高等学校"十二五"规划教材

[经济管理类]

哈尔滨工程大学2012年本科生教材立项资助教材

投资学

●主编 孙 伟

哈爾濱工程大學出版社

哈尔滨工程大学2012年本科生教材立项资助教材

投　资　学

主　编　孙　伟
副主编　于天军　高　阳　刘　千

HEUP 哈爾濱工程大學出版社

内容简介

本书以介绍现代投资学的核心内容——投资管理为主，具体内容包括：收益与风险的衡量、固定收益证券分析、股票价值评估、投资组合理论、资本资产定价模型、套利定价理论、风险中性定价、衍生产品定价、基于 VaR 的市场风险度量、资产配置与组合管理、投资组合的业绩评价。

本书适用于金融学、金融工程等专业的本科生，金融学、应用经济学、工商管理、管理科学与工程等专业的硕士研究生以及金融硕士，同时本书也适用于 MBA(金融方向)学员。对于金融行业从业人员，本书也是一本不错的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

投资学/孙伟主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2013.7
ISBN 978-7-5661-0651-3

Ⅰ.①投… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①投资经济学 Ⅳ.①F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 187651 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心
开　　本 787mm×1 092mm　1/16
印　　张 24.5
字　　数 611 千字
版　　次 2013 年 8 月第 1 版
印　　次 2013 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 48.50 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

"投资学"是讲授微观金融理论和现代投资学的课程，是金融学专业核心课程。自2004年起，编者开始讲授"投资学"课程，至今已近十年，授课对象既有本科生，也有硕士研究生。在教学过程中，编者一直在思考，"投资学"的内容广大博深，核心内容应当包括哪些内容。为此，编者收集和阅读了大量的国内外优秀教材和教学讲义，这让编者对"投资学"课程有了更深入的了解。编者认为，"投资学"的核心应当是投资管理，包括资产定价、风险管理和资产配置。在教学学时不断减少的情况下，不能也没有必要讲解与投资学有关的全部知识点，而应讲授本课程最核心的内容，这就是编写本书的初衷。

本书的编写宗旨是，教材内容不求大全，力图揭示本课程最基础、最本质的东西。本书紧密跟踪国际上现代投资学发展的动向，充分反映现代投资学的核心内容、主要的研究方法和最新的研究成果。本书以定量分析为主，培养学生金融定量分析能力，为此配备了大量例题和习题。

本书以介绍现代投资学的核心内容——投资管理为主，具体内容包括：收益与风险的衡量、固定收益证券分析、股票价值评估、投资组合理论、资本资产定价模型、套利定价理论、风险中性定价、衍生产品定价、基于 VaR 的市场风险度量、资产配置与组合管理、投资组合的业绩评价。

本书是哈尔滨工程大学经济管理学院孙伟，哈尔滨师范大学经济学院于天军、社会与历史学院高阳和哈尔滨商业大学金融学院刘千，结合多年的教学研究和具体实践共同编写完成的。本书编写分工的情况是：孙伟编写第七、十一、十二章；于天军编写第五、六、八章；高阳编写第一、三、九章；刘千编写第二、四、十章。全书由孙伟总纂定稿。

本书适用于金融学、金融工程等专业的本科生，金融学、应用经济学、工商管理、管理科学与工程等专业的硕士研究生以及金融硕士，同时本书也适用于 MBA（金融方向）学员。对于金融行业从业人员，本书也是一本不错的参考资料。本书的学习课件可在"孙伟的金融学空间"下载。

在写作过程中，编者参阅了大量相关书籍、教学讲义与课件、学术刊物以及网络上的学术资源，在此一并向各位作者表示深深的谢意。

本书的出版得到了哈尔滨工程大学2012年本科生教材立项资助，在此表示感谢。本书也是教育部人文社会科学研究青年基金项目（12YJC790168）、哈尔滨工程大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目（HEUCF130908）的阶段性研究成果。

