10年品牌　超实用

2014 百题大过关

修订版

高考数学

第二关

张瑞炳◎主编

ECNUP 上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

2014

百题大过关

高考数学

第二关　核心题（修订版）

主　编：张瑞炳

编写者：

吴　迅　张瑞炳　黄天顺　邱天文
陈文清　陈海烽　连生核　章少川
李生华　祝国华　杨福能　许若男
谢　钧

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学百题大过关. 第二关:核心题/张瑞炳主编. —修订版. —上海:华东师范大学出版社,2013. 1
(百题大过关)
ISBN 978 - 7 - 5675 - 0269 - 7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 023438 号

百题大过关

高考数学·第二关 核心题(修订版)

主　　编　张瑞炳
总 策 划　倪　明
项目编辑　舒　刊
审读编辑　罗秀苹
装帧设计　卢晓红
责任发行　高　峰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购) 电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs. tmall. com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　17
字　　数　434 千字
版　　次　2013 年 4 月第三版
印　　次　2013 年 6 月第二次
印　　数　31001–42000
书　　号　ISBN 978-7-5675-0269-7/ G · 6157
定　　价　29.00 元

出 版 人　朱杰人

丛书前言

图书市场上有关小升初及中、高考的复习用书不胜其多，不少书的训练题或失之偏少，或庞杂无度. 同时选择几种作参考，往往重复不少，空白依旧甚多，费时费钱还未必能完全过关. 怎样在有限的时间里得到充分而有效的训练？怎样使训练达到量与质的最完美匹配？依据对小学毕业班、初三和高三优秀教师的调研，总结出“百题过关”的复习理念. 为此，我们邀请经验丰富的教师担任作者，每本书或每个考点精心设计一百道互不重复且具有一定梯度的训练题，以求用最快的速度，帮助学生完全过关.

丛书共 41 种，涵盖小升初语文、数学、英语及中、高考语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理的全部题型.

丛书具有四大特点：

一、丰富性. 丛书涉及的内容囊括了小升初及中、高考所有知识点，覆盖面广，内容丰富.

二、层次性. 题目排列杜绝杂乱无章和随意性，一般分为三个层次：第一，精选历年来的相关考题；第二，难度稍小的训练题；第三，难度稍大的训练题. 这样编排既能让读者了解近年来小升初及中、高考的命题特点及其走向，又能得到渐次加深的足够量的训练.

三、指导性. 为了方便使用本丛书的老师和同学，对有一定难度的题目，丛书不仅提供参考答案，还力求作最为详尽的解说，目的在于让读者知其然，更知其所以然. 同学们有了这套书，就等于请回了随时可以请教的老师.

四、权威性. 丛书的编写者都是国内名校骨干教师，有些还是参加国家教育部“名师工程”的著名特级教师，在各地享有盛名. 他们丰富的教学实践经验和深厚的理论修养，为本丛书在同类书中胜人一筹打下扎实基础.

愿这套高质量的丛书能帮助考生顺利闯过小升初及中、高考大关，也愿考生以小升初及中、高考为新起点，步入美好的未来.

华东师范大学出版社教辅分社

编写说明

数学是高考中“含金量”很重的一个学科，必须认真面对数学科高考，勇敢闯过高考数学这个重要的关口.机遇与挑战并存，希望与困难同在.

纵观各地的高考数学卷，满分一般是150分，考试用时大多是2小时，题量(包括解答题中的小题)大概为22题左右，题型有“选择题”、“填空题”、“解答题”三类，题目按难度区分又有“容易题”、“中档题”、“稍难题”三种(整卷“容易题”、“中档题”、“稍难题”的分值之比约为6∶3∶1).许多同学的高考成绩不理想，其原因不外有两个，或者因为自身基础知识薄弱，运算、推理、应用能力欠缺；或者由于对高考产生紧张、畏难情绪导致看错、理解错题意，对各种难度题目平均用力导致考试用时不够.为了帮助高中毕业生更好地闯过高考数学这一大关，我们编写了这套《高考数学百题大过关》丛书，目的是让各位读者读完全套丛书，研究、做完书中的例题、练习题后，能了解高考数学卷的结构，发挥自己的最大潜能，顺利解答高考数学试卷，取得好成绩，考上理想的学校.

