College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

经济应用数学基础（二）

线性代数（第二版）习题解答

胡显佑 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

经济应用数学基础(二)
线性代数(第二版)习题解答

Xianxing Daishu(Di'er Ban) Xiti Jieda

胡显佑 主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是与“高等学校经济管理类数学基础课程系列教材”之《经济应用数学基础(二)线性代数(第二版)》相配套的学习辅导书。全书按主教材的章节顺序编排，每章包括基本要求、内容要点和习题解答三部分。

本书可供学习经济应用数学基础的大学生和准备报考硕士研究生的学生参考，对讲授经济应用数学基础课程的教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(二)线性代数(第二版)习题解答/胡显佑主编. --北京:高等教育出版社,2013.3

ISBN 978-7-04-036927-4

Ⅰ.①经… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①经济数学-高等学校-题解②线性代数-高等学校-题解 Ⅳ.①F224.0-44②O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第022352号

策划编辑 张彦云 责任编辑 张彦云 封面设计 杨立新 版式设计 马敬茹
责任校对 胡晓琪 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	河北鹏盛贤印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	12.25	版　次	2013年3月第1版
字　数	220千字	印　次	2013年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	19.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 36927-00

前　言

本书是与“高等学校经济管理类数学基础课程系列教材”之《经济应用数学基础(二)线性代数(第二版)》相配套的学习辅导书,可供学习经济应用数学基础的大学生和准备报考硕士研究生的学生参考,也可供讲授经济应用数学基础课程的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容与修订后的主教材保持一致,不仅补充了教材各章新增习题的详细解答,在部分习题后予以分析,还按照最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”对知识点和教学要求进行梳理,对重要定义、方法给出归纳总结,新增了“基本要求”、“内容要点”两部分的内容,并订正了原辅导书中的错漏。

建议使用本书的读者能结合主教材的学习,首先复习相关知识点,然后独立求解,再结合辅导书的解法和分析进行比较和思考,这样才能更深入地掌握重点内容和方法。

书中疏漏之处难免,敬请同行和读者批评指正。

编者

2012 年 12 月

目 录

第一章 矩 阵

● **基本要求**

1. 理解矩阵的概念. 了解特殊矩阵,如单位矩阵、对角矩阵、上(下)三角形矩阵、对称矩阵和反称矩阵的概念及性质.

2. 掌握矩阵的线性运算(矩阵加法和数乘矩阵)、乘法、转置和方阵的幂,以及它们的运算律.

3. 了解分块矩阵的概念及运算法则.

4. 掌握矩阵的初等变换,了解初等矩阵的概念和性质;了解矩阵等价、矩阵的等价标准形等概念.

5. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质. 掌握用初等变换求逆矩阵的方法.

● **内容要点**

1. 矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$,简记为 $\boldsymbol{A}$. 数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元.

如果矩阵所有的元 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 均为零,则称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$,简记为 $\boldsymbol{O}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行、列数相等,即 $m=n$,则称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(B_{ij})_{s\times t}$,如果 $m=s,n=t$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,如果对应元均相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,$

$m;j=1,2,\cdots,n$),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2. 几种特殊矩阵

(1) **单位矩阵** 主对角线上的元均为 1,其余元均为零的 n 阶矩阵,称为 n 阶**单位矩阵**,记作 $\boldsymbol{E}_n$,简记为 $\boldsymbol{E}$.

(2) **对角矩阵** 除主对角线上的元之外,其余元均为零的 n 阶矩阵,称为 n 阶**对角矩阵**. 主对角线上元为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 n 阶对角矩阵记作 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(3) **数量矩阵** 主对角线上均为常数 k,其余元均为零的 n 阶矩阵,称为 n 阶**数量矩阵**,记作 $k\boldsymbol{E}_n$.

(4) **三角形矩阵** 主对角线以下元全为零的 n 阶矩阵,称为 n 阶**上三角形矩阵**;主对角线以上元全为零的 n 阶矩阵,称为 n 阶**下三角形矩阵**. 上、下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**.

(5) **对称矩阵与反称矩阵** 如果在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$,均有 $a_{ij}=a_{ji}$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 如果对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 均有 $a_{ij}=-a_{ji}$,即 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反称矩阵**.