由于编者知识水平和掌握的资料有限，而且投资学的实践性很强，因此书中难免有错误和不当之处，恳请读者批评指正。

编　者

2013年7月

目录
CONTENTS

第一章　投资的收益、风险与效用函数

第一节　单一资产的收益与风险

投资就是为了取得未来的资产使用权而转让现在的资产使用权。如果资产与收益以货币的形式表示，则投资即为让渡货币现在的使用权，以期在未来获得更多的货币收入。

关于投资，还存在另一种广义的观点，即投资的目的是尽可能使一段时期内费用流和收入流的形式与期望相符。投资就是规划现金流的形式，表现为一段时期内投资者规划一系列收入与支出的现金流量的行为。这些现金流量（或正或负）通常发生在已知的确定日期，如一年之中的每一季度或是年末。而现金流则可以通过每一时期的现金流量来表述，例如（$-1, 0.1, 0.1, 0.1, 1.1$）。

现金流也可以用图表形式表示，在此类图形中，横轴代表时间，每一时点的现金流量以垂直于时间轴的线段来表示，线段的长度与现金流量的大小成比例，见图 1－1。

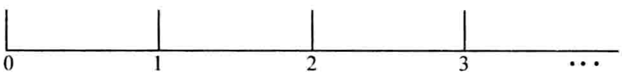

图 1－1　现金流图示

一、资产收益

（一）（单期）简单收益率

证券（资产）投资的收益（Return）有两个来源，即股利收入加上资本利得。证券投资单期的总收益率（Gross Rate of Return）定义为

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \tag{1-1a}$$

其中，R_t 是第 t（$t = 1, 2 \cdots$）期的总收益率，P_t 是第 t 期的证券价格，D_t 是第 t 期的现金股利收入总和，P_{t-1} 是第 $t-1$ 期的证券价格，P_0 是期初的证券价格。

净收益率（Net Rate of Return）定义为

$$r_t = R_t - 1 = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}} \tag{1-1b}$$

其中，r_t 表示第 t 期的净收益率。

在很多场合，可以通过用大、小写字母区分总收益率和净收益率。

如果第 t 期共有 n_t 天，投资者可以将净收益率转换成（名义）年收益率，即计算持有期收益率：

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}} \div \frac{n_t}{B} \tag{1-1c}$$

其中，B 表示一年的天数，例如 360 或 365。

（二）历史收益率

如果一项投资持续多期，则很可能在某些时期获得较高收益，而在另一些时期获得较低收益，投资分析应该考虑每一种收益，能够报告投资收益的总体数值就更好。投资者可以通过计算过去某段时期内一项投资的平均收益率得出这样一个总体数值。

当投资不只一期时，平均收益率依适用情况分成两种计算方式：

1. 算数平均值

算数平均值（Arithmetic Mean）是最简单的计算方式，只要将各期收益率加总后取平均即可：

$$R_A=(R_1+R_2+\cdots+R_n)/n$$
$$r_A=(r_1+r_2+\cdots+r_n)/n \tag{1-2}$$

2. 几何平均值

几何平均值（Geometric Mean）通常用于衡量成长率或有巨幅波动时，计算公式为

$$R_G=(R_1R_2\cdots R_n)^{1/n}$$
$$r_G=[(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)]^{1/n}-1 \tag{1-3}$$

（三）复合收益率与连续复合收益率

1. 复合收益率（多期简单收益率）

如果从 $t-k$ 时刻到 t 时刻内可以分为 k 个时期（即从第 $t-k+1$ 期到第 t 期，共 k 期），则总收益率为（假设 $D_t=0$）

$$\begin{aligned}1+r_t(k)&\equiv\frac{P_t}{P_{t-k}}=\frac{P_t}{P_{t-1}}\times\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\times\cdots\times\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}\\&=(1+r_t)(1+r_{t-1})\cdots(1+r_{t-k+1})\\&=\prod_{j=0}^{k-1}(1+r_{t-j})\end{aligned} \tag{1-4a}$$

其中，$r_t(k)$ 表示 k 期简单净收益率，r_t 表示单期简单净收益率。这样，k 期简单总收益率就是其所包含的这 k 个单期简单总收益率的乘积，称之为复合收益率（Compounded Return）。

