普通高等教育“十二五”规划教材

XIANXING DAISHU

线性代数

第二版

徐秀娟 郭小强 纪 楠 编 著

科 学 出 版 社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

（第二版）

徐秀娟　郭小强　纪　楠　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是依据国家教育部审定的本科“线性代数课程教学的基本要求”编写的大学本科应用型教材. 全书共分5章，其内容包括矩阵与行列式、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的相似对角化、二次型等.

本书的编写力求引进概念自然浅显，定理证明简明易懂，例题选取典型适当，应用实例背景广泛，难点分散，便于教学，充分体现“具体—抽象—具体”的辩证思维过程. 每章各节配有两个层次的适量习题，各章后设计了两套自测题，书末附有习题答案.

本书内容符合当前科技发展的需要，可作为培养应用型人才的高等院校工程类、经济管理类等专业的教材，也可作为科技工作者或其他在职人员的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/徐秀娟，郭小强，纪楠编著．—2版．—北京：科学出版社，2013
(普通高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-038407-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①徐… ②郭… ③纪… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第196882号

责任编辑：纪 兴 刘文军／责任校对：王万红
责任印制：吕春珉／封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京鑫丰华彩印有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013年6月第 二 版 印张：14 3/4
2013年8月第十三次印刷 字数：333 000

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈鑫丰华〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135763-2003

第二版前言

本次修订保持第一版教材的体系结构，秉承了宜教易学、注重应用和能力培养的风格与特点，在内容上进行了适度的调整和修改：

（1）细化了利用数学软件和程序将抽象线性代数理论与计算机相结合的部分内容，增加了具有理、工、经管、生物、化工等专业领域实际背景的典型应用例题，使其选材背景更加广泛，这对提高学生的学习兴趣和应用意识大有裨益.

（2）从内容和教学的角度对语句的逻辑结构进行了推敲，更加注重各章节在内容和文字表述上的和谐统一.

（3）调整了部分习题的顺序，使习题的编排较严格地遵守了与内容对应、由易到难的特点，其中，各节习题（A）注重练习、理解，习题（B）注重思考、提高。每章后增添了两套自测题，意在考察学生的阶段性学习成果，提高学生的学习效果.

在本书编写过程中，我们力求引进概念自然浅显、定理证明简明易懂、例题选取典型适当，充分体现“具体—抽象—具体”的辩证思维过程. 总之，本书具有体系严谨、逻辑性强、内容组织由浅入深、理论联系实际、适合灵活的讲授方式等特点.

本书编写分工如下：徐秀娟编写第 1、3、4 章，郭小强编写第 2、5 章，纪楠负责电子课件的制作. 需要电子课件的读者可发送电子邮件到邮箱：xxjluck@126.com 索取。

建议本书的教学时数为 32～36 课时.

由于编者水平有限，本书难免会有不妥之处，请读者批评指正.

编　者

2013 年

第一版前言

线性代数理论有着悠久的历史和丰富的内容，线性代数课程在大学教学中占有重要地位. 在互联网和计算机技术得以迅速发展并且广泛应用的今天，作为处理离散问题工具的线性代数，已经深入到自然科学、社会科学、网络信息、工程技术、经济管理等各个领域，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础.

本书是根据教育部颁发本科“线性代数课程教学基本要求”及高等院校教材建设与改革研究会的精神，以“体系完整、简约实用”为原则，以“因需施教、科学供给、优质服务、全面提高”为目的，并结合编者多年教学的经验编写而成的大学本科应用型教材.

本书内容的选择与安排既注意保持线性代数本身的完整性和结构的合理性，又考虑到应用型本科学生学习的实际情况，在编写过程中力求引进概念自然浅显、定理证明简明易懂、例题选取典型适当、应用实例背景广泛，充分体现具体—抽象—具体的辩证思维过程.

本书以矩阵开篇和结尾，即以矩阵为主线将线性代数中的主要内容联系起来，充分体现了矩阵这一先进的现代数学工具的威力.

关于行列式，采用简便的递归法来定义 n 阶行列式，这比用逆序法定义更容易掌握，而且可以节省教学学时.