本着为考生服务的宗旨，丛书的编写顺应高中毕业生的实际学习状况，选题力求全面性与典型性，注意根据高考数学命题的统计分布来确定各知识点、各题型的题量，尽量涵盖多年来高考常见的各种题型；同时注意高考数学命题的变化趋势，尽量选取近年来高考的创新题型.

学生在学习程度上有差异，有好、中、差之分，学习的过程从容易逐渐加大难度.为适合不同学生不同阶段的学习需要，我们按照高考数学试题的难易程度，把这套丛书分为三册书来编写，它们分别为《第一关　基础题》,《第二关　核心题》,《第三关　压轴题》.各册简介如下：

《第一关　基础题》所选的题目为容易题，若按整卷满分150分计，高考容易题分值在90分左右，基础较差的考生认真用好该册书后，能确保拿到容易题(即基础题)的分数，高考成绩便超过90分.该书按知识点来编排，对高中阶段数学科基础知识进行全面的复习，总题量有500题.

《第二关　核心题》所选的题目为中档题，若按整卷满分150分计，高考中档题分值在40分左右，基础一般的考生认真用好该册书后，能确保拿到中档题(即核心题)的分数，高考成绩便可达到130分以上.该书按知识整合和数学思想方法来编排，体现数学的核心本质与应用价值，总题量有300题.

《第三关　压轴题》所选的题目为稍难题，若按整卷满分150分计，高考稍难题分值在15分左右.基础较好的考生认真用好该册书后，能确保拿到稍难题(即压轴题)的分数，高考成绩便可达140分以上.该书按“题型”和能力要求来编排，对每一类型的压轴题作详尽的介绍，总题量有100题.

当然，上述各类同学在用完相应的一本丛书后，可根据自己的具体情况，再选取其他一本或两本丛书来研读，这对进一步夯实基础知识，提高解题能力，取得更好成绩大有裨益.

本书《第二关　核心题》为丛书的第二册.针对高中数学核心题内容，本书分“集合与常用逻辑用语”、“函数的图象与性质”、“化归与转化思想”等25个专题进行评述.在各专题的评述中，详尽讲解了该专题的核心题所涉及的知识、数学思想方法与能力在高考中的表现形式、所占权重与命题趋势，并讲清该专题的解题策略，同时附典型例题加以说明.对各专题内容，本书

还选取相应的核心题范题(题型有选择题、填空题、解答题等)让读者练习巩固,以检验自己对该专题知识掌握的程度.相信大家认真阅读本书并做好相关范题(书末附有答案与提示)后会受益匪浅,特别是基础一般的同学一定会过好"优良"关.

