

中学数学
与
应用丛书

名誉主编 姜伯驹 史宁中

北京高中数学知识应用竞赛 试题及解析

主 编 王尚志

副主编 刘来福 李延林 刘意竹

YINGYONGSHITIYINGYONGSHITIYINGYONGSHITI

东北师范大学出版社



SHUXUE

中学数学与应用丛书

北京高中数学知识

应用竞赛

试题及解析

主 编:王尚志

副 主 编:刘来福 李延林 刘意竹

东北师范大学出版社
长 春

让普通大众了解数学对世界的意义

中国科学院院士 北京大学教授

姜伯驹

各位老师,各位首长,各位专家:

我代表北京高中数学知识应用竞赛组织委员会,代表这一竞赛的发起单位,北京市数学会、北京市教育委员会教育科学院、人民教育出版社——北京师范大学、首都师范大学讲几句话。

北京高中数学知识应用竞赛已由北京市教委正式批准,将在今年下半年举行。为什么在严格控制各种竞赛的今天,会批准这样一个新办的竞赛呢?我们在筹办这一活动的过程中,不仅得到市教委以及许多数学家、数学教育家热情的支持,许多非数学界的科学家,如天文学家王绶琯院士,机械工程专家、中国科协孙大涌副主席都表示了极大的兴趣和支持;在我们的咨询委员会、组织委员会中就有六位中科院院士。为什么这个活动会受到如此广泛的支持呢?因为它方向对,意义大。

数学这门学科,在第二次世界大战以来在社会生活中的作用已经发生了革命性的变化。最显著的变化是在技术领

域。随着计算机的发展,数学渗入各行各业,得到广泛的应用。数学已从幕后走到幕前,在很多地方直接为社会创造价值,已成为一种关键性的、普遍适用的、增强能力的技术。联合国教科文组织确定世纪之交的2000年为世界数学年,正反映了国际上的这种共识。2000世界数学年的主要任务是使社会特别是普通大众了解数学对于世界的意义。从事数学教育的工作者责无旁贷,应该为很好地完成这一任务而共同努力。

数学的这种变化,对数学教育提出了新的问题和要求。首先是要求全民提高对数学的认识,提高掌握数学的水平。学会应用数学的思想和数学的知识去解决实际问题。现在计算机已经得到了广泛的使用,对学会使用计算机应该有一个正确的认识。学会使用计算机,不应该仅仅理解为会操作计算机,计算机出来什么就是什么,人跟着计算机走,而应该学会运用计算机解决我们希望解决的问题。人是主体,计算机是工具,计算机计算得很快,工作得很快,这时候要得到正确的结论,人的脑筋要非常之清楚。使用计算机的人应该具备很好的数学头脑,这就需要人经常很好地进行数学训练,这是非常根本的一件事情。大家都知道,国际上经济的竞争归根结底是人才的竞争,教育的竞争,教育改革是当今世界各国关注的热点。数学发展提供的这种新视野,使数学竞争的改革自然地成为教育改革的前沿突破口。在世

界各国,数学教育改革都已经成为一个热门的话题。

就是在这样一个大气候下,才提出了举办高中数学知识应用竞赛的问题。

在常规的数学教育中,还存在着忽视应用的倾向;这不仅是中国的问题,世界各国的教育也存在着这种倾向。近几十年来,数学教育界对加强数学知识应用教育给予了充分的关注。美国的大学生数学建模竞赛已经在全世界产生了巨大的影响。特别值得注意的是,国外数学和数学教育界特别强调在中学教育中进行“问题解决”和“数学建模”的教学。例如,1975年,美国数学科学咨询委员会(Conference Board of the Mathematical Science)发布的《关于幼儿园到中学十二年级学校数学教学的总看法与分析》中就建议把数学应用和建模方法搀和到中学课程中去;美国数学教师联合会(National Council of Teachers of Mathematics)把数学建模的内容结合进中学教材,作为80年代制定的数学教育改革目标。自1983年开始,数学建模和应用的数学国际会议(International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Application)两年召开一次,其重心也逐渐从大学数学教育向中学数学教育倾斜。在第四次会议的会议录序言中说:“……无论从教育,科学,社会和文化的观点来看,这些方面(数学应用,模型和建模)都已被广泛地认为是具有决定性的重要意义。”