关于向量空间，以三维几何向量在线性运算下的关系为背景，抽象出 n 维向量的概念及其运算，利用线性方程组解的有关结论与矩阵方法讨论向量组的线性相关性，使抽象概念具体化.

为培养学生的发散性思维，例题的求解尽量给出多种解法，力求反映不同的思考方式及其联系，目的是激发学生潜能，开发学生学习能力.

为扩展知识的横向和纵向的联系，通过增添具有实际背景（在不同程度上涉及了解析几何、多元微积分学、方程组、统计学、运筹学、计算数学、化学、热力学等学科的基本内容）的典型例题，引导学生体会应用数学的许多问题都会在某个阶段出现线性代数问题这个事实，使学生尝试用代数知识分析和解决简单的实际问题，但跳过这些例题也无损于教学内容的连贯性.

适量引入用 Mathematica 软件求解线性代数中的相关问题，既不占用过多的学时，又能使学生加深对本课程的理解，同时学会借助现代信息技术，利用数学知识解决实际问题的方法，开拓学生视野，增强学习线性代数的兴趣.

思考和演算一定数量的习题是学好线性代数的必由之路. 本书每节后都设有针对基本概念的思考题，每章后都以三种形式给出习题，习题（A），确保学生完成，其目的是保证学生熟练掌握基本知识和基本方法；习题（B），激励学生完成，其目的是为学生考研奠定基础；习题（C），引导学生完成，目的是培养学生应用数学解决问题的能

力. 书末附有习题答案.

徐秀娟编写第 1、3、4 章，何亚丽编写第 2、6 章，张帅编写第 5 章并负责电子课件的制作. 需要电子课件的读者可到：xxjluck@126.com 索取.

建议本书的教学时数为 32～36 课时，带 * 的内容可选讲或不讲.

本书内容符合当前科技发展的新需要，可作为各类培养应用型人才的高等院校工程类、经济管理类等各专业的教材，也可作为科技工作者和其他在职人员自学用书.

由于编者水平有限，本书不妥之处，请读者指正.

目　录

第 1 章 矩阵与行列式

线性代数是研究离散变量之间线性关系的基础理论之一. 矩阵与行列式是线性代数中重要且应用广泛的两个概念,两者之间既有区别又有联系. 矩阵是一个数表,它的行数与列数可以不同;行列式是一种代数运算公式,可将其视为方阵的函数;同时,行列式又是方阵特性的一个重要标志.

本章主要介绍有关矩阵、行列式的概念、基本性质及其常用的计算方法,并初步涉及一些简单应用及其使用数学软件 MATLAB 的实现.

1.1 矩阵及其运算

矩阵是线性代数的主要研究对象之一. 作为一种非常重要的数学工具,矩阵在数学以至自然科学、工程技术、经济管理等诸多领域有着广泛的应用. 本节以直捷的方式定义矩阵,并讨论矩阵运算的一些基本性质,这些性质在以后各章中都要用到.

1.1.1 矩阵的概念

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列(横称行,纵称列,并括以圆括号或方括号)的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵,其中数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为这个矩阵的第 i 行第 j 列元素,也称为该矩阵的 (i,j) 元.

通常用单个大写字母如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 等表示矩阵,有时为强调矩阵的行数与列数,上述 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$.

元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都是零的矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

元素为实数的矩阵称为实矩阵,元素为复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵除特别声明外,都指实矩阵.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，若

(1)$m=1$，即只有一行的矩阵称为**行矩阵**，也称**行向量**. 记作 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$.

(2)$n=1$，即只有一列的矩阵称为**列矩阵**，也称**列向量**. 记作 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

(3)$m=n$，即行数与列数相等的矩阵称为 n 阶**方阵**，或 n 阶矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$ 或 $\boldsymbol{A}$，其中 a_{ii} $(1\leqslant i\leqslant n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素，元素 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 所在的直线称为该矩阵的**主对角线**.

特别地，一阶方阵等同于构成它的元素.