2. 连续复合收益率（对数收益率）

令

$$\tilde{r}_t\equiv\ln(1+r_t)=\ln\frac{P_t}{P_{t-1}}=p_t-p_{t-1} \tag{1-4b}$$

其中，$p_t\equiv\ln P_t$ 为价格的对数，$\tilde{r}_t$ 为（单期）连续复合收益率或对数收益率。

令 $\tilde{r}_t(k)$ 表示 k 期连续复合收益率，对式（1－4a）两边取对数，则有：

$$\begin{aligned}\tilde{r}_t(k)&=\ln[1+r_t(k)]=\ln[(1+r_t)(1+r_{t-1})\cdots(1+r_{t-k+1})]=\ln[\prod_{j=0}^{k-1}(1+r_{t-j})]\\&=\ln(1+r_t)+\ln(1+r_{t-1})+\cdots+\ln(1+r_{t-k+1})=\sum_{j=0}^{k-1}\ln(1+r_{t-j})\\&=\tilde{r}_t+\tilde{r}_{t-1}+\cdots+\tilde{r}_{t-k+1}=\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{r}_{t-j}=\ln\frac{P_t}{P_{t-k}}=p_t-p_{t-k}\end{aligned} \tag{1-4c}$$

式（1－4c）的含义为：当多期投资时，多期连续复合收益率等于单期连续复合收益率之和。这样，当研究证券之间关系时，一般使用简单收益率；而当研究收益的跨期行为时，通

常使用连续复合收益率。

(四)预期收益率

由于投资收益不能事先确知,投资者只能估计各种可能发生的结果及每一种结果发生的概率,因而投资的收益率通常用统计学中的期望值来表示:

$$E(r) = \sum_{s} p_s r_s \tag{1-5}$$

其中,$E(r)$为证券的预期收益率,r_s 是第 s 种可能的收益率,p_s 是收益率 r_s 是发生的概率。

(五)收益率基本组成因素

收益率基本组成因素可以分为下列四部分:

1. 预期收益率(Expected Rate of Return)

这是投资者预期在未来一段期间可以获得的收益率。投资者在开始投资活动之初,借此评估各投资策略的优劣。

2. 实际收益率(Real Rate of Return)

投资者于一特定期间提供他人使用其资金后所获得的收益率,也是投资者真正需要关心的部分。

3. 预期通货膨胀率(Anticipate Rate of Inflation)

这是指预期物价调整的比例,投资者借此衡量其投资效益。

4. 风险溢价(Risk Premium)

这是风险资产要求的预期收益率与无风险利率(Risk - free Rate)之间的差额。

各收益率因素间的关系,包含下列几个关系式:

$$1 + r_f = (1 + r_0)(1 + f) \tag{1-6a}$$

其中,r_f为无风险资产预期收益率(名义利率),r_0为实际收益率,f为通货膨胀率。

当收益率较小时,

$$r_f \approx r_0 + f \tag{1-6b}$$

而要投资者愿意购买风险性资产,则必须给予风险溢价的补偿,所以

$$r = r_f + \pi \approx r_0 + f + \pi \tag{1-6c}$$

其中,r 为风险资产预期收益率,π 为风险溢价。

投资的必要收益率(Required Rate of Return)是指投资者购买证券的最低预期收益率。要注意的是,此必要收益率是各个投资者自己心中的预期(也就是说会因人而异),而预期收益率是客观的信息,是根据该投资标的过去的投资效益,及其他未来主、客观条件所计算出来的值,投资者将其与心中的期望值作比较。当某投资标的客观的预期收益率高于个人主观的必要收益率时,投资者自然会想买进该标的。反之,若客观的预期收益率低于个人主观的必要收益率,投资者自然会不想买进(或想卖出)该标的,即