我国教育界对此也是极为关注。1993年国家教委基础教育课程教材研究中心召开了两次“数学课程内容改革研讨会”，强调了“数学教学应联系实际”，“要重视从实际问题中建立数学模型，解决数学问题，从而实际问题这个全过程”。特别是在1994年国家教委把由学会举办了五年的“大学生数学建模竞赛”确定为教委主办的竞赛，这是一项重大的、有明确导向性的举措。特别要提到的是，上海自1991年举办了“金桥杯中学生数学知识应用竞赛”，现已经连续举办了五届。这就是举办高中数学知识应用竞赛的背景。它是在国内外有一定的舆论准备和实践的基础上进行的。

北京市教委高瞻远瞩，适时批准了这一竞赛。徐主任刚才作了一个很好的讲话，他担任了这次竞赛的名誉主任。这对我们是一个鼓舞，也是对这项工作和数学教育的一个有力的推动。

高中数学知识应用竞赛虽是从小处着手的一项工作，却是大处着眼。我们把高中数学知识应用竞赛的目的归纳为下面几句话：“呼唤应用意识，宣传数学建模，影响社会舆论，组织改革队伍，积累教改资料，推动教育改革。”

现在大家都在谈论从应试教育到素质教育的转化。在数学教学中强调数学知识应用的教学，核心就是要提高受教育者的素质修养，改变“应试教育”的倾向。加强应用教育，这应当是整个素质教育的重要组成部分；在这方面进行

研究与实践无疑是教育改革中一个重大的课题。我们这次竞赛正是这样一项大的实验活动。

应用竞赛这种形式,由于它的普及性、广泛性、实用性,同时也有趣味性和启发性,能起到比较有力的宣传和启蒙作用,对于学生和教师都可以产生较大的影响。甚至对家长也会产生影响。1993年我们开展“方正杯”数学知识应用竞赛时,就显示了相当的宣传、普及效果。当时,为了命好题,做好这一工作,我们组建了讨论班,收集、编译了许多资料,培养了一批积极分子队伍,推动了这一工作;如果没有当时的工作,就不会有今天的进展。这说明,只要方向对头,竞赛是可以带动全面工作的。

这一竞赛的实施办法大致如下:竞赛分初赛和决赛两步。初赛采用开卷办法,即以散发试卷和在报纸杂志上刊载试题相结合的办法,开卷征答,限期收卷。在限期内将答案交到指定地点,即为有效卷。以学校和教研部推荐和按成绩筛选相结合的办法确定参加决赛的名单。决赛采用闭卷办法。这是两段的办法。

初赛采用开卷的办法,是否可以?1993年“方正杯”数学知识应用竞赛和上海的“金桥杯”数学知识应用竞赛的初赛都是采用开卷办法。从这些竞赛的经验看,抄袭作弊的现象是少数,特别是跨班级抄袭更少。因为是自由参赛,又有实用性、趣味性,可入手的试题,大多数学生愿意自己完成,这是我们的

基本估计。况且评奖必须通过闭卷的复赛,因此竞赛的公正性是有保证的。初赛采用开卷的办法可使竞赛普及,影响面更大一些,更切合竞赛的宗旨。

这一竞赛的最大特点是不打乱正常教学秩序,不作以参赛为目的辅导和培训,竞赛方式不冲击正常教学,完全在课外进行。不增加学生负担,参赛完全自愿。我们的指导思想是,以试题的实用、趣味、新颖来吸引学生和教师,发挥它的影响作用。这对我们无疑是一种挑战,这样的题目是不容易出的,但却是很有意义的工作。

北京具有全国最好的条件:专家学者云集;大学生数学建模竞赛的中坚骨干大多在北京;中学教学力量也很强大。北京应该对全国的教育改革有所贡献。让我们在北京市教委的领导下,大处着眼,小处着手,做一些踏踏实实的工作。

