高等学校“十二五”规划教材·国防科技类

导弹作战运筹实例

DAODAN ZUOZHAN YUNCHOU SHILI

舒健生 李亚雄 郝 辉 编著

西北工业大学出版社

导弹作战运筹实例

舒健生　李亚雄　郝　辉　编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是在长期教学实践的基础上，吸收了广大读者的意见，精心选择了动态规划解决导弹火力分配、层次分析法解决发射阵地选择、指派理论解决导弹作战任务分配问题、决策论解决导弹补充打击决策问题、对策论解决导弹攻防对抗问题、非线性规划解决导弹作战目标选择问题等11个导弹作战运筹应用实例。

本书着重介绍基本的运筹学原理和方法在导弹作战运筹中的应用，具有一定的深度和广度，读者可从其中了解和掌握运筹学在导弹作战中的运用。

本书主要供作战运筹相关专业的本科生、研究生使用，对从事作战运用研究工作的人员也有一定的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

导弹作战运筹实例/舒健生，李亚雄，郝辉编著. 一西安：西北工业大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5612-3812-7

Ⅰ.①导… Ⅱ.①舒…②李…③郝… Ⅲ.①导弹—应用—作战—运筹学 Ⅳ.①E927②E8345

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 208196 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：8.25
字　　数：195 千字
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：18.00 元

前　言

运筹学课程在第二炮兵工程大学相关专业中已经有近三十年的开设历史，教学中使用的运筹学通用教材以经济管理为主要背景，着重介绍运筹学的基本原理和方法，与我校学员毕业后从事的工作岗位实际结合不够紧密。编写本书旨在提高课程教学的针对性，充分考虑学员毕业后的工作性质和特点，在教学中增加与导弹作战运筹实践联系紧密的教学实例，以作为同类教材的补充。编写组在长期教学积累的基础上，精选了导弹作战运筹特色鲜明的11个实例，基本涵盖了运筹学的基本理论模块。每个实例先阐述所运用的基本运筹学原理，然后按照作战运筹实际问题的运筹学模型建立、解决方法和解的讨论三部分展开。基础原理部分主要取材于多部相关教材和文献资料，应用实例部分主要来源于编写组长期的研究成果。

本书主要供作战运筹相关专业的本科生、研究生使用，对从事作战运用研究工作的人员也有一定的参考价值。

全书共11章，其中第一至三章和第五章由舒健生编写，第四章和第七至九章由李亚雄编写，第六、十和十一章由郝辉编写，舒健生副教授负责全书的统稿。在编写过程中得到了刘新学教授、谭守林副教授的指导和帮助，提出了很多宝贵的修改意见。研究生武健、肖海、孟少飞等同志承担了全书的校对工作。对他们的辛勤劳动和宝贵意见致以衷心的感谢。

学校训练部机关和各级领导同志对本书的出版给予了大力支持，还有许多同志做了默默无闻的工作，对此笔者一并表示诚挚的感谢。

由于水平有限，书中存在不足之处，衷心欢迎读者批评指正。

编著者

2013年5月于第二炮兵工程大学

目　录

第一章　线性规划对偶原理及应用

第一节　线性规划对偶基本原理

每一个线性规划问题都有和它相伴随的另一个问题，一个称为原问题，与之相对应的另一个则称为对偶问题。原问题与对偶问题有着非常密切的关系，以至于可以根据一个问题的最优解，得出另一个问题最优解的全部信息。然而，对偶性质远不仅是一种奇妙的对应关系，它在理论和实践上都有着广泛的应用，若能对每个对偶规划作出合乎实际的、有意义的解释，便能提供多方面的决策信息。

一、原问题与对偶问题的关系

每一个线性规划模型都有一个和它相对应的另一个线性规划模型。如果这个模型称为原始问题，则与它对应的另一个模型就称为对偶问题，这两个问题的关系非常密切。对于对称形式的对偶，原问题和对偶问题的展开形式为

原问题(F)

$$
\left.\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&(F):\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
&x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}\right\} \tag{1-1}
$$

