波动学

《伯克利物理学教程》第三卷

〔美〕F. S. 克劳福德 著

科学出版社

波　动　学

《伯克利物理学教程》第三卷

〔美〕F. S. 克劳福德 著

卢鹤绂 等 译

科 学 出 版 社

1983

内 容 简 介

本书是《伯克利物理学教程》第三卷，专门讨论波动现象．全书强调不同波动现象之间的相似性和可类比性，着重阐述波动的基本概念以及这些概念之间的相互联系．书中还介绍了许多重要波动现象的实例，各章末附有大量习题和课外实验，有助于读者对有关概念深入理解．

本书可供大专院校理工科师生用作教学参考书，也可供有关科技人员参考．

本书由卢鹤绂主持翻译，参加翻译工作的有史福庭、汤家镛、朱梦熊、任炽刚、苏汝铿、吴治华、倪光炯、顾国庆、殷鹏程、钱毓敏、裘志洪等，卢鹤绂负责全书总校工作．

F. S. Crawford

WAVES

Berkeley Physics Course Vol. 3

McGraw-Hill, 1968

波 动 学

《伯克利物理学教程》第三卷

〔美〕F. S. 克劳福德 著

卢鹤绂 等译

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981 年 4 月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1983 年 1 月第二次印刷　　印张：22 3/4

印数：16,701—23,500　　字数：503,000

统一书号：13031·1484

本社书号：2043·13—3

定价： 2.85 元

第一章 简单体系的自由振动

1.1 引论

世界充满了运动的事物. 这些事物的运动按照它们是在一个地点附近运动,还是从一个地点运动到另一个地点,可以粗略分为两大类. 第一类例子有: 单摆的摆动,提琴弦的振动,杯子里水的晃动,电子在原子内的振动(不管它怎么运动),光在激光器两块镜面之间的来回反射等. 另一类例子有: 冰球的滑动,一根拉紧长绳在弹其一端时所引起的脉冲的传播,海浪向着海岸的滚进,电视显象管中的电子束,恒星发出的肉眼观察到的光线等等. 有时候,同一种现象究竟是属于哪一类运动(平均地讲究竟是停在那儿运动还是在前进),这要取决于你的观点,例如海浪向着海岸前进,但是水(和水面上的海鸟)却只是一上一下(和向前向后)地运动,而没有前进. 一个位移脉冲沿着绳子传播,但这绳子的材料却只有振动,而没有前进.

我们首先研究物体在平均位置附近的振动. 在第一章和第二章里,我们将研究一个闭合体系运动的各种实例. 这个体系先受到一个初始激发(某种外界扰动),随后自由振动,而不再受到任何扰动. 这样的振动称为**自由振动**或**自然振动**. 在第一章里,我们研究仅由一个或两个运动部分组成的简单体系,这是第二章里研究由许多个运动部分组成的自由振动体系的基础. 在第二章里我们会看到,由许多个运动部分组成的复杂体系的运动,总可以看成是由许多同时发生的称为**模式**的更简单的运动合成的. 我们还将看到,不管怎样复杂的

体系，它的每一个振动模式的性质都十分类似于一个简单的谐振子．因此，对于处于某一个振动模式的任何体系的运动来说，我们将会看到，它的每一个运动部分，每单位质量在每单位位移中都受到同样大小的恢复力；同时，所有运动部分的振动都以 $\cos(\omega t+\varphi)$ 的方式依赖于时间，这就是说，它们具有相同的频率 ω 和相同的相位常数 φ．

对于每一个我们所研究的体系，我们都用某一个物理量来描述它；该物理量偏离平衡值的位移在这个体系中的不同位置和不同时间是不同的．在力学例子中（有关的各运动部分都是点质量或质点，它们受到恢复力作用），这个物理量就是位于空间点 x，y，z 处的质量偏离平衡位置的位移．这个位移用矢量 $\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t)$ 描述．有时我们把这个含有 x，y，z，t 的矢量函数称为波函数．（当我们能采用连续近似，即能把非常靠近的各点看成基本上具有相同运动时，这个矢量函数不过是位置 x，y，z 的连续函数．）在某些电学例子中，这个物理量可以是线圈中的电流或电容器上的电荷．在其他一些例子中，它可以是电场 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 或磁场 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$．在后一类情况中，这些波称为电磁波．