预期收益率 < 必要收益率⇒卖出该证券

预期收益率 > 必要收益率⇒买进该证券

二、资产风险

预期收益率描述了以概率为权重的平均收益率。实际发生的收益率与预期收益率的偏差越大,投资于该证券的风险也就越大,因此可将单个证券的风险定义为实际收益率与预期收益率间差异发生的可能性。

（一）利用历史数据

资产的历史风险可以用资产收益率的算数平均值来测度，对这种变化进行定量测度的方法有方差、标准差和变异系数。它们都采用每期收益对平均收益的偏离（Deviation），即离差，表示为 $r_t - r_A$，其中，r_A 表示某段时间内收益的算术平均值，而离差之和 $\sum_t (r_t - r_A)$ 一定等于 0。

对于历史数据，方差 Var(r)为

$$\mathrm{Var}(r) = \sigma^2 = \frac{\sum_t (r_t - r_A)^2}{n-1} \tag{1-7a}$$

式(1-7a)在实际计算中比较烦琐，可以将其换成另一种形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(r) = \sigma^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_t (r_t - r_A)^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_t (r_t^2 - 2r_t r_A + r_A^2) \\ &= \frac{n}{n-1}(\bar{r}^2 - r_A^2)\end{aligned} \tag{1-7b}$$

其中，$\bar{r}^2 = \frac{1}{n}\sum_t r_t^2$。

在投资分析中常使用标准差 σ，它是方差的平方根：

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(r)} \tag{1-7c}$$

从统计学的角度分析，标准差 σ 的含义是收益率分布的可能范围，例如当证券收益率服从正态分布时，实际收益率偏离的范围为 1 个标准差，即 $r_A \pm \sigma$ 的概率为 68%；实际收益率偏离的范围为 2 个标准差，即 $r_A \pm 2\sigma$ 的概率为 95%；实际收益率偏离的范围是 3 个标准差，即 $r_A \pm 3\sigma$ 的概率为 99%。

如果收益为正态分布，投资者可以利用统计表来估计可能获得的收益率的范围。如果计算 z 统计量：

$$z = \frac{\text{目标收益} - r_A}{\sigma} \tag{1-8}$$

则可以利用 z 分布的知识来估计获得目标收益之上、目标收益之下或者两个目标收益之间的收益的概率，具体方法是计算出 z 值后查 z 统计表。

另外一种对风险测量的方法是变异系数（Coefficient of Variation, CV），变异系数测度的是单位收益率的风险。公式为

$$CV = \frac{\sigma}{r_A} \tag{1-9}$$

（二）预期收益率风险的测量

预期收益率的方差可根据收益对预期收益的偏离得到：

$$\mathrm{Var}(r) = \sigma^2 = \sum_s p_s [r_s - E(r)]^2 \tag{1-10}$$

第二节 资产组合的收益与风险

一、资产组合收益率

假定现在可以利用几项不同的资产（证券），投资者能够形成一项由 n 个资产组成的投资组合。假设总的投资金额为 X_0，每一资产的投资金额为 $X_{0i}(i=1,2,\cdots,n)$，有 $\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$。如果允许卖空，则 X_{0i} 中某些值可能为负；否则，将 X_{0i} 限制为非负值。

各资产的投资金额可以表示为总投资金额的一部分，即

$$X_{0i} = w_i X_0$$

其中，w_i 为资产 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 在资产组合中的权重。显然，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。如果允许卖空，一些 w_i 值可能为负。

设 R_i 为资产 i 的总收益率，则资产 i 在期末产生的货币量为 $X_{0i}R_i = w_i X_0 R_i$。资产组合在期末收到的货币量为 $\sum_{i=1}^{n} w_i X_0 R_i$。因此，资产组合的总收益率为

$$R_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_0 R_i}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \qquad (1-11a)$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，资产组合的净收益率为

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \qquad (1-11b)$$

由此可知，资产组合的总收益率与净收益率分别等于相应个别资产总收益率与净收益率的加权平均，权重为每一资产的投资金额占资产组合全部投资金额的百分比。

资产未来的支付（损益，Payoff）是不确定的，因此可以将一个资产的（未来）支付视作随机变量。如果式（1-11b）表示的是资产的随机收益率，则对等式左右两边同时取期望值，可以得到：