对偶问题(G)

$$
\left.\begin{aligned}
&\min z' = y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_mb_m \\
&(G):(y_1, y_2, \cdots, y_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \geqslant (c_1, c_2, \cdots, c_n) \\
&y_1, y_2, \cdots, y_m \geqslant 0
\end{aligned}\right\} \tag{1-2}
$$

它们之间有如下关系：

(1) 原问题的目标函数是求最大值，对偶问题的目标函数是求最小值；

(2) 原问题的约束条件个数对应对偶问题的变量个数；

(3) 原问题约束条件右边的常数对应对偶问题目标函数系数；

(4) 原问题约束条件是“≤”，而对偶问题的约束条件是“≥”；

(5) 两个问题的变量都是非负的。

二、对偶问题的基本性质

(1) 对称性。对偶问题的对偶是原问题。

(2) 弱对偶性。若 $\bar{X}$ 是原问题的可行解，$\bar{Y}$ 是对偶问题的可行解，则存在 $c\bar{X} \leqslant \bar{Y}b$。

(3) 无界性。若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解。

(4) 可行解是最优解时的性质。设 $\hat{X}$ 是原问题的可行解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的可行解，当 $c\hat{X} = \hat{Y}b$ 时，$\hat{X}$，$\hat{Y}$ 是最优解。

(5) 对偶定理。若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。

(6) 互补松弛性。若 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\hat{Y}X_s = 0$ 和 $Y_s\hat{X} = 0$，当且仅当 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 为最优解。

第二节　作战资源规划两类问题的对偶性研究

一、作战资源分配问题的数学模型

现有 m 种类型的导弹，第 $i(i=1,\cdots,m)$ 种类型导弹的数量为 b_i，需要从 n 类目标中选出若干目标进行攻击，攻击第 $j(j=1,\cdots,n)$ 类单个目标获得的作战效能值为 c_j。攻击各类目标需要的作战资源数量如表 1-1 所示。问：在满足导弹数量限制的条件下，如何合理选择各类型目标的打击数量，使获得的总体作战效能值最大？

表 1-1　攻击各类目标需要的作战资源数量

目标 / 弹型	目标的类型				导弹总数 / 枚
	第一类	第二类	…	第 n 类	
第一种导弹	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
第二种导弹	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
第 m 种导弹	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

假设第 j 类目标选择 x_j 个，则问题的数学模型如下所示：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-3}$$

$$\text{s.t.}\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n \end{array}\right\} \tag{1-4}$$

二、作战资源需求论证问题的数学模型

在战备时期，需要依据导弹武器的现有数量和可能的打击任务，对单位数量的各类型导弹作战效能贡献值进行评估，作战效能贡献值大的导弹类型应是下一步优先发展的导弹武器类型。例如，现有 m 种类型的导弹，第 $i(i=1,\cdots,m)$ 种类型导弹的数量为 b_i，已知攻击单个目标需要的各型导弹的数量如表 1－1 所示。要求攻击第 $j(j=1,\cdots,n)$ 类目标获得的作战效能值不小于 c_j。

问：在满足目标打击要求的前提下，如何合理地确定各类型导弹的作战效能值，为下一步导弹发展提供依据？

假设单位数量的第 i 类导弹武器作战效能值为 y_i，则问题的数学模型如下所示：

$$\min z' = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \tag{1-5}$$

$$\text{s. t.} \left\{\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geqslant c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geqslant c_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geqslant c_m \\ y_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, m \end{array}\right. \tag{1-6}$$

三、作战资源分配和需求问题的对偶性分析

上述作战资源分配问题和需求论证问题，是对同一事物从不同角度的观察，而且其表述是对立的。运用对偶的基本原理可知，其互为一对对偶问题，对应关系如表 1－2 所示。

表 1－2　作战资源规划两类问题的对偶性分析

问题 / 项目	原问题	对偶问题
目标函数	有限的导弹武器资源获得最大的作战效能	运用最少的导弹武器成本达成既定的作战目的
约束条件	各类型导弹数量限制	对各类型目标的作战效能不小于某一水平
求解变量	打击各类目标的数量，即获得武器对目标的最优分配方案	单枚导弹的作战效能，即获得各类型武器对作战的贡献评估量化值