1.2 一个自由度体系的自由振动

我们首先着手研究在平衡位置附近振荡或振动的物体．这种简单的体系有平面上摆动的摆，接在弹簧上的物体以及 LC 电路等，它们在任何时刻的位形只用一个量来标定就足够了．这时我们就说，这些体系具有一个自由度，或者不太严格地说，它们只有一个运动部分（见图 1.1）．例如，摆动的摆可以用悬线偏离垂线的角度来描述，LC 电路可以用电容器上的电荷来描述．（一个可以在任何方向自由摆动的摆，譬如线下挂着的一个重锤，就不是有一个自由度，而是有两个自由

度；重锤的位置要用两个坐标来确定．旧式挂钟的摆被限制在一个平面内摆动，因此只有一个自由度.）

对于只有一个自由度的所有体系，我们将会看到，“运动部分”离开其平衡值的位移都具有相同的简单的时间依赖关系（叫做**简谐振动**）：

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

对于振动的物体，ψ 可以代表该物体离开其平衡位置的位移；对于 LC 振荡电路，它可以代表电感中的电流或者电容器上的电荷．更精确地说，我们会发现，只是在运动部分离开平衡位置不太远的条件下，式(1)才给出位移的时间依赖关系．[对于大角度的摆动，式(1)是个很粗糙的近似；当真实弹簧拉得很长时，式(1)就不能用来描写这种运动了，因为这时恢复力已不再正比于弹簧的伸长度；倘若电容器上的电荷足够多，由于电容器两板之间的火花能引起“击穿”，电荷将不再满足式(1)。]

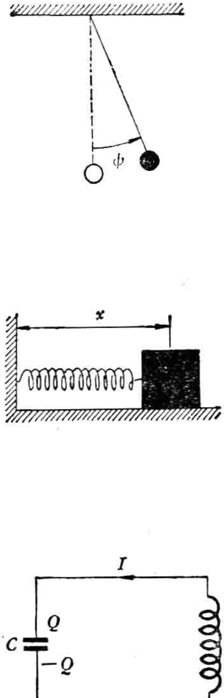

图 1.1　一个自由度的体系（单摆限于在一个平面上摆动）.

术语　关于式(1)，我们将采用以下术语：A 是一个正的常数，称为**振幅**；ω 是**角频率**，单位为弧度/秒；$\nu = \omega/2\pi$ 是**频率**，单位为周/秒即赫兹．ν 的倒数叫作**周期** T，其单位是秒/周：

$$T = \frac{1}{\nu}. \tag{2}$$

相位常数 φ 取决于时间零点的选择. 通常，我们对相位常数的值并无特别兴趣；在这些场合，我们常常选择适当的时间零点使得 φ 等于零，于是 $\psi = A\cos\omega t$，或者 $\psi = A\sin\omega t$，而不用更一般的式（1).

恢复力和惯性 式(1)所表示的振动行为总是由物理体系的两个内在性质交互作用造成的，这是两个具有相反倾向的内在性质：恢复力和惯性. “恢复力”赋予运动部分以适当速度 $d\psi/dt$，“力图”使 ψ 返回到零点. ψ 愈大，恢复力也愈大. 对于 LC 振荡电路，这个恢复力来源于电子之间的斥力，它使得电子“不愿意”挤在电容器的一个极板上，而倾向于平均分布于电容器的两个极板上，使电容器上的电荷为零. 第二个性质是“惯性”，它“反对” $d\psi/dt$ 作任何改变. 对于 LC 振荡电路，这种惯性来自电感 L，它反对电流 $d\psi/dt$（这时 ψ 代表电容器上的电荷)作任何改变.

振动的行为 如果我们从 ψ 为正和 $d\psi/dt = 0$ 开始，则恢复力给出一个加速度，从而引起一个负速度. 在 ψ 返回到零时，负速度达到最大值. 在 $\psi = 0$ 时，恢复力是零，但是这个负速度会引起一个负位移. 这时，恢复力变成正，但是它现在必须克服负速度的惯性. 最后，速度 $d\psi/dt$ 为零，这时位移为最大且方向是负的，上述过程将逆转进行. 整个过程就这样继续循环下去：恢复力力图使 ψ 恢复到零，从而引起一个速度；惯性要保持速度不变，因此使 ψ“走过头”. 于是，系统就这样振动着.

ω^2 的物理意义 振动的角频率 ω 与体系的物理性质有关，(以后我们会证明)在任何情况下其关系式都是

$$\boxed{\omega^2 = \text{单位位移时单位质量上的恢复力.}} \tag{3}$$

有时候，例如在电学例子(LC 电路)的场合，“惯性质量”并不一定是质量.