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \qquad (1-11c)$$

这意味着，资产组合期望收益率可以通过个别资产期望收益率的加权平均得到。

二、资产组合收益率的方差

（一）资产之间的关联性

统计学中利用协方差和相关系数描述随机变量间的关联程度，并用一些方法估计协方差和相关系数，进而对多种随机变量间的联动程度做出估计。

设 x,y 为两个随机变量，其均值（期望）分别为 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$。两个随机变量间的协方差即为

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \sigma_{xy} = E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})] \qquad (1-12a)$$

协方差只是描述两个随机变量之间的同动性，但对相关的程度却不能提供更为精确的说明，这就要用相关系数来表示：

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{1-12b}$$

当考虑两个或更多的资产时，它们间的相互依赖关系可以方便地以资产收益率的协方差和相关系数来概括。

（二）样本协方差、样本相关系数

精确得出两种资产真实的联合分布是很困难的，甚至可以说是不可能的。在实际工作中，只需对协方差和相关系数直接做出估计即可。如果假设两种资产间的关联性保持不变，则可通过以往的表现（主要是历史数据的观察值）对协方差和相关系数做出估计。在统计学中，这个估计被称为样本协方差和样本相关系数。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{n-1}\sum_t (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \\ \rho_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \end{aligned} \tag{1-13}$$

式中，r_{it}，r_{jt} 分别为证券 i，j 的收益率在某个时间段的样本。

（三）资产组合收益率的方差

现在来确定资产组合收益率的方差。资产组合中资产 i 的方差以 σ_i^2 表示，资产组合的方差以 σ_P^2 表示，资产 i 与 j 收益率之间的协方差以 σ_{ij} 表示。则有：

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= E[(r_P - \bar{r}_P)^2] = E[(\sum_{i=1}^n w_i(r_i - \bar{r}_i))(\sum_{j=1}^n w_j(r_j - \bar{r}_j))] \\ &= E[\sum_{i,j=1}^n w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j E(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{1-14}$$

这一结果表明资产组合收益率的方差能够通过资产收益率间的协方差以及资产在组合中的权重算出。

三、向量表示

现在采用向量的方式表示资产组合的期望收益率与方差、协方差。

设资产的（随机）收益率向量为 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^{\mathrm{T}}$，则期望收益率向量为 $\bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_n)^{\mathrm{T}}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$。若令资产组合权重向量为 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$，则资产组合的期望收益率与方差分别为

$$E(r_P) = \bar{r}_P = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{r}}, \quad \sigma_P^2 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} \tag{1-15}$$

四、分散化投资

随着资产组合所包含的资产数目的增多，资产组合收益率的方差会减小（即风险减小），这一过程被称为分散化（Diversification）。

分散化的效果能够通过使用组合方差定量描述。例如，现假定有很多资产，它们之间都是不相关的，即每一资产的收益率与其他任何资产的收益率无关；同时假定每一资产的收益率的均值与方差均为 μ 与 σ^2。现在假设某一资产组合由这些资产组成，每一资产取相同的权重，即对每一资产均有 $w_i = 1/n$。这一资产组合的收益率为

$$r_P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i, \quad E(r_P) = \mu \tag{1-16a}$$

相应地，这一资产组合的方差为

$$\mathrm{Var}(r_P) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{1-16b}$$

资产组合的方差随着 n 的增加而减少，即方差是资产数目的函数。

如果投资组合中的资产收益率是相关的，则情况会有所不同。

令 $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=j}\sigma_i^2, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n^2 - n}\sum_{i\neq j}\sigma_{ij}$，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(r_P) &= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=j}\frac{1}{n^2}\sigma_{ij} + \sum_{i\neq j}\frac{1}{n^2}\sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=j}\sigma_{ij} + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{n^2}n\bar{\sigma}^2 + \frac{1}{n^2}(n^2 - n)\bar{\sigma}_{ij} \\
&= \frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij}
\end{aligned} \tag{1-16c}$$