在原问题中武器的最优分配结果，必定是进行武器发展的依据，简单地说，没有剩余的武器类型应处于优先发展的地位，剩余较多武器的类型可暂缓发展。在对偶问题中，武器作战效能值的获得是以武器对目标的最优分配为前提的。

运用对偶原理，对偶问题变量 y_i 的最优解实际上是第 i 种类型导弹的“影子价格”。其意义：在其他条件不变的情况下，若增加一个单位数量的第 i 种类型导弹，对作战效能增加的贡献值为 y_i。

四、实例分析

使用 $M_1 \sim M_4$ 这 4 个类型的导弹武器参加作战，拟打击的目标类型有 A,B,C,D,E,F 等 6 种类型。各类型武器的总数、打击各类目标需要的各型武器数量，以及获得的作战效能如表

1－3 所示。问：各类型目标的打击数量应选择多少，才能使得总体的作战效能值最大？

表 1－3　攻击单个目标需要的各型号导弹数量

目标 弹型	目标类型及打击此类目标获得的作战效能						导弹数量／枚
	A/9	B/8	C/5	D/8	E/4	F/5	
M_1	3	3	2	0	0	0	50
M_2	3	0	0	2	2	0	40
M_3	2	4	0	3	0	2	55
M_4	0	0	3	0	3	1	40

假设第 i 类目标选择 $x_i(i=1,\cdots,6)$ 个，问题的数学模型如下所示：

$$\max z=9x_1+8x_2+5x_3+8x_4+4x_5+5x_6$$

$$\text{s. t.}\quad \left.\begin{aligned}3x_1+3x_2+2x_3+0x_4+0x_5+0x_6&\leqslant 50\\3x_1+0x_2+0x_3+2x_4+2x_5+0x_6&\leqslant 40\\2x_1+4x_2+0x_3+3x_4+0x_5+2x_6&\leqslant 55\\0x_1+0x_2+3x_3+0x_4+3x_5+1x_6&\leqslant 40\\x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,6\end{aligned}\right\}$$

采用线性规划单纯形法[1] 对上述模型进行计算，得到最优解为 $x_1=10,x_2=0,x_3=10,x_4=5,x_5=0,x_6=10$，即选择 A 类目标 10 个、C 类目标 10 个、D 类目标 5 个、F 类目标 10 个，B 类目标和 E 类目标不进行打击。

假设单位数量的第 i 类导弹武器作战效能值为 $y_i(i=1,\cdots,4)$，运用线性规划对偶理论，其对偶问题的数学模型如下所示：

$$\min z'=50y_1+40y_2+55y_3+40y_4$$

$$\text{s.t.:}\quad \left.\begin{aligned}3y_1+3y_2+2y_3+0y_4&\geqslant 9\\3y_1+0y_2+4y_3+0y_4&\geqslant 8\\2y_1+0y_2+0y_3+3y_4&\geqslant 5\\0y_1+2y_2+3y_3+0y_4&\geqslant 8\\0y_1+2y_2+0y_3+3y_4&\geqslant 4\\0y_1+0y_2+2y_3+1y_4&\geqslant 5\\y_i\geqslant 0,i=1,\cdots,4\end{aligned}\right\}$$

采用线性规划单纯形法对上述模型进行计算，得到最优解为

$$y_1=0.54,\quad y_2=1.23,\quad y_3=1.85,\quad y_4=1.31$$

运用对偶理论，对上述问题及其计算结果进行分析，可获得如下结论：

(1)“以有限的作战资源获得最大的作战效能”和“在满足一定的作战效能要求下以最小的代价使用武器”两个问题是互为对偶的一对问题，是同一问题的两个方面。

(2) 原问题的解完全可以通过求解其对偶问题得到。原问题的变量个数等于对偶问题的约束条件个数，原问题的约束条件个数等于对偶问题的变量个数。一般来说，线性规划问题的求解，当变量个数少于约束条件个数时求解较为方便，因此可以根据需要选择合适的模型进行

求解。

(3) 根据互补松弛性定理，由对偶问题的变量 $y_1, y_2, y_3, y_4 > 0$，可知原问题的约束条件取严格等式。这表明在满足作战效能最大化的前提下，武器分配完毕，没有剩余。