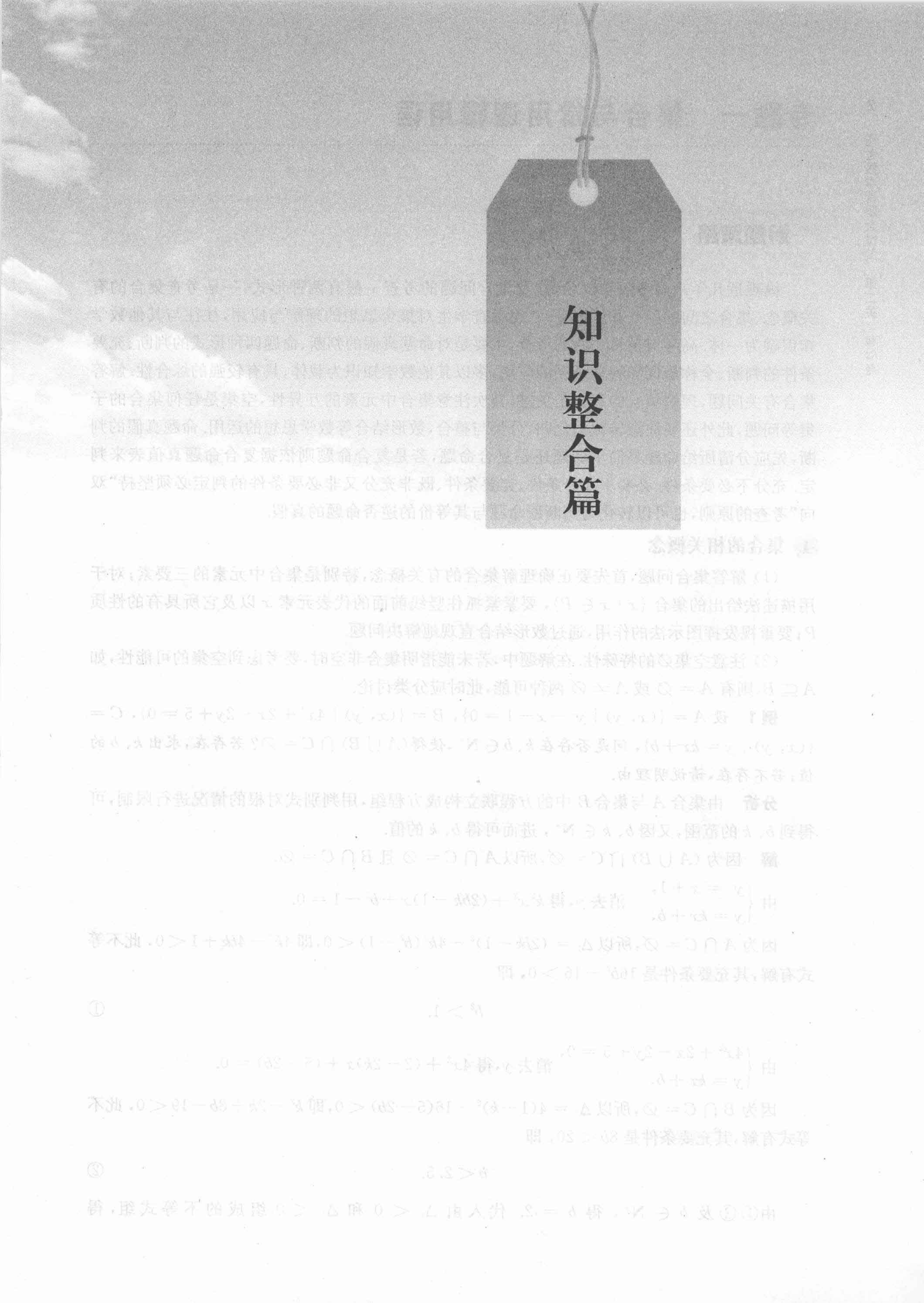
吃透百题,胜券在握.愿读者增强信心,闯过"基础题"、"核心题"、"压轴题"三关,在数学高考中打个漂亮仗!

编者

目录

知识整合篇

思想方法篇


知识整合篇

专题一 集合与常用逻辑用语

解题策略

纵观近几年来高考数学试题，涉及集合问题的考查一般有两种形式：一是考查集合的有关概念、集合之间的关系和运算等；二是考查学生对集合思想的理解与应用，往往与其他数学知识融为一体. 高考对逻辑用语的考查，主要是对命题真假的判断、命题四种形式的判断、充要条件的判断、全称量词和特称量词的应用，多以其他数学知识为载体，具有较强的综合性. 解答集合有关问题，理解集合的意义是关键，其次注意集合中元素的互异性，空集是任何集合的子集等问题，此外还要注意转化与化归，分类与整合，数形结合等数学思想的运用. 命题真假的判断，先应分清所给命题是简单命题还是复合命题，若是复合命题则依据复合命题真值表来判定. 充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既非充分又非必要条件的判定必须坚持"双向"考查的原则，也可以转化为判断原命题与其等价的逆否命题的真假.

1 集合的相关概念

(1) 解答集合问题，首先要正确理解集合的有关概念，特别是集合中元素的三要素；对于用描述法给出的集合 $\{x \mid x \in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P；要重视发挥图示法的作用，通过数形结合直观地解决问题.

(2) 注意空集 $\varnothing$ 的特殊性. 在解题中，若未能指明集合非空时，要考虑到空集的可能性，如 $A \subseteq B$，则有 $A = \varnothing$ 或 $A \neq \varnothing$ 两种可能，此时应分类讨论.

例 1 设 $A = \{(x, y) \mid y^2 - x - 1 = 0\}$，$B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$，$C = \{(x, y) \mid y = kx + b\}$，问是否存在 k、$b \in \mathbf{N}^*$，使得 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$？若存在，求出 k、b 的值；若不存在，请说明理由.

分析 由集合 A 与集合 B 中的方程联立构成方程组，用判别式对根的情况进行限制，可得到 b、k 的范围，又因 b、$k \in \mathbf{N}^*$，进而可得 b、k 的值.

解 因为 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$，所以 $A \cap C = \varnothing$ 且 $B \cap C = \varnothing$.