阻尼振动 如果一个振动体系保持不受干扰，按照式(1)，它将永远振动下去. 然而，在任何实际的物理条件下，总有“摩擦”或“阻尼”过程，会使运动“衰减”下来. 因此，用“阻尼振动”来描述一个振动体系更为切合实际. 如果该体系在 $t=0$ 时“被激发”(冲撞一下，或者合上电键以及用其他办法)而进入振动，我们就有(见《力学》卷，第七章)

$$\psi(t)=Ae^{-t/2\tau}\cos(\omega t+\varphi), \tag{4}$$

其中 $t\geqslant 0$. 当 $t<0$ 时，上式应理解为 ψ 等于零. 在下述几个例子中，为了简化起见，我们将用式(1)来代替更符合实际的式(4). 这样，我们就是把衰减时间 τ 取为无穷大，而忽略了摩擦(或 LC 电路中的电阻).

例 1：单摆

一个单摆是一根没有质量的长度为 l 的细绳或细棒，其顶端悬挂在一个固定的支架上，底端系上一个质量为 M 的“点”状重锤(见图 1.2). 令 ψ 表示悬线偏离垂线的角度(弧度).(单摆在一个平面内摆动，它的位形单独由 ψ 给出.)摆锤的位移用它的路径的圆弧长度来量度，为 $l\psi$. 相应的瞬时切向速度是 $l\dfrac{d\psi}{dt}$. 相应的切向加速度是 $l\dfrac{d^2\psi}{dt^2}$. 恢复力是力的切向分量. 细绳对这个力分量没有贡献，而重量 Mg 对此切向分量的贡献是 $Mg\sin\psi$. 于是，由牛顿第二定律(质量乘加速度等于力)可得

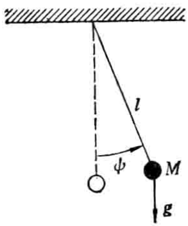

图 1.2 单摆.

$$Ml\frac{d^2\psi}{dt^2}=-Mg\sin\psi(t). \tag{5}$$

我们现在用泰勒级数展开[附录，式(4)]:

$$\sin\psi=\psi-\frac{\psi^3}{3!}+\frac{\psi^5}{5!}-\cdots, \tag{6}$$

式中省略号（…）代表无穷级数的剩余项. 对于足够小的ψ（记住单位是弧度），我们看出，式(6)中除去第一项ψ而外，其余的项全都可以忽略. 你可能会问，要多少才算“足够小”呢？这个问题没有一个统一的答案，它要取决于在你考虑的实验中你能够测量到的函数$\psi(t)$的精确度（要记住，这是物理学，绝对精确的测量是不存在的），以及你认真的程度. 例如，当 $\psi=0.10$ 弧度（5.7 度）时，$\sin\psi=0.0998$；在某些问题中，取近似“$0.0998=0.1000$”尚嫌粗糙. 当$\psi=1.0$弧度（57.3度）时，$\sin\psi=0.841$；在某些问题中，取近似“$0.8=1.0$”就已经足够好了.

如果我们只保留式（6）的第一项，式（5）就取如下形式:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\omega^2\psi, \tag{7}$$

式中

$$\omega^2=\frac{g}{l}. \tag{8}$$

式(7)的一般解是简谐振动，可表示为

$$\psi(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$

我们注意到，由式(8)表示的振动角频率可以写成

$\omega^2=$ 单位位移时单位质量上的恢复力，

即

$$\omega^2=\frac{Mg\psi}{(l\psi)M}=\frac{g}{l};$$

这里用到了$\sin\psi=\psi$的近似.

两个常数 A 和 φ 均由初始条件确定，也就是说，由 $t=0$ 时的位移和速度确定.（因为 ψ 是角位移，所以相应的“速度”是角速度 $d\psi/dt$.）于是我们有：

$$\psi(t)=A\cos(\omega t+\varphi),$$

$$\dot{\psi}(t)\equiv\frac{d\psi(t)}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi);$$

而且

$$\psi(0)=A\cos\varphi,$$

$$\dot{\psi}(0)=-\omega A\sin\varphi.$$

正的常数 A 和 $\sin\varphi$ 及 $\cos\varphi$（它们决定 φ）之值可以由求解上面最后两式得到.