当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{Var}(r_P) \to \bar{\sigma}_{ij}$。

如果收益是不相关的，则分散化过程中通过将组合中的资产数目增加有可能将组合的方差近似地降低为零。如果收益是正相关的，则相对来讲，减小组合方差比较困难，此类投资组合的方差会存在一个可能的最低下限。

五、均值 - 标准差图

资产的收益率能够以一个二维图形表示，如图 1 - 2 所示。收益率的均值为 $E(r)$、标准差为 σ 的一项资产以图中一点来表示。横轴表示标准差，纵轴代表均值。这一图形称为均值 - 标准差图，或简称为 $E(r) - \sigma$ 图。在这一图形中横轴使用标准差而不是方差。这种图形在均值 - 标准差投资分析中频繁使用。

当风险一定时，每个人都会追求更高的收益率。当收益率一定时，每个人都是倾向于回避风险。

从图 1 - 2 中来看，Ⅰ 区域的情况是令人向往的，Ⅳ 区域的情况是投资者所不愿意见到的，而对于 Ⅱ 和 Ⅲ 区域来说，可能存在若干个点，使得投资者对其选择失去一定的偏好，即无论投资者选择哪一点所对应的证券来投资，其偏好是一样的。于是可以在图形中引入无差异曲线 (Indifference Curve)，即所有资产组合给投资者带来的效用是一样的、是没有差异的，如图 1 - 2 中的曲线。

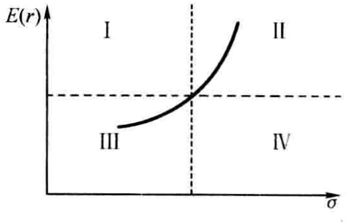

图 1 - 2 $E(r) - \sigma$ 图

第三节　效用函数

一、效用函数的概念

假设目前投资者有许多不同的投资机会，这些投资机会将影响到未来的财富价值。一旦决定了如何在这些投资机会中分配现有资金，那么未来财富将由相应的随机变量确定。如果所有投资机会的收益是确定的，则很容易进行投资选择，即选择产生最大财富的投资机会。但是，在一般的随机情形下，对于投资机会的选择并非如此显而易见，需要一定的程序来对随机的财富水平进行排列，效用函数（Utility Function）恰好提供了这样一种程序。

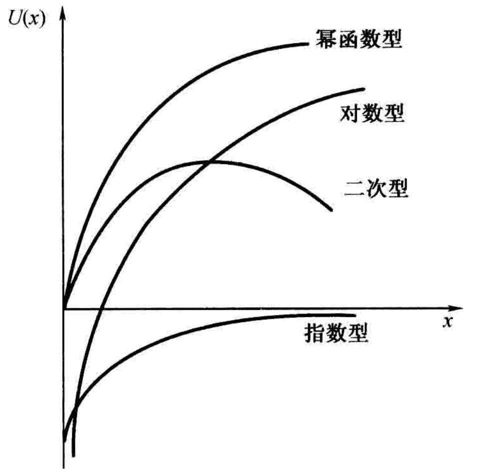

图 1-3　一些常用的效用函数

通常效用函数 U 定义在实数域上（代表可能的财富水平），并且其函数值为实数。一旦定义了效用函数，则所有可替代的随机变量 —— 财富水平将通过评价它们的期望效用值来进行排序。不同的投资者有不同的效用函数，它随着投资者的风险承受能力与财务状况的变化而变化。