(4)对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若非零元素只出现在主对角线及其上(或右)方，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**，记作 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(5)对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若非零元素只出现在主对角线及其下(或左)方，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角形矩阵**，记作 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(6)一个既是上三角形又是下三角形(即非零元素只可能在主对角线上出现)的矩阵，称为**对角形矩阵**，记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，也可记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

(7)主对角线上的元素都等于某个数 k 的对角形矩阵称为**纯量矩阵**或**数量矩阵**，即 $\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$.

特别地，称 $k=1$ 时的纯量矩阵为**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$.

例如，$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 就是 n 阶单位矩阵.

矩阵的运算包括矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵的乘法、矩阵的转置等. 正是有了这些运算，矩阵之间也就有了一些最基本的关系，从而使矩阵能与其他学科的实际问题密切相关，成为方便简洁的表达手段.

1.1.2 矩阵的线性运算

矩阵的加法、数与矩阵的乘法运算统称为矩阵的线性运算.

定义 1.2 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$,若它们的元素对应相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相等,记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

一般地,若两个矩阵的行数相等、列数也相等,则称它们是同型矩阵.

定义 1.3 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$和$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$是同型矩阵,把矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

注意,只有同型矩阵方可相加,而且和矩阵的每个元素是原来两矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$对应元素之和,例如:

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ -5 & 9 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 7 & 4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 5+5 & 4+0\\ -5+7 & 9+4 & 6+(-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & 4\\ 2 & 13 & -2\end{pmatrix}.$$

定义 1.4 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,$\lambda$为一常数,数$\lambda$与矩阵$\boldsymbol{A}$的数量乘积(简称数乘),记作$\lambda\boldsymbol{A}$,规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

注意,数乘矩阵是用该数乘以该矩阵的每一个元素,例如:

$$3\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1 & 3\times2 & 3\times0 & 3\times4\\ 3\times0 & 3\times3 & 3\times5 & 3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0 & 12\\ 0 & 9 & 15 & 6\end{pmatrix}.$$

特别地,当$\lambda=-1$时,把$(-1)\boldsymbol{A}$称为$\boldsymbol{A}$的负矩阵,记作$-\boldsymbol{A}$.

规定了矩阵的加法以及数与矩阵乘法,便有如下矩阵的减法.

矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$的差,记作$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{mn}.$$

例如:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ 3 & 1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 2-0 & 3-7\\ 4-3 & -5-1 & 0-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 1 & -6 & 6\end{pmatrix}.$$

该定义表明,矩阵的加法、减法以及数与矩阵的乘法运算都归结为对应元素的相加、相减以及数与数相乘的运算,并且运算结果仍是与原矩阵同型的矩阵. 从而矩阵的线性运算与函数的线性运算有类似之处,其中零矩阵扮演数零的角色,负矩阵扮演相反数的角色. 易证矩阵的线性运算满足下列运算规律:

设k,l为任意实数,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$都是$m\times n$矩阵,$\boldsymbol{O}$是$m\times n$零矩阵,则有

(1)交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2)结合律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3)零矩阵的特性:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

(4)负矩阵的特性:$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(5)$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

(6)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

(7)$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$.

(8)$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}, 0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【例 1.1】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,并且 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【解】 由已知 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,得 $2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,从而

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}).$$

又因为

$$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\times1-1 & 3\times(-1)-1\\ 3\times3-3 & 3\times2-0\\ 3\times(-2)-0 & 3\times1-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 6 & 6\\ -6 & 4\end{bmatrix},$$

所以所求矩阵为

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -4\\ 6 & 6\\ -6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}.$$

1.1.3 矩阵的乘法

矩阵的乘法是有关矩阵的一种极其特别的运算,矩阵运算中所具有的特殊规律主要来自于矩阵的乘法运算.

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是一个 $n\times l$ 矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl}\end{bmatrix}$$

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,规定为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kl}\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{kl}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{kl}\end{bmatrix}.$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是一个 $m\times l$ 矩阵，它的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 n 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应的 n 个元素对应乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,l).$$

注意，只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$（左侧矩阵）的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$（右侧矩阵）的行数时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义，此时也说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，并且，乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，而列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

【例 1.2】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$.