3. 矩阵的运算及性质

(1) 矩阵的线性运算

① **矩阵的加法** 设同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

② **数乘矩阵** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 是一个数,则矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积,记作 $k\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法和数乘矩阵统称为矩阵的**线性运算**. 矩阵的线性运算具有下述性质:

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵,$\boldsymbol{O}$ 是同型的零矩阵,k,l 是两个数,则有

1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;　　2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;　　4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

5) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;　　6) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

7) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;　　8) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

(2) 矩阵乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{AB}$,其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\qquad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

矩阵乘法具有下述运算性质:

1) $A(BC)=(AB)C$;

2) $A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA$;

3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$, k 为常数,

其中有关矩阵都假设可以进行相关运算.

(3) **矩阵的幂**

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, k 为正整数, A 的 k 次幂定义为 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$.

规定 $A^0=E$(E 为 n 阶单位矩阵).

矩阵的幂具有下述性质:

设 A 为 n 阶方阵, k,l 均为正整数,则

1) $A^kA^l=A^{k+l}$;

2) $(A^k)^l=A^{kl}$.

注 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$,定义矩阵多项式 $f(A)$ 为

$$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 为常系数.

(4) **矩阵的转置**

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,把 A 的行与列互换所得到的矩阵称为 A 的转置矩阵,记为 A^{T}.

转置矩阵具有下述性质:

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; 2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$; 4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

4. **分块矩阵**

将矩阵 A 用横线和纵线分成若干子块,以子块为元的矩阵,称为**分块矩阵**.

分块矩阵以子块为元进行运算,要求所分子块的行数与列数满足运算的有关法则,使运算能够进行.

5. **矩阵的初等变换**

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则以下三种变换:

(1) 交换矩阵 A 的两行(列),

(2) 用一个非零常数 k 去乘矩阵 A 的某一行(列),

(3) 将矩阵 A 的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,

称为矩阵的初等行(列)变换,统称为矩阵的**初等变换**.

6. **初等矩阵**

单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵,称为**初等矩阵**.对应于三种初等变换的三种初等矩阵分别记作 $E(i,j)$, $E[i(k)]$, $E[i,j(k)]$.

初等矩阵具有以下性质：

(1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2) 初等矩阵与矩阵的初等变换之间的关系：

一个初等矩阵左（右）乘矩阵，等价于对矩阵作一次相应的初等行（列）变换.

7. 矩阵等价

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

(1) 同型矩阵之间的等价关系，有以下性质：

1) 反身性 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$；

2) 对称性 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$；

3) 传递性 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

(2) 矩阵的等价标准形

对任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，均可经有限次初等变换，化为形如

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\quad (r\leqslant\min(m,n))$$

的矩阵. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形.

8. 逆矩阵

(1) 可逆矩阵

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ **可逆**，且 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

注 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

(2) 逆矩阵的性质

1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

2) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\quad(k\neq0)$；

3) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ （$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵）；

4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件

同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是下列任一条件成立：

1) 存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 和 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使得

$$\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B}$$

2) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$；

3) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的等价标准形.

$$\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

习 题 一

(A)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a+2b & 3a-c \\ b-3d & a-b \end{pmatrix}$，如果 $A=E$，求 a,b,c,d 的值.

解 由题设条件，有

$$\begin{pmatrix} a+2b & 3a-c \\ b-3d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $a+2b=1$， $a-b=1$； $3a-c=0$， $b-3d=0$，

解得 $a=1$， $b=0$， $c=3$， $d=0$.

2. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

求(1) $2A+B$； (2) $A-3B$.

解 (1)

$$2A+B=2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A-3B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -9 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 13 & -1 & -13 \end{pmatrix}$$

3. 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{X}$.

解　由 $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$,可得 $2\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

4. 计算:

(1) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

(3) $(-1,3,2)\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}(-1,2)$;

(5) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ -1 & 3 & -5\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$;

(6) $(1,-1,2)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

解　(1)

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times2+(-2)\times1+(-3)\times3 & 1\times3+(-2)\times(-2)+(-3)\times1\\ 2\times2+(-1)\times1+0\times3 & 2\times3+(-1)\times(-2)+0\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$$
=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1) & 2\times(-3)+3\times0 \\ 1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1) & 1\times(-3)+(-2)\times0 \\ 3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1) & 3\times(-3)+1\times0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix}
$$