对于效用函数基本要求是：它必须是单调递增且边际递减。一些最常用的效用函数如图 1-3 所示。

1. 负指数效用函数（Negative Exponential）

$$U(x) = -e^{-ax}$$

其中，a 为大于零的某一参数。注意这个效用函数的值为负。由于对于效用函数而言只有相对值是重要的，因此，这里函数值是正是负并无关系。

2. 对数效用函数（Logarithmic）

$$U(x) = \ln x$$

注意：该效用函数仅当 $x > 0$ 时才有定义。

3. 幂效用函数（Power）

$$U(x) = \frac{1}{b}x^b$$

其中，$b \leqslant 1$，且 $b \neq 0$。这一效用函数族包括风险中性效用（$b = 1$）。

4. 二次效用函数（Quadratic）

$$U(x) = x - \frac{1}{2}bx^2$$

其中，$b > 0$，注意这一函数仅当 $x < 1/b$ 时递增。

二、等价效用函数

由于效用函数被用来提供可替代性投资的排序，因而它的真实数值并没有意义，关键

是当计算一项预期效用时如何对它进行排序。很显然，效用函数可以通过某种简单的方式加以修改而并不改变它所提供的排列顺序。

通常地，给定一个效用函数 $U(x)$，任何具有下面形式的函数：

$$V(x) = aU(x) + b,\ a > 0 \tag{1-17}$$

都是原效用函数 $U(x)$ 的等价效用函数。等价效用函数所给出的排序与原效用函数完全相同。

三、风险厌恶

（一）风险厌恶的定义

效用函数的主要目的是对于遵从风险厌恶（Risk Aversion）的可替代性投资提供一个系统的排序方式。只要效用函数是凹的（Concave），则排序就可以完成。下面给出这个定义。

凹效用函数与风险厌恶：定义在实数区间 $[a,b]$ 上的函数 U，如果对于任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 以及区间 $[a,b]$ 上的任意 x,y 满足：

$$U[\alpha x + (1-\alpha)y] \geqslant \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \tag{1-18a}$$

则称该函数为凹函数。式(1－18a) 也可以表示为

$$UE(x) \geqslant EU(x) \tag{1-18b}$$

如果效用函数 U 在 $[a,b]$ 上是凹的，则称该函数在区间 $[a,b]$ 上是风险厌恶的。如果 U 处处都是凹的，则称 U 是风险厌恶的。通常对于 U 为严格的凹函数时，即(1－18) 式中的表达式对于任何 $x \neq y$ 为严格的不等式时，使用风险厌恶一词。

一般地，如果对于 x，$U'(x) > 0$，则 $U(x)$ 为增函数；若 $U''(x) < 0$，则 $U(x)$ 为严格的凹函数。图 1－4 解释了这一定义。

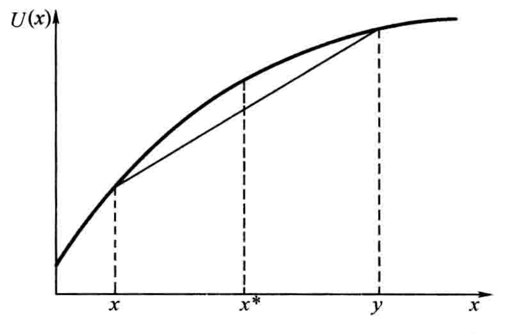

图 1－4　凹性与风险厌恶

图 1－4 中显示了一个凹的效用函数。为考察它的凹性，可任取两点 x,y 以及 α，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。点 $x^* = \alpha x + (1-\alpha)y$ 为 x 与 y 的加权平均，因此 x^* 位于 x 与 y 之间。函数在点 x^* 的值大于连接两函数值 $U(x)$，$U(y)$ 的直线在该点的值。一般地，凹性的条件为连接函数上任意两点的直线，必须位于该函数图形以下。递增凹函数的斜率随着函数值的增加而递减，最终趋于水平（斜率趋于零）。

（二）风险厌恶系数

效用函数的风险厌恶程度与该函数的弯曲程度有关——该函数的弯曲程度越大，则投资者的风险厌恶程度越高。这一理念可以通过效用函数的二阶导数加以量化。

可以使用 Arrow－Pratt 绝对风险厌恶系数 $A(x)$ 和相对风险厌恶系数 $R(x)$ 来表示风险厌恶程度，即

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)},\quad R(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} \tag{1-19}$$

分母 $U'(x)$ 使系数标准化。通过标准化，$A(x)$ 对于所有等价效用函数都是相同的。系数函数 $A(x)$ 和 $R(x)$ 基本上表明了随着财富水平的变动，风险厌恶是如何改变的。对于许多