(1997年6月姜伯驹教授在“开展高中数学知识应用竞赛,推动数学教育改革动员会”上的讲话)

北京

高中数学知识应用竞赛命题组

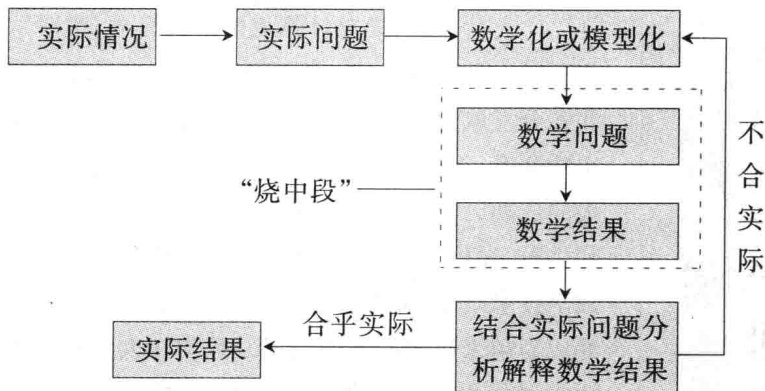
一 背景

2000年被联合国教科文组织定名为“世界数学年”。国际数学教育委员会秘书长Niss教授说：“‘世界数学年’的主要任务是让全社会特别是普通大众了解数学对世界的意义。”在20世纪，特别是二次大战以后，随着计算机的迅猛发展，数学取得了巨大的发展，这一发展不仅反映在数学本身和各分支取得本质的进展，各分支间建立了深层次的联系，更反映在应用数学和数学应用取得巨大的成功，数学几乎渗透到了社会的每一个领域和学科，发挥了实质性的作用。“高科技本质上是数学技术”(David.曾任美国总统顾问)这一看法已经成为越来越多的人的共识，“数学在人们社会生活中的作用起了革命性的变化”，“数学能力成为人们取胜的法宝”(姜伯驹，中科院院士)，这一切要求人们对数学有一个全面、正确的了解，这一切对数学教育乃至整个教育提出了严重的挑战，它涉及高等数学教育、基础数学教育和其他层次的数学教育，它包括教学大纲、课程设置、教材、教法、学法、评估、课外活动等等。

数学教育改革是世界关注的热门话题。目前，国际数学教育界普遍赞同通过开展数学建模活动，在教学和学习中推广使用现代化技术（计算器、计算机、数学软件、教学软件、多媒体等等）来推动数学教育改革。大学生的数学建模科技活动

(包括大学生数学建模竞赛)在世界范围内的成功开展,对高等学校的数学教育起了极大的推动作用,这是一个生动的成功范例。

把数学建模活动的重心从大学向中学转移是国际数学教育的一种趋势。先入为主,让中学生(甚至小学生)都对数学和数学的作用有全面的了解,“还数学的本来面貌”(姜伯驹),让更多的学生了解和运用数学的思想和方法解决问题的全过程。数学建模的过程是:



我们所说的数学知识应用科技活动与数学建模活动是同一个概念,说数学知识应用科技活动便于中学的教师和学生理解。

我国是一个具有优良教育传统的国家,尤其在数学教育方面有丰富的经验和优异的成绩,培养了众多的优秀人才。但是我们也必须看到多年来数学教育的弊端。长期以来,数学教学是在“烧中段”,其“弊端的核心是我们的数学教育不同程度、或多或少地不讲数学的意义,不讲数学跟现实生活的联系,不讲数学与其他学科的联系,不讲数学在社会生活中的应用价值,这些导向使整个社会对数学存在某种误解,认为数学就是搞难题,搞偏题,把数学教学变成了一种纯粹的演题、运算的训练,中国应试教育扭曲了整个中学教育,也扭曲了数学教育”(北京数学会理事长李忠)。这个问题是世界性的。国