例 2：有质量的物体和弹簧——纵向振动

一个质量为 M 的物体在没有摩擦的平面上滑动，它被两根完全相同的弹簧连接到左右两面固定的墙上．每根弹簧的质量都为零，弹性常数为 K，弹簧松弛时的长度为 a_0．在平衡位置时，每根弹簧都拉长到 a，因而在平衡位置处每根弹簧都有一个大小为 $K(a-a_0)$ 的张力（见图 1.3a 和 b）．设质量为 M 的这个物体离左面墙壁的距离为 z，于是，它离右面墙壁的距离就是 $2a-z$（见图 1.3c）．左边弹簧对该物体施加一个沿 $-z$ 方向的大小为 $K(z-a_0)$ 的力．右边弹簧对该物体施加一个沿 $+z$ 方向的大小为 $K(2a-z-a_0)$ 的力．在 $+z$ 方向的合力 F_z 就是这两个力的叠加（和）：

$$F_z=-K(z-a_0)+K(2a-z-a_0)$$
$$=-2K(z-a).$$

于是，根据牛顿第二定律有

$$M\frac{d^2z}{dt^2}=F_z=-2K(z-a). \tag{9}$$

离开平衡位置的位移是 $z-a$，我们记它为 $\psi(t)$：

$$\psi(t)\equiv z(t)-a;$$

从而

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

这样，我们可以把方程(9)改写成

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\omega^2\psi, \quad (10)$$

其中

$$\omega^2=\frac{2K}{M}. \quad (11)$$

方程(10)的一般解是

$$\psi=A\cos(\omega t+\varphi),$$

仍是一个简谐振动. 请注意式(11)中的 $\omega^2=$ 单位位移时作用在单位质量上的力，因为恢复力在位移为 ψ 时是 $2K\psi$.

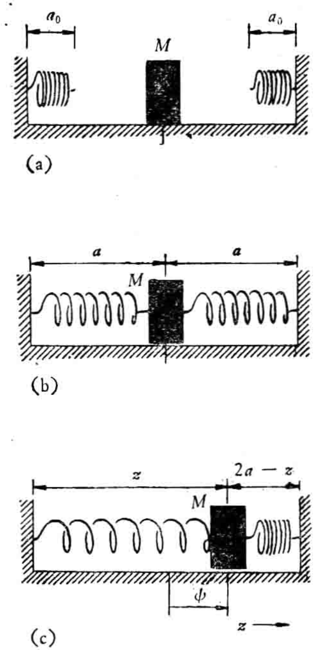

图 1.3　纵向振动. (a) 弹簧松弛不和 M 相连接. (b) 连接上弹簧，M 在平衡位置. (c) 一般位形.

例 3：有质量的物体和弹簧——横向振动

这样的体系如图 1.4 所示. 一个质量为 M 的物体，由两根完全相同的弹簧悬挂在两个固定的支架之间. 每根弹簧的质量都为零，弹性常数为 K，未拉长时的长度为 a_0. 物体 M 在平衡位置时，每根弹簧长度为 a. 我们忽略重力的作用.（在这个问题中，重力不产生任何恢复力，它虽然引起系统的“下垂”，但在我们所感兴趣的近似程度内，并不影响我们的结果.）质量为 M 的物体现在有三个自由度. 它能够沿 z 方向运动（沿着弹簧的轴）而表现为纵向振

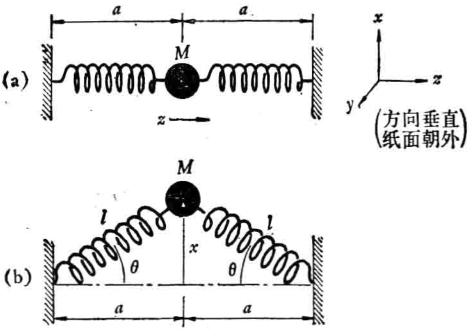

图 1.4　横向振动.(a) 平衡位形.(b) 一般位形(沿 x 运动).