由 $\begin{cases} y^2 = x + 1, \\ y = kx + b, \end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2 + (2bk - 1)x + b^2 - 1 = 0$.

因为 $A \cap C = \varnothing$，所以 $\Delta_1 = (2bk - 1)^2 - 4k^2(b^2 - 1) < 0$，即 $4k^2 - 4bk + 1 < 0$，此不等式有解，其充要条件是 $16b^2 - 16 > 0$，即

$$b^2 > 1. \qquad ①$$

由 $\begin{cases} 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0, \\ y = kx + b, \end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2 + (2 - 2k)x + (5 - 2b) = 0$.

因为 $B \cap C = \varnothing$，所以 $\Delta_2 = 4(1 - k)^2 - 16(5 - 2b) < 0$，即 $k^2 - 2k + 8b - 19 < 0$，此不等式有解，其充要条件是 $8b < 20$，即

$$b < 2.5. \qquad ②$$

由①②及 $b \in \mathbf{N}^*$，得 $b = 2$. 代入由 $\Delta_1 < 0$ 和 $\Delta_2 < 0$ 组成的不等式组，得

$\begin{cases}4k^2-8k+1<0,\\ k^2-2k-3<0,\end{cases}$ 解得 $k=1$.

故存在正整数 $k=1$, $b=2$,使得$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

点评 本题主要考查考生对集合及其符号的分析转化能力,即能从集合符号上分辨出所考查的知识点,进而解决问题.解决此题的关键是将条件 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 转化为 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$,这样难度就降低了.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)<0\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-2a}{x-(a^2+1)}<0\right\}$.

(1) 当 $a=2$ 时,求 $A\cap B$;

(2) 求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

解 (1) 当 $a=2$ 时, $A=(2,7)$, $B=(4,5)$,所以 $A\cap B=(4,5)$.

(2) 若 $a\neq 1$,则 $B=(2a,a^2+1)$.

① 当 $a<\dfrac{1}{3}$ 时, $A=(3a+1,2)$,要使 $B\subseteq A$,必须 $\begin{cases}2a\geqslant 3a+1,\\ a^2+1\leqslant 2,\end{cases}$ 此时 $a=-1$;

② 当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时, $A=\varnothing$,使 $B\subseteq A$ 的 a 不存在;

③ 当 $a>\dfrac{1}{3}$ 且 $a\neq 1$ 时, $A=(2,3a+1)$,要使 $B\subseteq A$,必须 $\begin{cases}2a\geqslant 2,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}$ 此时 $1<a\leqslant 3$.

若 $a=1$,则 $B=\varnothing$, $A=(2,4)$, $B\subseteq A$ 成立.

综上可知,使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围为 $[1,3]\cup\{-1\}$.

点评 本题主要考查集合的基本运算及其利用数轴进行分析转化的能力,考查分类整合的思想方法.

例 3 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度,有如下结果:赞成 A 的人数是全体的五分之三,其余的不赞成,赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人,其余的不赞成;另外,对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人.问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

分析 画出韦恩图,形象地表示出各数量关系间的联系.

解 赞成 A 的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$,赞成 B 的人数为 $30+3=33$,如图 1-1,记 50 名学生组成的集合为 U,赞成事件 A 的学生全体为集合 A;赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

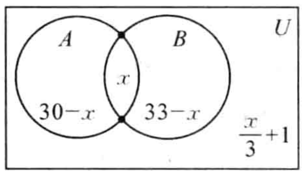


图 1-1

设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x,则对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\dfrac{x}{3}+1$,赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$,赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

依题意 $(30-x)+(33-x)+x+\left(\dfrac{x}{3}+1\right)=50$,解得 $x=21$.

所以对 A、B 都赞成的同学有 21 人,都不赞成的有 8 人.

点评 在集合问题中,有一些常用的方法如数轴法取交并集,韦恩图法等,需要考生切实掌握.解答本题的关键是考生能由题目中的条件,想到用韦恩图直观地表示出来.

2 理解充要条件的概念

(1) 要理解"充分条件""必要条件"的概念，当"若 p 则 q"形式的命题为真时，就记作 $p\Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件，同时称 q 是 p 的必要条件，因此判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假.

(2) 要理解"充要条件"的概念，对于符号"$\Leftrightarrow$"要熟悉它的各种同义词语："等价于"，"当且仅当"，"必须并且只需"，"…，反之也真"等.