(4) 根据对偶问题的计算结果，M_1 型导弹的作战效能值最低，M_3 型导弹的作战效能值最高，增加任何一种类型的武器数量均能提高作战效能，增加 1 枚 M_1 型导弹，在作战资源最优配置条件下能够提高作战效能值 0.54，而增加 1 枚 M_3 型导弹，能够提高 1.85。因此，在制定武器发展规划时应该优先发展 M_3 型导弹。

第二章　运输问题基本原理及应用

第一节　运输问题基本原理

一、运输问题的数学模型

在经济建设中，经常碰到大宗物资调运问题。例如煤、钢铁、木材、粮食等物资，在全国有若干生产基地，根据已有的交通网，应如何制定调运方案，将这些物资运输到各消费地点，而总运费要最小，这个问题可用以下数学语言描述。

已知有 m 个生产地点 A_i，$i=1,2,\cdots,m$ 可供应某种物资，其供应量（产量）分别为 a_i，$i=1,2,\cdots,m$，有 n 个销地 B_j，$j=1,2,\cdots,n$，其需要量分别为 b_j，$j=1,2,\cdots,n$。从 A_i 到 B_j 运输单位物资的运价（单价）为 c_{ij}，这些数据可汇总于产销平衡表和单位运价表中，见表 2 - 1 和表2 - 2。

表　2 - 1

产地 \ 销地	$1,2,\cdots,n$	产量
1		a_1
2		a_2
⋮		⋮
m		a_m
销量	$b_1,b_2,\cdots,b_n$	

表　2 - 2

产地 \ 销地	$1,2,\cdots,n$
1	$c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n}$
2	$c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n}$
⋮	⋮
m	$c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mn}$

有时可把这两个表合一。

若用 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量，那么在产销平衡的条件下，要求得到总运费最小的调运方案，可求解以下数学模型：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{2 - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2 - 2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{2 - 3}$$

$$x_{ij}\geqslant 0$$

这就是运输问题的数学模型，它包含 $m\times n$ 个变量，$m+n$ 个约束方程，其系数矩阵的结构比较松散，且特殊。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{ 行} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ 行}
\end{array}
\end{array}
$$

该系数矩阵中对应于变量 x_{ij} 的系数向量 P_{ij}，其分量中除第 i 个和第 $m+j$ 个为 1 以外，其余的都为零。即

$$P_{ij}=[0\cdots1\cdots1\cdots0]^{\mathrm{T}}=e_i+e_{m+j} \tag{2-4}$$

对产销平衡的运输问题，由于有以下关系式存在：

$$\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}a_i \tag{2-5}$$

所以，模型最多只有 $m+n-1$ 个独立约束方程，即系数矩阵的秩 $\leqslant m+n-1$。由于有以上特征，因此求解运输问题时，可用比较简便的计算方法，习惯上称为表上作业法。

二、表上作业法

表上作业法是单纯形法在求解运输问题时的一种简化方法，其实质是单纯形法，但具体计算和术语有所不同，可归纳如下：

(1) 找出初始基可行解，即在($m\times n$)产销平衡表上给出 $m+n-1$ 个数字格；

(2) 求各非基变量的检验数，即在表上计算空格的检验数，判别是否达到最优解，如已达到最优解，则停止计算，否则转到下一步；

(3) 确定换入变量和换出变量，找出新的基可行解，在表上用闭回路法调整；

(4) 重复(2)(3) 直到得到最优解为止。

以上运算都可以在表上完成，下面通过例子说明表上作业法的计算步骤。

例 2-1　某公司经销甲产品。它下设 3 个加工厂。每日的产量分别是，A_1 为 7 件，A_2 为 4 件，A_3 为 9 件。该公司把这些产品分别运往 4 个销售点。各销售点每日销量：B_1 为 3 件，B_2 为 6 件，B_3 为 5 件，B_4 为 6 件。已知从各工厂到各销售点的单位产品的运价如表 2-3 所示。问该公司应如何调运产品，在满足各销点的需要量的前提下，使总运费最少？

解　先画出这个问题的产销平衡表和单位运价表，见表 2-3 及表 2-4。

表　2-3

销地 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表　2-4

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

这与一般线性规划问题不同。产销平衡的运输问题总是存在可行解。因有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d$$