动. 这就是我们上面已经考虑过的运动，这里不必重述. 它也能沿 x 方向或 y 方向运动而表现为“横向”振动. 为简单起见，让我们只考虑沿 x 方向的运动. 我们可以设想有一种无摩擦的约束，使得物体沿 x 方向(横向)可以完全自由运动，而在 y 或 z 方向上不能运动.（例如，我们可以在 M 上钻一个孔，从这个孔穿过一根没有摩擦的长棒，并让这根棒固定在墙上沿 x 方向取向. 然而，通过下面的叙述你自己就能够很容易确信，这种约束是不必要的. 从图 1.4 的对称性可以看出，如果在某一给定的时刻，体系沿着 x 方向振动，那它在 y 或 z 方向上就不会有运动的趋势. 对于其他两个自由度也是这样：z 方向的振动不会在 x 或 y 方向上产生不平衡力；y 方向的振动也不会在 x 或 z 方向上产生不平衡力.）

在平衡时（图 1.4a），每根弹簧的长度为 a，张力为

$$T_0 = K(a - a_0). \tag{12}$$

在一般位形时（图 1.4b），每根弹簧的长度为 l，张力为

$$T = K(l - a_0). \tag{13}$$

这个张力是沿着弹簧的轴向作用的. 取这个力的 x 方向的分量，每根弹簧所提供的恢复力大小为 $T\sin\theta$，方向沿着 $-x$.

利用牛顿第二定律和 $\sin\theta = x/l$，得到

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -2T\sin\theta = -2K(l-a_0)\frac{x}{l}$$

$$= -2Kx\left(1-\frac{a_0}{l}\right). \tag{14}$$

在我们的假定下[包括式(13)所包含的假定，即弹簧是"线性的"弹簧或"胡克定律"弹簧]，式(14)是严格正确的. 不过要注意的是，在式(14)右边出现的弹簧长度 l 是 x 的函数，所以式(14)与简谐振动的表达式并不完全一样；这是因为，作用于M上的恢复力并不严格正比于离开平衡位置的偏离 x.

玩具弹簧近似 有两种十分有意思的方法，可以使我们得到具有线性恢复力的近似方程. 第一种方法我们称为玩具弹簧近似，在这种近似中，a_0/a 与 1 相比可以忽略. 由于 l 总是大于 a，在式(14)中我们就可以忽略 a_0/l. [玩具弹簧是一根螺旋弹簧，未拉长时的长度约为 3 英寸. 在弹性限度之内，它可伸长到 15 英尺左右. 采用这种弹簧时，式(14)中的 $a_0/l < 1/60$.] 利用这种近似，我们可以把式(14)写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{15}$$

其中

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} = \frac{2T_0}{Ma} \qquad (\text{取 } a_0 = 0). \tag{16}$$

上式的解为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$，即为简谐振动. 请注意，这里对振幅 A 没有限制，也就是说，即使振动"很大"，我们仍有理想的线性恢复力. 还应注意，式(16)所给出的横向振动的频率和式(11)所给出的纵向振动的频率是相同的. 一般地说，这个结论是不符合事实的，它仅适合于实际上已经取了

$a_0 = 0$ 的玩具弹簧近似.

小振动近似 如果 a_0 相对于 a 不能忽略（例如，在通常课堂演示中采用橡皮绳时就是这样），玩具弹簧近似就不适用了. 这时式(14)中的 F_x 与 x 之间就不是线性关系. 然而，我们可以证明，如果位移 x 比长度 a 小得多，则 l 与 a 只相差一个数量级为 $a(x/a)^2$ 的量. 在小振动近似下，我们在 F_x 中忽略对 x/a 为非线性的各项. 现在我们就来做这样的代数演算：我们希望在式(14)中以"$l = a +$ 某个量"来描述 l，这样一个"某个量"在 $x = 0$ 时应为零. 由于 x 不论是正还是负，l 总是大于 a，因此，这样一个"某个量"就必须是 x 的偶函数. 事实上，从图 1.4 我们立即得到

$$l^2 = a^2 + x^2 = a^2(1 + \epsilon),$$

$$\epsilon \equiv \frac{x^2}{a^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{l} &= \frac{1}{a}(1+\epsilon)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\epsilon\right) + \left(\frac{3}{8}\epsilon^2\right) - \cdots\right]; \qquad (17)\end{aligned}$$

这里我们利用了 $(1+x)^n$ 的泰勒级数展开式[见附录式(20)]，其中 $x = \epsilon$，$n = -\dfrac{1}{2}$. 下面我们就可以作小振动近似了. 我们假定 $\epsilon \ll 1$ 满足，并舍去式(17)中无穷级数的高次项.（最后，除第一项 $1/a$ 外，我们将把其他项全去掉.）于是我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{l} &\approx \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\epsilon\right)\right] \\ &= \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right]. \qquad (18)\end{aligned}$$

