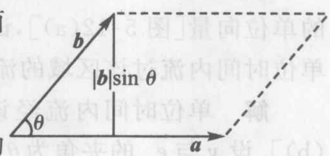

图 5-15

向量的向量积满足下面运算规律：

(1) $a\times b=-b\times a$（注意：不满足交换律）；

(2) $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b)$（结合律）；

(3) $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$（分配律）.

式(1)和式(2)由向量积定义不难验证，式(3)的证明稍显复杂，略去.

由向量积的定义，可立即推出：

$$\mathbf{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}.$$

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

【例 5-3】 设△ABC 的三条边长分别是 a、b、c（图 5-16），试用向量运算证明正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

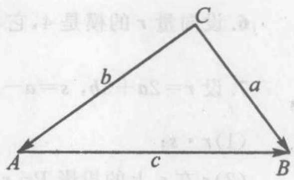

图 5-16

证明　注意到 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}$，故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}&=(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CA}\times\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}\\&=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times(\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}.\end{aligned}$$

于是得到

$$\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}.$$

从而

$$|\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}|.$$

即

$$ab\sin C=cb\sin A=ca\sin B.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

5.1.5　向量的混合积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 仍是一向量，它还可以与另一向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积，我们称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积（mixed product），记为 $[\boldsymbol{abc}]$，即

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

其中 θ 是向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角.

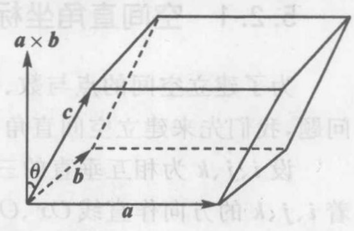

图 5-17

混合积 $[\boldsymbol{abc}]$ 是这样一个实数，它的绝对值 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积. 这是因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积. 以此平行四边形为底，平行六面体的高 h 恰为 $||\boldsymbol{c}|\cos\theta|$（图 5-17）. 易知，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，平行六面体的体积为 $[\boldsymbol{abc}]$.

习题 5-1

1. 设 A、B、C 是△ABC 的三个顶点，D 是 AC 的中点，

(1)求 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CA}$;

(2)若记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{BD}$ 和 $\boldsymbol{CD}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 试用向量法证明三角形余弦定理.

4. 用向量法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

5. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$,试求:

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

(2)$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

6. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与向量 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 上的投影.

7. 设 $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$,且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,求:

(1)$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$;

(2)$\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{r}$.

8. 证明向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是,对任意的实数 λ,都有

$$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|.$$

9. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=26$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

10. 已知 $|\boldsymbol{a}|=10$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$,求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

11. 设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,证明

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

12. 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$,求证 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行.

5.2 点的坐标与向量的坐标

5.2.1 空间直角坐标系

为了建立空间的点与数、图形与方程、向量与数量的联系,进而用代数方法研究几何问题,我们先来建立空间直角坐标系.

设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为相互垂直的三个单位向量,其正方向符合右手法则. 过空间一定点 O,沿着 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向作直线 Ox、Oy 和 Oz,分别以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向作为它们的正向,并取这些向量的长度作为单位,就使得 Ox、Oy、Oz 成为三条实数轴,称为**坐标轴**. 点 O 和三条坐标轴就组成了**空间直角坐标系**,点 O 称为坐标**原点**(图 5-18). $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为该坐标系下的**标准单位向量**.

由两条坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**,x 轴和 y 轴确定的平面称为 xOy 面,类似地有 yOz 面和 zOx 面. 3 个坐标平面把空间分为 8 个部分,每个部分叫做一个**卦限**. xOy 面的 1、2、3、4 象限上方的 4 个卦限依次称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,下方的 4 个卦限依次称为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限(图 5-19).

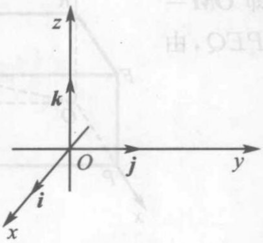

图 5-18

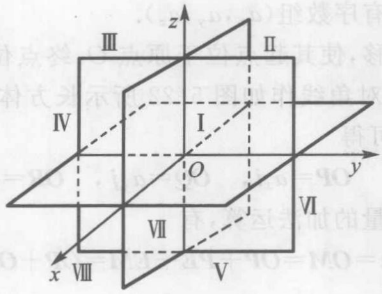

图 5-19

设 M 是空间的一点，过点 M 分别作平面垂直于三条坐标轴，并依次与 x 轴、y 轴、z 轴交于 P、Q、R 三点. P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z. 这样点 M 就和有序数组(x,y,z)建立了一一对应的关系，我们称有序数组(x,y,z)为点 M 的**坐标**，依次把 x、y、z 称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，并可把点 M 记作 $M(x,y,z)$(图 5-20). 特别地，有 $P(x,0,0)$，$Q(0,y,0)$，$R(0,0,z)$，$O(0,0,0)$，xOy 面上点坐标为$(x,y,0)$，yOz 面上点坐标为$(0,y,z)$，zOx 面上点坐标为$(x,0,z)$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点. 过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面. 这 6 个平面围成一个长方体，M_1M_2 为其对角线(图 5-21). 从图中可以看出，该长方体三条棱的长度分别是$|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，于是得到

$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$两点间距离为 $$\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$与坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$|MO|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

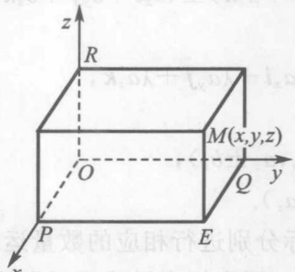

图 5-20

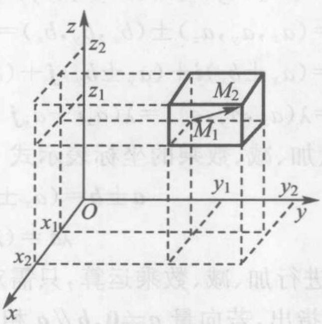

图 5-21

【例 5-4】 已知点 $A(4,1,7)$、$B(-3,5,0)$，在 y 轴上求一点 M，使得$|MA|=|MB|$.

解 因点 M 在 y 轴上，故设其坐标为 $M(0,y,0)$，则由两点间距离公式，有

$$\sqrt{(4-0)^2+(1-y)^2+(7-0)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(5-y)^2+(0-0)^2}.$$

解得 $y=-4$，故所求点为 $M(0,-4,0)$.

前面用几何的方法介绍了向量及其运算，现在讨论向量的坐标表示法. 任给定一向量 $\boldsymbol{a}$，将其置于直角坐标系 $Oxyz$ 中. 若 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影分别是 a_x、a_y 和 a_z，则