际著名的数学家R.Courant曾尖锐地批评了数学教育：“两千年来掌握数学知识已被视为每个受教育者必须具备的智力，数学在教育中这种特殊的地位今天出现了严重的危机，不幸的是数学教育工作者应对此负责。数学教学逐渐地流于无意义的单纯的演算习题的训练，固然这可以发展演算能力，但无助于学生对数学的真正理解，无助于提高独立思考的能力。忽视应用，忽视数学同其他学科的联系，这种情况丝毫不能说明完全形式化方法的正确性，相反，在正视智力培养的人们当中必然激起强烈的反感。”

我们刚刚走过的这10年是世纪交替的重要时期，高速发展的社会在科学技术、资源、特别是人才竞争方面越加强烈。创新意识，创新能力是人才最重要和最基本的标志。江主席十分重视提高创新能力，他说：“一个没有创新能力的民族，难以屹立于世界先进民族之林。”人才培养向教育提出了严肃的挑战，提高青少年的创新与实践能力是国际社会共同关心的教育问题，应该在我们的教育中提供给学生创新的机会，让学生发现问题，提出问题，运用学过的方法和知识去解决问题。为此，课程改革、改变学生的学习方式、教师专业化发展等一系列教育改革正在全球展开。

1996年我们与数学界、科学界的专家（其中有五位科学院院士）研讨如何开展数学知识应用科技活动，经北京市教委批准，举办了第一届北京高中数学知识应用竞赛。

一年一度的数学知识应用竞赛收到了非常好的效果，从第二届开始陆续有天津、河北、山西、陕西、辽宁、吉林、四川、湖北、浙江、江苏、云南、福建等省市的数学会、师范大学、教科所、教研室与组委会联系，应邀在当地组织学生参加了这一活动。目前又有黑龙江等几个省准备参加第六届竞赛。

“开展数学知识应用竞赛，推动数学教育改革”是开展应用竞赛活动的基本定位。这不是一个为了竞赛而竞赛的活动，而是作为

探索和推动数学教育改革,在学科中实施素质教育的一项教育改革的实验。

姜伯驹院士把开展这项数学知识应用竞赛活动的目的明确为:呼唤应用意识,培养创新能力,宣传数学建模,影响社会舆论,建设改革队伍,积累教改资料,推动教育改革。

二 竞赛形式

北京高中数学知识应用竞赛分初赛和决赛两个阶段进行。

初赛是开卷的,在一个星期五的16:00将试卷发给学生,答卷地点不限,可以参考任何资料,可以使任何计算工具(包括计算机、计算器、各种数学软件)。我们要求学生独立完成,提倡诚实的治学态度;如果学生与他人作了讨论,我们要求学生在考卷上注明讨论的情况。星期一上午8:00,学生把完成的试卷交给组织者批改。

初赛希望给中学生一个宽松的、独立的、可以发挥自己能力的环境,在考试的模式上作一点新的探索。很多人认为这种考试模式的“公平化”提出质疑。事实上,有相当一些学生与他人进行了不同程度的讨论,有的学生和家长讨论,有的是同学之间进行了讨论,有的甚至去请教了专业教师和专家等等。我们从两个方面来看待这一问题,首先是积极的一面,在思考的前提下去请教,去讨论,去交流,不仅不是坏事,而是一种极为重要的学习手段和方法,缺乏交流、讨论与合作是我们教育中一个很大的缺陷。即使现代的数学研究,采取封闭式研究的人已经很少了,交流成了研究基本手段。我们的教育中很少向学生提供这样的机会,不利于提高学生合作的意识和能力。考试的两种作用,一种是“筛子”的作用,一种是“泵”的作用,在我们的考试体系中,过多地强调了“筛子”的作用,把每一个考试变成一个“关口”。我们希望为改善这种状况作一些有益的探索。

当然,我们应该看到另一个方面,也有相当一部分同学没有把与别人的讨论情况写在自己的答卷上。原因是多方面的,如组织者没有给予足够的强调,也没有很好地解释同学应该如何合作,以及合作中的一些基本道德,同学们对这种做法生疏和不习惯也是重要的原因。这些原因不是消极的,是教育工作者应该注意的问题。“以作弊为手段,达到急功近利的目的”是目前教育中存在的一个突出的问题,也是一种社会弊病,我们采用学校推荐的方式来参加决赛是一种消除“作弊”影响的措施。