【解】 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×2 矩阵，所以 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，并且

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times2+2\times3&1\times3+0\times1+2\times0\\4\times1+3\times2+1\times3&4\times3+3\times1+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\\13&15\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+3\times4&1\times0+3\times3&1\times2+3\times1\\2\times1+1\times4&2\times0+1\times3&2\times2+1\times1\\3\times1+0\times4&3\times0+0\times3&3\times2+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&9&5\\6&3&5\\3&0&6\end{pmatrix}.$$

由此例可知，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即矩阵乘法不满足交换律.

【例 1.3】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$.

【解】 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 2×3 矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，并且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times1&1\times2+(-1)\times2&1\times3+(-1)\times3\\-1\times1+1\times1&-1\times2+1\times2&-1\times3+1\times3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

但 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不可乘，即 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

此例说明当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，并不能得出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 至少有一个为零矩阵；另外当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义.

【例 1.4】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AC},\boldsymbol{BC}$.

【解】 由矩阵乘法的定义，可得

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times0+1\times1&3\times0+1\times1\\4\times0+6\times1&4\times0+6\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}.$$

同理可得

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}.$$

由此例可知,虽然有 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$,但是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$,即矩阵乘法不满足消去律. 矩阵乘法运算有许多地方与通常数的乘法运算规律大相径庭,这是需要读者着重注意的地方.

【例 1.5】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

证明:$\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{AE}_3=\boldsymbol{A}$.

【证】 由矩阵乘法的定义,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1\times a_{11}+0\times a_{21} & 1\times a_{12}+0\times a_{22} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}\\ 0\times a_{11}+1\times a_{21} & 0\times a_{12}+1\times a_{22} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ 成立.

又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AE}_3&=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}a_{11}\times1+a_{12}\times0+a_{13}\times0 & a_{11}\times0+a_{12}\times1+a_{13}\times0 & a_{11}\times0+a_{12}\times0+a_{13}\times1\\ a_{21}\times1+a_{22}\times0+a_{23}\times0 & a_{21}\times0+a_{22}\times1+a_{23}\times0 & a_{21}\times0+a_{22}\times0+a_{23}\times1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{AE}_3=\boldsymbol{A}$ 成立.

类似可证更一般的结论:

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n},$$

以及

$$\boldsymbol{O}_{l\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{l\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{O}_{n\times p}=\boldsymbol{O}_{m\times p}.$$

由此可知,单位矩阵与零矩阵在矩阵乘法中的作用分别类似于数 1 与数 0 在数的乘法中的作用.

矩阵乘法满足如下运算规律,这些规律可以简化矩阵的运算.

设 k 为任意实数,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是使下述所涉及的表达式有意义的任意矩阵,则有

(1)结合律:$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{ABC}$.

(2)分配律:$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

(3)$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

利用矩阵的乘法,可以定义方阵的乘幂.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂记作 $\boldsymbol{A}^m$,规定为

$$\boldsymbol{A}^m=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}_{m个}(m\text{ 是正整数}).$$

特别地，规定 $A^0=E$，又设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 为关于 x 的一元 m 次多项式，则 $f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE$ 为另一个 n 阶方阵，称为方阵 A 的 m 次矩阵多项式.

由方阵乘幂的定义可以证明，方阵的乘幂满足如下运算规律：

(1) $A^mA^k=A^{m+k}$；

(2) $(A^m)^k=A^{mk}$.

其中 m,k 为任意非负整数.

但应注意，由于 $(AB)^k=\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{k个}$，而矩阵的乘法不满足交换律，所以在一般情况下 $(AB)^k\neq A^kB^k$.

【例 1.6】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 A^{100}.

【解】 由 $A^2=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4E$，

可得

$$A^{100}=(A^2)^{50}=(4E)^{50}=4^{50}E.$$

【例 1.7】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，多项式 $f(x)=x^2-2x+3$，求矩阵多项式 $f(A)$.

【解】 由 $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2A$，

可得所求矩阵多项式为

$$f(A)=A^2-2A+3E=2A-2A+3E=3E=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

1.1.4 矩阵的转置

定义 1.7 将 $m\times n$ 矩阵 A 的各行变成同序数的列得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 A 的转置矩阵，记为 A^{T}（或 A'），即矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}，则有 A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$