(3) 数学概念的定义都可以看成是充要条件，既是概念的判断依据，又是概念所具有的性质.

(4) 从集合观点看，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A、B 互为充要条件.

(5) 证明命题条件的充要性时，既要证明原命题成立(即条件的充分性)，又要证明它的逆命题成立(即条件的必要性).

例 4 已知 $p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若$\neg p$是$\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

分析 利用等价命题先进行命题的等价转化，搞清命题中条件与结论的关系，再去解不等式，找解集间的包含关系，进而使问题解决.

解 由题意知，命题：$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要而不充分条件的等价命题，即逆否命题为：p 是 q 的充分不必要条件.

$$p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2\Leftrightarrow -2\leqslant\frac{x-1}{3}-1\leqslant 2\Leftrightarrow -1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 3\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 10.$$

$$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\Leftrightarrow[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant 0\Leftrightarrow 1-m\leqslant x\leqslant 1+m\ (m>0).$$

因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以不等式 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 的解集是 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$ 解集的真子集.

所以 $\begin{cases}1-m<-2,\\1+m\geqslant 10,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m\leqslant -2,\\1+m>10,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 9$.

所以实数 m 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

点评 本题以含绝对值的不等式及一元二次不等式的解法为考查对象，同时考查了充分必要条件及四种命题中等价命题的应用，强调了知识点的灵活性. 本题解题的关键是利用等价命题对题目的文字表述方式进行转化，使考生对充要条件的理解变得简单明了.

例 5 (1) 已知数列 $\{c_n\}$，其中 $c_n=2^n+3^n$，且数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列，求常数 p；

(2) 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列.

解 (1) 因为 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 是等比数列，于是当 $n\geqslant 2$ 时，有 $(c_{n+1}-pc_n)^2=(c_{n+2}-pc_{n+1})(c_n-pc_{n-1})$，将 $c_n=2^n+3^n$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}&[2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)]^2\\=&[2^{n+2}+3^{n+2}-p(2^{n+1}+3^{n+1})]\cdot[2^n+3^n-p(2^{n-1}+3^{n-1})],\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&[(2-p)2^n+(3-p)3^n]^2\\=&[(2-p)2^{n+1}+(3-p)3^{n+1}][(2-p)2^{n-1}+(3-p)3^{n-1}],\end{aligned}$$

整理得 $\frac{1}{6}(2-p)(3-p)\cdot 2^n\cdot 3^n=0$，解得 $p=2$ 或 $p=3$.

(2) 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的公比分别为 p、q，$p\neq q$，$c_n=a_n+b_n$.

为证$\{c_n\}$不是等比数列只需证 $c_2^2\neq c_1\cdot c_3$. 事实上，

$$c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq,$$
$$c_1\cdot c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=a_1^2p^2+b_1^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2).$$

由于 $p\neq q$，$p^2+q^2>2pq$，又 a_1、b_1 不为零，因此 $c_2^2\neq c_1\cdot c_3$，故$\{c_n\}$不是等比数列.

点评 本题主要考查等比数列的概念和基本性质，推理和运算能力.

过关演练

001. 若集合 $S=\{y\mid y=3^x,\ x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$是(　　).

(A) S　　(B) T　　(C) $\varnothing$　　(D) 有限集

002. 方程 $mx^2+(2m+1)x+m=0$ 有两个不等的实根，则实数 m 的取值范围是(　　).

(A) $\left(-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$　　(B) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{4}\right)$

(C) $\left[\frac{1}{4},\ +\infty\right)$　　(D) $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)\cup(0,\ +\infty)$

003. 若 $a\in\mathbf{R}$，且对于一切实数 x 都有 $ax^2+ax+a+3>0$，那么 a 的取值范围是(　　).

(A) $(0,\ +\infty)$　　(B) $[0,\ +\infty)$

(C) $(-\infty,\ -4)$　　(D) $(-\infty,\ -4)\cup(0,\ +\infty)$

004. 下列四个命题：①“若 $x^2+y^2=0$，则实数 x，y 均为零”的逆命题；②“相似三角形的面积相等”的否命题；③“若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$”的逆命题；④“末位数不为零的整数可被 3 整除”的逆否命题. 其中真命题是(　　).