总的看来,初赛这种形式是好的,有助于更多的同学参加,有助于同学在一个较为宽松、自由的环境下,了解数学在社会生活中的作用,有助于学生全面调动自己,发挥自己的才干。

决赛分两部分。一是让学生完成一篇数学应用的小论文,即让学生观察社会、自然和生活,发现问题,提出问题,运用自己学过的数学和其他知识,把问题变成一个数学问题,然后解决这一问题,写成一篇论文,论文成绩作为总成绩的一部分,并单独设立优秀论文奖。

决赛的第二部分是闭卷答题,在150分钟内在指定地点每个人独立完成问卷中的问题,答卷时可以使用计算器等计算工具。

我们将上述竞赛方式概括为“两开一闭”,即开卷初赛,开卷决赛论文,闭卷决赛答题。

三 命题的基本原则

数学知识应用竞赛题与传统的数学应用题有显著的区别,主要表现在以下几个方面:

1. 更加重视从自然、社会、生活的实际中提出问题,力争原汁原味地反映实际,使问题鲜活。

2. 条件并非可丁可卯,甚至不一定有明确的条件,需要解题者作适当假设或经过调查奠定解题的基础。

3. 许多问题的文字表述较长,这往往是解题者了解一个实际问题的需要,解题者要在较大的阅读量中寻找问题的线索,提炼有用信息。

4. 尽量使问题背景丰富,问题呈现出解题者面前时形不成题型暗示。

5. 有相当多的问题的答案是开放的,让学生以不同的角度从不同的途径解决问题。

6. 以提高解决问题的能力为目的,而不是为了学生巩固所学知识,为提高自学、研究的能力提供背景。

能否给出好的题目是应用竞赛工作的核心。几年来,命题组遵循了如下基本原则:

第一,关注来自生活、社会、自然的各种问题,背景尽可能广泛,部分问题体现出时代性,能与当前社会关注的热点问题相联系。

问题背景广泛有助于中学生了解数学与现实社会生活的联系,了解数学与其他各学科的联系,了解数学的全貌,有助于提高中学生的应用意识和应用能力。更为重要的是有助于提高学生对数学的兴趣,对教师也是有同样的好处。毫无疑问,遵循上述原则是非常困难的事,需要各行各业的参与。事实上,长期以来我们的教材中最缺乏的是这类材料。

仅以首届初赛为例,第1题“夏利”出租车问题,第2题是以“可口可乐”罐为背景的,第3题和第5题是当年从银行和人口年鉴中得到的数据,第9题是从事农业规划课题研究的教师提供的,第10题是叶其孝老师根据电视台的报道提出的问题。其中,第3,4,5,8题是以当年的事情为背景的,至于第6题——工厂合并问题,第7题治

污染问题,尽管有较大的人为编造成分,但背景有看似较强的时代特点,工厂倒闭、合并,污染治理都是当前社会关心的热点问题,只是远比这些问题复杂一些。

第二,涉及的数学知识,不超出高二学生的掌握范围。

这一点我们认为是非常重要的。我们不希望在知识方面增加学生的负担,不希望搞针对性的层层培训。就此须要说明的是:

(1)重点在“头”和“尾”。

我们在竞赛中所出的问题不是或者说主要不是为了理解和说明教科书中的某些知识点(某些概念、定义、定理、思想方法……),而是希望同学们把实际问题转化成一个数学问题,对从数学问题中得到的数学结果进行分析,讨论其是否符合实际问题的要求。用通俗的话来说,我们在这儿强调的不是“烧中段”,而是“头”和“尾”。这对学生走向社会是极为有益的。当然“中段”对于学习数学的中学生来说也是重要的。

(2)“中段”不超纲。

一个实际问题,常常可以用不同的数学模型(数学问题,数学方法)来讨论,这个命题原则强调的是解决这些数学问题时完全可以用中学生在课堂上学到的知识、方法、思想去做的。简单地说,“中段”不超纲。