把式(18)代入式(14),就得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2Kx}{M}\left(1-\frac{a_0}{l}\right)$$

$$=-\frac{2Kx}{M}\left\{1-\frac{a_0}{a}\left[1-\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)+\cdots\right]\right\}$$

$$=-\frac{2K}{Ma}(a-a_0)x-\frac{K}{M}a_0\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots. \qquad (19)$$

舍去三次项和更高次项后,得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx\frac{2K}{Ma}(a-a_0)x=-\frac{2T_0x}{Ma}. \qquad (20)$$

[在式(20)的第二个等式中,我们采用了式(12)给出的 T_0.]
现在式(20)具有如下形式:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x,$$

其中

$$\omega^2=\frac{2T_0}{Ma}. \qquad (21)$$

因此 $x(t)$ 是简谐振动:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$

请注意,式(21)所给出的 ω^2 是单位位移上单位质量的恢复力. 因为,对于小振动来说,恢复力是张力 T_0 乘以 $\sin\theta$(即 x/a),再乘上 2(两根弹簧);而位移为 x;质量为 M,因此单位位移上单位质量的恢复力是 $2T_0(x/a)/xM$.

值得注意的是,无论在玩具弹簧近似 $(a_0=0)$ 中还是在小振动近似 $(x/a\ll 1)$ 中,横向振动频率都是 $\omega^2=2T_0/Ma$,这一点从式(16)和式(21)的比较中就可以看出来. 正如我们从式(11)和式(16)中所看到的那样,在玩具弹簧近似中,纵向振动也有同样的频率. 如果玩具弹簧近似不成立(即

a_0/a不能忽略)，则纵向振动和(小的)横向振动就不会有相同的频率，这可以从式(11)，(12)和(13)中看出. 在这种情况下，

$$(\omega^2)_{纵} = \frac{2Ka}{Ma}, \tag{22}$$

$$(\omega^2)_{横} = \frac{2T_0}{Ma}, \ T_0 = K(a - a_0). \tag{23}$$

因此，对于一根橡皮绳的小振动 (a_0/a 不能忽略)，它的纵向振动要比横向振动快些:

$$\frac{\omega_{纵}}{\omega_{横}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{a_0}{a}\right]^{1/2}}.$$

例 4: LC 电路

(LC 电路的更全面讨论见《电磁学》卷第八章.) 考虑如图 1.5 所示的一个 LC 电路. 在左边电容器里，从下极

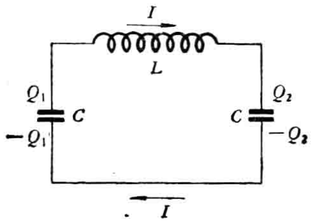

图 1.5　串联 LC 电路. Q 和 I 正负号的规定如图所示. 如果上板相对于下板是正的，则 Q_1 (或 Q_2) 就是正的；如果正电荷按箭头方向流动，则 I 就是正的.

板移到上极板的电荷为 Q_1. 在右边电容器里，从下极板移到上极板的电荷为 Q_2. 电感两端的电动势等于“反电动势” $L\frac{dI}{dt}$. 电荷 Q_1 提供一个电动势 $C^{-1}Q_1$，使得沿图中箭头方向产生一个由正 Q_1 驱动的电流，因此该正电荷 Q_1 引起一个

正的 $L\frac{dI}{dt}$. 类似地,正电荷 Q_2 给出一个负的 $L\frac{dI}{dt}$. 于是有

$$L\frac{dI}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2. \tag{24}$$

平衡时,每一个电容器上都没有电荷. Q_1 减少所形成的电流 I 使电荷 Q_2 增加. 因此,利用电荷守恒定律和图 1.5 所示的正负号规定,可以得到

$$Q_1=-Q_2, \tag{25}$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=I. \tag{26}$$

由式(25)和(26)可知,这种电路只有一个自由度. 我们只要给出 Q_1, Q_2 或 I 中任何一个就能描述电路的瞬时状态. 由于在我们以后的工作中(当我们深入到多于一个自由度的体系时)使用电流 I 这个量最方便,我们现在就采用它. 先利用式(25)消去式(24)中的 Q_1, 然后对 t 求微商,再利用式(26)消去 Q_2, 我们得到:

$$L\frac{dI}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2=-2C^{-1}Q_2;$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}=-2C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}=-2C^{-1}I.$$

于是,电流 $I(t)$ 所遵从的方程是

$$\frac{d^2I}{dt^2}=-\omega^2I,$$

其中

$$\omega^2=2C^{-1}/L; \tag{27}$$

因而 $I(t)$ 也呈简谐振动:

$$I(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$