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ①③　　(D) ③④

005. 设平面点集 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,(y-x)\left(y-\frac{1}{x}\right)\geqslant 0\right\}$，$B=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\right\}$，则$A\cap B$所表示的平面图形的面积为(　　)

(A) $\frac{3}{4}\pi$　　(B) $\frac{3}{5}\pi$　　(C) $\frac{4}{7}\pi$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

006. 设集合 $A=\{x\mid x=a^2+1,\ a\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y\mid y=b^2+4b+5,\ b\in\mathbf{N}^*\}$，则 A 与 B 的关系是________.

007. 关于 x 的方程 $x^2-(2a-1)x+a^2-2=0$ 至少有一个非负实根的充要条件是________.

008. 已知命题 p：函数 $y=\log_{0.5}(x^2+2x+a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，命题 q：函数 $y=-(5-2a)^x$ 是减函数. 若 p 或 q 为真命题，p 且 q 为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

009. 已知集合 $A=\{(x,\ y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}$，试问：

(1) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

010. 设 $a\in\mathbf{R}$,二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$.若 $f(x)>0$ 的解集为 A, $B=\{x\mid 1<x<3\}$, $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

011. 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$,求 a 的值,使 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$,且 $A\cap C=\varnothing$同时成立.

012. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α、β,证明:$|\alpha|<2$ 且 $|\beta|<2$ 是 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$ 的充要条件.

专题二　函数的图象与性质

解题策略

函数的图象与性质是高考考查的重点内容之一，它是研究和记忆函数性质的直观工具，利用它的直观性解题，可以起到化繁为简、化难为易的作用. 因此，考生要掌握绘制函数图象的一般方法，掌握函数图象变化的一般规律，能利用函数的图象研究函数的性质. 函数的图象是函数关系的一种表示，它是从“形”的方面显示了函数的性质，刻画了函数的变化规律，为研究数量关系问题提供了“形”的直观性，它是探求解题途径，获得问题结果的重要工具. 高考中总是以几种基本初等函数的图象为基础来考查函数图象的. 每年的高考都有很多小题都可用图象(数形结合)来解决. 可以说函数的图象是解决高中数学问题的法宝之一.

函数是数学高考考查的核心，而函数性质是考查的重点.《考试大纲》要求：理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象. 函数性质还包括函数的正负性、周期性等，函数性质着眼于函数的变化规律，内容丰富、应用广泛，是在知识网络交汇点上命题的重要取材渠道，在历年高考中无一次遗漏，所占比例居高不下，在今后的高考命题中，可以肯定地说，会常盛不衰.

1 熟练掌握常见函数的图象与性质

(1) $y=|x+a|$；(2) $y=|ax+b|\pm|cx+d|\ (ac\neq 0)$；(3) $y=|ax^2+bx+c|\ (a\neq 0)$；(4) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0)$(由反比例函数图象平移得到的)；(5) $y=x+\dfrac{a}{x}\ (a\neq 0)$；(6) $y=a^{|x|}\ (a>0,\ a\neq 1)$；(7) $y=|\log_a x|\ (a>0,\ a\neq 1)$；(8) $y=\log_a|x|\ (a>0,\ a\neq 1)$；(9) $y=|\sin x|$；(10) $y=\sin|x|$；(11) $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 等.

例 1　已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图2-1，则(　　).

(A) $b\in(-\infty,\ 0)$　　(B) $b\in(0,\ 1)$

(C) $b\in(1,\ 2)$　　(D) $b\in(2,\ +\infty)$

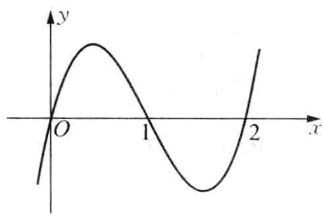


图 2-1

解法一　观察 $f(x)$ 的图象，可知函数 $f(x)$ 的图象过原点，即 $f(0)=0$，得 $d=0$，又 $f(x)$ 的图象过 $(1,\ 0)$，所以

$$f(1)=a+b+c=0. \quad ①$$

又有 $f(-1)<0$，即

$$-a+b-c<0. \quad ②$$

①+②，得 $b<0$，故 b 的范围是 $(-\infty,\ 0)$，故选 A.

解法二　如图，$f(x)=0$ 有三个根 0，1，2，所以

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=ax(x-1)(x-2)=ax^3-3ax^2+2ax,$$

因此 $b=-3a$. 因为当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，从而有 $a>0$，所以 $b<0$.