很多中学教师和在教研部门工作的教研员曾担心“数学知识应用竞赛”的问题会太难,中学生做起来很困难,甚至使教师也无从下手。为了解决这个问题,我们特邀请了中学数学教师和教研人员参加命题组。他们积极参与提供问题,讨论问题,修改问题,充分估计中学生对问题可能作出的反应。

我们有必要指出,真正从生活实际提出来的问题以及解决这类问题的思维模式是中学生和多数中学数学教师不十分熟悉的。这类问题的条件和结论之间的逻辑关系不一定像数学问题那样明

确,那样配合得严丝合缝,甚至于还须要对问题进行进一步的加工整理才能初步看出问题的数学结构。题目中的数据是实际观测的结果,它们在不同的程度上与实际存在误差……如何处理这些问题,在我们传统的数学教育中并没有给予足够的注意。如果说难,主要难在不熟悉,难在过去没有解决过这类问题,问题本身的“难度”并不很大。

我们希望中学生和中学数学教师能够了解实际问题不在于所用的数学的多少,深和浅,而在于结果是合乎实际的,是解决了问题的。从某种意义讲,对实际问题来说,能用简单数学绝不用复杂的数学,这样才能为更多的人接受。

(3)知识综合性强。

我们提供的问题知识综合性比较强,要做好这些问题,需要的不仅仅是数学,还需要其他的知识,物理、化学、生物等等,其他的知识并不深,多属于常识。知识的综合能力是我们学生走向社会面对纷繁复杂的现实世界所需要的一种基本的能力,从小(至少从中学做起)就应使学生受到一定的锻炼,这对我们的发展是很有好处的。目前很多学校组织学生通过社会调查来了解社会也是一个综合运用知识的锻炼,只是“数学知识应用科技活动”的学科味道更重一些。

第三,部分问题具有开放性和创新性。

部分问题的开放性是我们的追求,给学生一定的创新余地是我们的原则。目前,开放性问题(opened-end problem)也是数学教育工作者关心的热点问题之一。开放性问题是指这样一类问题,或者答案是开放的,或者问题的条件是开放的,或者方法和思路是开放的,总之是引导学生进行开放性思维的一类问题。我们在此仅强调两点:

一是开放性问题本质上是倡导创造(创新)思维,这一点在我

们传统教育中,特别是数学教育中强调得不够。

二是“面向实际的应用问题”是开发开放性问题的广阔天地。

第四,逐步与教育部制定的新大纲和课程标准、新教材接轨。

前几年,教育部颁布了高中的新大纲,委托人民教育出版社编写了新教材。目前,正在全面推广。中国数学教材应该说有着许多优良传统,但是随着社会的发展,逐渐暴露出一些问题,有些问题还是比较突出的,例如:1)知识面较窄,内容少;2)部分内容(章节)过难,过深了;3)数学的背景,数学的意义,数学的应用,数学与其他学科的联系讲得太少;4)与现代化教学和学习技术联系得较少;5)发挥学生主动作用的内容缺乏多样形式。新大纲、新教材针对这些问题作了较大的改革。虽然新大纲、新教材还处在试验阶段,一些提法、内容还可能作调整,但是,新大纲、新教材所反映的改革的方向是正确的。执行过程中的主要问题,反映在部分教员人员,教师更新观念和知识结构的问题上。这一活动将逐步地与新大纲、新教材的要求接轨,同时,也将为新大纲、新教材的充实和完善作某些探索和尝试。

在命题的过程中,我们特别注意到,如果问题涉及新大纲、新教材的一些知识,它们没有出现在原来的教材中,我们在问题后补充出所需要的概念的定义,不希望把学生引导到掌握更多固定的解题模式,而希望同学们了解和掌握一些日常生活中经常需要的数学思想。

简单的命题演算,向量概念及其运算,概率和统计的基本概念和方法,微积分初步,规划基本思想,图论的某些问题等等是新大纲、新教材希望同学们有所了解的内容。现在工作在中学数学教学第一线的中青年教师应有所准备,“人无远虑,必有近忧”。

总之,北京市高中数学知识应用竞赛形式的选择及命题原则的制定,都是根据数学知识应用竞赛的宗旨,都是为了实现这一活