高等代数研究

庄瓦金 著

科学出版社

高等代数研究

庄瓦金　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书分课程概论、教材研究、素质教育、课建论坛、名题证明、应用探索、教学随笔七个栏目，介绍了笔者从事高等代数教学三十余年，尤其是后十五年，对高等代数教材、教学研究的主要成果. 书中还有两个附录，系讲授数学史的总结及对素质教育的研究.

本书可供从事高校高等代数教学的同行参考、借鉴，也可供从事大学基础课教学的老师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数研究/庄瓦金著. —北京：科学出版社，2014.3

ISBN 978-7-03-040000-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①庄… Ⅲ.①高等代数-教学研究-高等学校 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第041711号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：阎 磊 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年3月第 一 版 开本：720×1000 B5

2014年3月第一次印刷 印张：10 1/4

字数：204 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是笔者从事高等代数教学30余年的研究成果.早在20世纪60年代读本科时,笔者在完成学业之余就自学了苏联、美国、西欧代数大家的专著,打下了良好的代数基础;80年代福建高等师范院校开展了校际高等代数教学研讨,邀请笔者的老师陈昭木教授作专题指导,笔者从中受益,因而所撰写的高等代数教研文章被福建省高等教育学会评为1990年高等教育科学研究优秀论文成果奖.1992年,在福建省高校首批优秀中青年教师高级职称评聘中升为教授后,笔者又成为学院第一位获政府特殊津贴的教师.随后又花了近四年时间对数学系的教改进行整体研究,申请世界银行教改项目,获得世界银行一万美元教改资助.项目虽然落入他人之手,但笔者的教学研究工作已从高等代数、数学史着手,其中高等代数的教学研究文章先后发表在《福建高教研究》《数学教育学报》《漳州师院学报》上,教材《高等代数教程》在试用后经省内两位代数教授评审后在国际华文出版社出版.这些工作得到了省内外同行的一致好评,经同行专家评审,其教学成果"高等代数教材及素质教育的研究与实践"获得了2005年福建省教学成果奖二等奖.此间,教育部"高等学校教学质量与教学改革工程"(简称"质量工程")启动,福建省代数界以"高等代数"与"线性代数"课程建设研讨会的形式每年举行两次.随之,精品课程也开始评选,笔者应邀在课程建设研讨会上作了十次报告,得到了与会老师的好评.现将这些报告连同获省奖成果、平时的教学研究资料系统整理成书.本书从七个方面阐述其研究成果.

课程概论　从代数简史入手,联系中学数学,阐述高等代数的研究对象、高等代数的一般性思想与两大方法:形式表示方法、公理化方法,进而揭示学习高等代数的基础、应用、素质的意义和价值.

教材研究　由4篇论文组成,前两篇论文发表在《数学教育学报》上,从跨世纪的视野、恢复高考30年来的状况,阐述高等代数的教材改革问题.A.И.柯斯特利金的《代数学引论》是国际上公认的优秀本科教材,中国如何向其学习?第3篇论文提出了一些想法.精品课程已停评,中国"第八届大学数学课程报告论坛"提出将其"转型升级",最后一篇论文就是根据中国高等代数教材情况及笔者的实践探讨了关于转型升级的一些想法.

素质教育　由3篇论文组成,分别阐述了教师要爱护学生(教师是为学生服务的)、面向全体学生、优化课程教学及让学生主动学习的认识与实践.

课建论坛　由6篇论文组成,其第1篇论文是针对在泉州师范学院研讨会上

的一片高等代数难教的声音所作报告写成的，中心是从课程价值入手，分析难学原因、提出解难做法；最后一篇论文是针对整个研讨会缺乏整体思维、有离代数本性的状况，以相似标准形为例所作报告整理而成的；其余 4 篇论文是将高等代数分为四个模块的教学问题.

名题证明　这里只收入两篇论文，第 1 篇论文阐述行列式的 Hadamard 不等式的多种证法及其推广（含体上矩阵情形）；第 2 篇论文是针对 *Lin. Aig. Appl.*，42(1982)卷上一篇论文的失误而写的推广性文章，恰好与可对角化问题、Jordan 标准形关联，因而收入于此. 当然，“证明”在高等代数中十分显要，限于篇幅，笔者将之留给读者.

应用探索　这里受到笔者能力限制，只收入 3 篇论文，前面两篇论文是高等代数的几何应用；后一篇论文是联系中学数学的探索.

教学随笔　这里只收入体会较深刻的两篇论文，论文一是针对“向量空间”一章的教学整理的，其中也有联系中学数学的内容，而且其中关于指数函数与对数函数的例子是根据笔者读本科时林辰教授所编写的《初等代数》讲义改造过来的. 论文二专述行列式的计算，希望能改善行列式的教学.