点评　把握三次函数的零点式.

2 掌握常见的函数图象变换

(1) 平移变换：事实上，令点(x_0, y_0)是 $y=f(x)$ 的图象上任一点，点(x_0, y_0)向右平移 a 个单位得点(x, y)，则 $\begin{cases}x=x_0+a,\\ y=y_0,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}x_0=x-a,\\ y_0=y,\end{cases}$ 代入 $y_0=f(x_0)$，得 $y=f(x-a)$. 于是，把函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 a 个单位，得到的图象的解析式是 $y=f(x-a)$（即以 $x-a$ 代换 x）.

把函数 $y=f(x)$ 的图象向右、向上分别平移 a、b 个单位（$a>0$，$b>0$），得到的图象的解析式是 $y-b=f(x-a)$（即分别以 $x-a$，$y-b$ 代换 x，y）. 当 $a<0$ 时，表示向左平移，当 $b<0$ 时，表示向下平移.

例 2 函数 $y=f(2x-1)$ 是偶函数，则函数 $y=f(2x)$ 的对称轴是（ ）.

(A) $x=0$ (B) $x=-1$ (C) $x=\frac{1}{2}$ (D) $x=-\frac{1}{2}$

解 因为函数 $y=f(2x-1)$ 是偶函数，所以其对称轴为直线 $x=0$. 以 $x-a$ 代换 x，有 $y=f[2(x-a)-1]$. 令 $2(x-a)-1=2x$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，故函数 $y=f(2x-1)$ 的图象向左平移$\frac{1}{2}$个单位，得到函数 $y=f(2x)$ 的图象，其对称轴 $x=0$ 也相应地向左平移了$\frac{1}{2}$个单位，故选 D.

(2) 伸缩变换：事实上，令点(x_0, y_0)是 $y=f(x)$ 的图象上任一点，点(x_0, y_0)的横坐标伸长到原来的 k 倍得点(x, y)，则 $\begin{cases}x=kx_0,\\ y=y_0,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}x_0=\frac{1}{k}x,\\ y_0=y,\end{cases}$ 代入 $y_0=f(x_0)$，得 $y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$.

于是，设把函数 $y=f(x)$ 的图象的横坐标伸长到原来的 $k(k>0)$ 倍（纵坐标不变），得到的图象的解析式是 $y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$（即以$\frac{1}{k}x$ 代换 x）.

把函数 $y=f(x)$ 的图象的横坐标与纵坐标分别伸长到原来的 k，$l(k, l>0)$ 倍，得到的图象的解析式是 $\frac{1}{l}y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$（即分别以$\frac{1}{k}x$、$\frac{1}{l}y$ 代换 x、y）.

我们定义：当 k，$l>1$ 时，表示伸长；当 $0<k$，$l<1$ 时，表示缩短.

例 3 函数 $y=\sin x$ 的图象，经过怎样的平移和伸缩变换得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$ 的图象？

解法一 （先平移后伸缩）在 $y=\sin x$ 中，以 $x-a$、$y-b$ 分别代换 x、y，有 $y-b=\sin(x-a)$，再以$\frac{1}{k}x$ 代换 x，有 $y-b=\sin\left(\frac{1}{k}x-a\right)$，即 $y=\sin\left(\frac{1}{k}x-a\right)+b$. 对比有 $\begin{cases}\frac{1}{k}x-a=2x+\frac{\pi}{6},\\ b=4,\end{cases}$ 得 $a=-\frac{\pi}{6}$，$k=\frac{1}{2}$，$b=4$.

即把函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再向上平移 4 个单位，后将横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），可得函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$ 的图象.

解法二 （先伸缩后平移）在 $y=\sin x$ 中，以$\frac{1}{k}x$ 代换 x，有 $y=\sin\frac{1}{k}x$，再以 $x-a$、$y-$

b 分别代换 x、y，得 $y-b=\sin\dfrac{1}{k}(x-a)$，即 $y=\sin\dfrac{1}{k}(x-a)+b$，于是 $\begin{cases}\dfrac{1}{k}(x-a)=2x+\dfrac{\pi}{6},\\ b=4,\end{cases}$ 得 $\dfrac{1}{k}=2$，$-\dfrac{a}{k}=\dfrac{\pi}{6}$，$b=4$，所以 $k=\dfrac{1}{2}$，$a=-\dfrac{\pi}{12}$，$b=4$.