(3) $(-1,3,2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=(-1)\times3+3\times2+2\times(-1)=1$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,2)=\begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times2 \\ 1\times(-1) & 1\times2 \\ 3\times(-1) & 3\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $(1,-1,2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=(5,1,3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=15$

5. 设

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

求(1) $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$； (2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

解 (1)

$$
\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

(2) 利用(1)的结果,有

$$
\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}
$$

6. 求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；　　(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

解　(1) 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ 满足 $AB=BA$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+x_{12} & x_{12}\\ x_{21}+x_{22} & x_{22}\end{pmatrix}$$

由此可得

$$x_{11}=x_{11}+x_{12},\quad x_{12}=x_{12}$$
$$x_{11}+x_{21}=x_{21}+x_{22},\quad x_{12}+x_{22}=x_{22}$$

化简后解得

$$x_{11}=x_{22},\quad x_{12}=0$$

令 $x_{11}=x_{22}=a, x_{21}=b$，则所求矩阵

$$B=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}\quad (a,b\text{ 为任意常数})$$

(2) 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$ 满足 $AB=BA$，所以

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由此可得方程组

$$x_{11}+x_{21}=x_{11},\quad x_{12}+x_{22}=x_{11}+x_{12},\quad x_{13}+x_{23}=x_{12}+x_{13}$$
$$x_{21}+x_{31}=x_{21},\quad x_{22}+x_{32}=x_{21}+x_{22},\quad x_{23}+x_{33}=x_{22}+x_{23}$$
$$x_{31}=x_{31},\quad x_{32}=x_{31}+x_{32},\quad x_{33}=x_{32}+x_{33}$$

解得　$x_{21}=0, x_{31}=0, x_{32}=0, x_{11}=x_{22}=x_{33}, x_{12}=x_{23}$.

令　$x_{11}=x_{22}=x_{33}=a, x_{12}=x_{23}=b, x_{13}=c$，则所求矩阵

$$B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\quad (a,b,c\text{ 为任意常数})$$

7. 计算：

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$； (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

解 (1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

所以

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

(2) 当 $n=2$ 时，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $n=k-1$ 时，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则当 $n=k$ 时，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&11&11\\11&14&11\\11&11&14\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

所以

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&6&10\\0&1&3&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$，试证：$A^n=4^{n-1}A$（$n$ 为正整数）.

证　当 $n=1$ 时，结论显然成立.

设 $n=k-1$ 时，有 $A^{k-1}=4^{k-2}A$，则当 $n=k$ 时，有

$$A^k=AA^{k-1}=A(4^{k-2}A)=4^{k-2}A^2$$

$$=4^{k-2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$=4^{k-2}\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\8&8&8\end{pmatrix}$$

$$=4^{k-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$=4^{k-1}A$$

所以,对任意正整数 n,有 $A^n=4^{n-1}A$.

9. 设 n 阶矩阵 A,B 可交换,即 $AB=BA$. 试证:

(1) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$; (2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

证 (1) $(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$,由于 $AB=BA$,所以

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

(2) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$,由于 $AB=BA$,所以

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

小结 一般地,对于 n 阶矩阵 $A,B,AB\neq BA$,所以 9 题的结论未必成立. 然而,如果矩阵 A 与 B 可交换,即 $AB=BA$,则以下"乘法公式"成立:

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$

$$(A+B)^m=A^m+C_m^1A^{m-1}B+\cdots+C_m^mB^m\ (m\text{ 为正整数})$$

特别地,由于单位矩阵 E 与任一 n 阶矩阵 A 可交换,所以当我们计算 $(E+A)(E-A),(E\pm A)^2,\cdots$ 时,都可直接利用上述结果.

10. 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$,A 是 n 阶矩阵,定义 $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2$,如果 $f(x)=3-5x+x^2$,$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$,求 $f(A)$.

解 $f(A)=3E-5A+A^2$

$$=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&-5\\-15&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

11. 设某港口在一月份出口到三个地区的两种货物的数量以及两种货物的单位价格、质量、体积如下表:

出口量 \ 地区 / 货物	北美	西欧	非洲	单位价格/万元	单位质量/t	单位体积/m^3
A_1	2 000	1 000	800	0.2	0.011	0.12
A_2	1 200	1 300	500	0.35	0.05	0.5