投资者而言，随着财富的增加，他们的风险厌恶递减。

绝对风险厌恶系数 $A(x)$ 的倒数也称为风险容忍系数，表示为 $T(x) = \frac{1}{A(x)}$。

（三）确定性等价

除了比较可替代性投资机会外，随机财富期望效用的实际值并没有实际意义，但是其衍生的度量单位确是具有直观的意义，这一度量称为确定性等价（Certainty Equivalent）。

随机财富变量 x 的确定性等价量定义为与 x 的期望效用具有相同效用水平的一个确定（即无风险的）的财富量。换句话说，随机财富变量 x 的确定性等价量 C 满足：

$$U(C) = E[U(x)] \tag{1-20a}$$

一个随机变量的确定性等价对于所有等价效用函数都是相同的，该等价量以财富单位度量。对于凹的效用函数而言，随机收益 x 的确定性等价总是小于或等于其期望值，即 $C \leqslant E(x)$。图 1－5 解释了在两种收益为 x_1, x_2 的情形下的确定性等价。收益 x_1, x_2 的期望效用 $E[U(x)]$ 左移与效用曲线的交点的横坐标即为确定性等价 C。

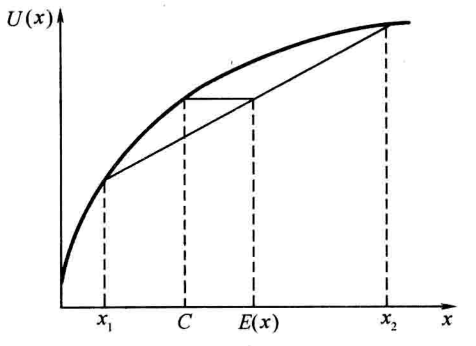

图 1－5　确定性等价

（四）风险溢价

由式(1－18b)可知，$UE(x) \geqslant EU(x)$。要想使不等式变为等式，可以减少不等号左边的值，这就产生一个概念——风险溢价。

风险溢价是指一个收入额度 π，当一个完全确定的收入 $E(x)$ 减去该额度 π 后所产生的效用水平仍等于不确定条件下期望的效用水平。即

$$U[E(x) - \pi] = E[U(x)] = U(C) \tag{1-20b}$$

因此，$\pi = E(x) - C$。

现在来确定 π，首先引入公平赌博的定义：$\tilde{h}$ 是公平赌博，当 $E[\tilde{h}] = 0, \mathrm{Var}[\tilde{h}] > 0$ 时。

运用公平赌博 $\tilde{h}$ 的定义，对进行赌博的风险溢价 π 重新定义为

$$E[U(W + \tilde{h})] = U[E(W + \tilde{h}) - \pi] = U(W - \pi) \tag{1-21}$$

其中，W 为投资者的初始财富。一般来说，$\pi = \pi(W, \tilde{h})$。

由此可以看出风险溢价的意义：它是投资者为了回避一项公平赌博最多愿意放弃的财富。

如果 $\tilde{h}$ 很小，对式(1－21)左右同时进行泰勒展开：

$$E[U(W + \tilde{h})] \approx E\left[U(W) + U'(W)\tilde{h} + \frac{1}{2}U''(W)E[\tilde{h}^2] + O(\tilde{h}^3)\right]$$

$$= U(W) + \frac{1}{2}U''(W)E[\tilde{h}^2]$$

$$U(W - \pi) \approx U(W) - U'(W)\pi$$

则有

$$\pi = \frac{1}{2}\left[-\frac{U''(W)}{U'(W)}\right]E[\tilde{h}^2] = \frac{1}{2}\left[-\frac{U''(W)}{U'(W)}\right]\mathrm{Var}[\tilde{h}] = \frac{1}{2}A(W)\mathrm{Var}[\tilde{h}] \tag{1-22}$$

其中，$A(W)$ 是财富水平 W 下投资者的绝对风险厌恶系数。