即把函数 $y=\sin x$ 的图象横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位，后向上平移 4 个单位，可得函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$ 的图象.

(3) 对称变换：

① 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；

③ 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=-f(-x)$ 的图象关于原点中心对称；

④ 函数 $y=|f(x)|$ 的图象可将 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方的部分以 x 轴为对称轴翻折到 x 轴上方，其余部分不变.

3 函数的周期性

若函数 $f(x)$ 满足：$f(x+a)=f(x-a)$ $(a\neq 0)$，则 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期. 注意：不要和对称性相混淆. 若函数 $f(x)$ 满足：$f(a+x)=-f(x)$ $(a\neq 0)$，则 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期. 类似的条件还有 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，$f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$ 等.

例 4 已知函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+1)=f(x-1)$，且当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$，则 $y=f(x)$ 与 $y=\log_5 x$ 的图象的交点个数为（　　）.

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

解 由 $f(x+1)=f(x-1)$，知函数 $y=f(x)$ 的一个周期为 2，作出其图象（图 2-2），当 $x=5$ 时，$f(x)=1$，$\log_5 x=1$；当 $x>5$ 时，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，$\log_5 x>1$，$y=f(x)$ 与 $y=\log_5 x$ 的图象不再有交点，故选 C.

点评 本题的关键是函数 $y=\log_5 x$ 的图象过点(1, 0)和点(5, 1).

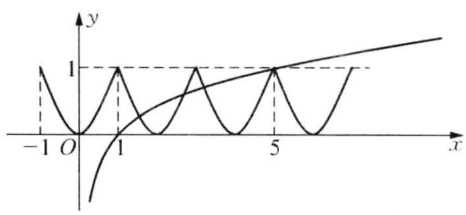


图 2-2

4 函数的单调性

判断函数的单调性可用有关单调性的性质（如复合函数单调性的"同增异减"法则），证明函数单调性一般用定义或导数，用定义证明函数单调性的关键步骤往往是因式分解. 了解单调性定义的变形：对区间 $[a, b]$ 内的任意不同实数 x、y，都有 $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调递增（小于 0 则单调递减）.

例 5 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

解 (1) 当 $a=0$ 时，函数 $f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=f(x)$，此时 $f(x)$ 为偶函数.

当 $a\neq 0$ 时，$f(a)=a^2+1$，$f(-a)=a^2+2|a|+1$，$f(a)\neq f(-a)$，$f(a)\neq -f(-a)$. 此时 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

(2) ① 当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+a+\dfrac{3}{4}$.

若 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递减，从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

若 $a>\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}+a$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

② 当 $x\geqslant a$ 时，函数 $f(x)=x^2+x-a+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-a+\dfrac{3}{4}$.

若 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}-a$，且 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

若 $a>-\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增，从而函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

综上，当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}-a$；

当 $-\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 a^2+1；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}+a$.

点评 结合图象，灵活应用二次函数的单调性解决问题.

5 函数的对称性

偶函数图象关于 y 轴对称，推广：函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都有 $f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；再推广：函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都有 $f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称. 奇函数图象关于原点对称，推广：函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都有 $f(a-x)=-f(a+x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 对称. 注意：两个函数图象之间的对称问题不同于函数自身的对称问题. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 的对称曲线是函数 $y=f(2a-x)$ 的图象，函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 的对称曲线是函数 $y=-f(2a-x)$ 的图象.

例 6 设函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+b}(a, b\in\mathbf{Z})$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y=3$.

(1) 求 $y=f(x)$ 的解析式；

(2) 证明：函数 $y=f(x)$ 的图象是一个中心对称图形；

(3) 证明：曲线 $y=f(x)$ 上任一点处的切线与直线 $x=1$ 和直线 $y=x$ 所围三角形的面积为定值，并求出此定值.

(1) **解** $f'(x)=a-\dfrac{1}{(x+b)^2}$.

于是 $\begin{cases}2a+\dfrac{1}{2+b}=3,\\ a-\dfrac{1}{(2+b)^2}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{9}{4},\\ b=-\dfrac{8}{3}.\end{cases}$ 因 $a, b\in\mathbf{Z}$. 故 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

(2) **证法一** 函数 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，其图象是以原点为中心的中心对称图形.