必存在

$$x_{ij} \geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,n$$

这就是可行解。又因

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$$

故运输问题必存在最优解。

确定初始基可行解的方法很多，一般希望的方法是既简便，又尽可能接近最优解。下面介绍两种方法：最小元素法和伏格尔法。

1. 最小元素法

这种方法的基本思想是就近供应，即从单位运价表中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。以例 2-1 为例进行讨论。

第一步：从表 2-3 中找出最小运价为 1，这表示先将 A_2 的产品供应给 B_1。因 $a_2 > b_1$，A_2 除满足 B_1 的全部需要外，还可多余 1 件产品。在表 2-4 中的(A_2, B_1)的交叉格处填上 3，得表 2-5，并将表 2-3 的 B_1 列运价划去，得表 2-6。

第二步：在表 2-6 未划去的元素中再找出最小运价 2，确定 A_2 多余的 1 件供应 B_3，并给出表 2-7 和表 2-8。

表　2-5

加工厂＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量 / 件
A_1					7
A_2	3				4
A_3					9
销量 / 件	3	6	5	6	

表　2－6

加工厂＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

表　2－7

加工厂＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量／件
A_1					7
A_2	3		1		4
A_3					9
销量／件	3	6	5	6	

表　2－8

加工厂＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

第三步：在表 2－8 未划去的元素中再找出最小运价 3；这样一步步地进行下去，直到单位运价表上的所有元素划去为止，最后在产销平衡表上得到一个调运方案，见表 2－9。这个方案的总运费为 86 元。

表　2－9

加工厂＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量／件
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量／件	3	6	5	6	

用最小元素法给出的初始解是运输问题的基可行解，其理由如下：

(1) 用最小元素法给出的初始解，是从单位运价表中逐次地挑选最小元素，并比较产量和

销量，当产大于销时，划去该元素所在列；当产小于销时，划去该元素所在行。然后在未划去的元素中再找最小元素，再确定供应关系。这样在产销平衡表上每填入一个数字，在运价表上就划去一行或一列。表中共有 m 行 n 列，总共可划 $m+n$ 条直线。但当表中只剩一个元素时，这时当在产销平衡表上填这个数字时，而在运价表上同时划去一行和一列。此时把单价表上所有元素都划去了，相应地在产销平衡表上填了 $m+n-1$ 个数字，即给出了 $m+n-1$ 个基变量的值。

(2) 这 $m+n-1$ 个基变量对应的系数列向量是线性独立的。

2. 伏格尔法

最小元素法的缺点是，为了节省一处的费用，有时造成在其他处要多花几倍的运费。伏格尔法考虑到，一产地的产品假如不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费，这就有一个差额。差额越大，说明不能按最小运费调运时，运费增加越多。因此，在差额最大处，就应当采用最小运费调运。基于此，伏格尔法的步骤如下：

第一步：在表 2-3 中分别计算出各行和各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，见表 2-10。

表 2-10

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额 / 元
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4	10	5	1
列差额 / 元	2	5	1	3	

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表 2-10 中，B_2 列是最大差额所在列。B_2 列中最小元素为 4，可确定 A_3 的产品先供应 B_2 的需要，得表 2-11。同时将运价表中的 B_2 列数字划去，如表 2-12 所示。

表 2-11

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量 / 件
A_1					7
A_2					4
A_3		6			9
销量 / 件	3	6	5	6	

第三步：对表 2-12 中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。用此法给出例

2-1 的初始解列于表 2-13。

表　2-12

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额 / 元
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4	10	5	2
列差额 / 元	2		1	3	

表　2-13

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量 / 件
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量 / 件	3	6	5	6	

由以上可见，伏格尔法同最小元素法除在确定供求关系上的原则不同外，其余步骤相同。伏格尔法给出的初始解比用最小元素法给出的初始解更接近最优解。

本例用伏格尔法给出的初始解就是最优解。

三、产销不平衡的运输问题

前面讲的表上作业法，都是以产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2-6}$$

为前提的，但是实际问题中产销往往是不平衡的，就需要把产销不平衡的问题化成产销平衡的问题。

当产大于销，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2-7}$$

时，运输问题的数学模型可写成

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2-8}$$

满足