此外，本书还有两篇附录.

其一，是根据笔者在《漳州师院学报》上发表的关于数学史教学实践的文章修改的，注意到数学史与数学教育（HPM）近些年来已引起数学教育界的关注，说得明白点：一个好的数学老师必须学习数学史，因此，希望该文对大中小数学老师都有参考价值.

其二，是关于素质教育的研究，笔者 2000 年 12 月在福建民进《面向 21 世纪的基础教育》研讨会上作了“关于素质教育的理性思考”的大会报告，得到与会者的热烈肯定，特别是出席会议的教育第一线的会员；又由于笔者任漳州市政协副主席 11 年，分管教育，有实践感受，因而看了教育文稿周报上大量文章后大胆阐述这类问题. 这类问题还可深入探索，望能引起教育界人们的关注.

上述内容基本上都以论文形式发表过，这次整理成书也基本保留了原来的构架，特别是其后的参考文献，以利于同行理解相应陈述.

本书是笔者主持福建省精品课程：漳州师范学院“高等代数”精品课程的建设成果之一. 本书的出版得到了闽南师范大学优秀专著出版基金的资助.

由于笔者学识所限，撰写条件艰辛，书中定有不足之处，敬请教育同仁批评指导.

庄瓦金

2013 年 8 月 1 日于海西漳州

目　　录

高等代数的内容、方法和意义

高等代数是大学数学各专业的一门主干基础课.学生在高等代数中将学习哪些基础理论？如何学好这门课程？学之为何用？注意到21世纪对数学人才素质的要求,下面将对这些问题作简要的阐述.为此,先来说说代数学的起源与发展.

一、代数学的起源与发展

代数起源于人们熟悉的自然数的加法、乘法的计算艺术.公元3世纪希腊人Diophantus的《算术》对代数思想和符号已有重要影响."代数"一词来源于阿拉伯数学家、天文学家Mohammad ibn mûsâ Al-KhowârizmÎ的著作*Al-jabrw'al muqâbala*(约公元825年),其原意是还原、化简的科学.代数的进步依赖于较好符号体系的建立.15世纪结束时,开始使用现代符号"＋"和"－";16世纪末,法国数学家F. Viète首先用拉丁字母表示常数和变数,而大多数代数符号到17世纪中叶我们已经知道.这标志着代数学的"史前时期"的结束,代数学的真正发展是在以后的三个多世纪.此间,随着历史进程,代数学的主要研究对象和内容经历了三次根本的变革.

初等代数 与算术(对数字进行计算)不同,在17～18世纪中,代数学相当于现在人们观念上的初等代数,被理解为在代数符号上进行计算的科学,即**字母计算、字母变换、解方程的学科**.反映这一时期的代表作是1770年出版的18世纪最著名数学家L. Euler的《代数学引论》.

方程分析 多项式的根曾是数学研究的一个热点.18世纪和19世纪的代数学处理的主要对象是多项式(即代数方程).多项式研究的一个突出问题是代数基本定理的证明,1799年,数学王子Gauss在他的博士论文中在不依赖于"理想"根存在的假设下证明了这个定理(严格的证明到1920年才完成;2003年,H. Derksen还利用线性代数知识给出一个新的证明,见*The Amer. Math. Monthly*, 110(2003):620-623).由于实际应用和科学研究的需要,高次多项式根的计算与分布是当时许多数学家所关注的问题之一,C. F. Gauss, J. L. Lagrange, P. Ruffini, C. Sturm等对之都作出过贡献.历史上多项式根的最引人注目的问题

是一元高次多项式的根式求解问题. 16 世纪，意大利数学家发现了解三次代数方程的 Cardano 公式和解四次代数方程的 Ferrari 方法. 因此，人们对高于四次的代数方程可否用根式求解感兴趣. 三个世纪的探索，仍然找不到求根公式. 于是，根式求解不存在的证明引起了关注，A. Girad 和 Gauss 对此都做过研究. 1824 年，挪威青年数学家 N. H. Abel 证明了高于四次的代数方程一般不能用根式求解；1830 年，法国青年数学家 E. Galois 给出了一元代数方程可以用根式求解的一个一般的判别法，圆满地解决了长达三百多年的数学难题. 因此，18～19 世纪，代数学被理解为**方程分析的学科**. 1866 年出版的 J. Serret 的《高等代数教程》反映了这一认识.

抽象代数（近世代数） 从 19 世纪中叶以后，代数学从方程式论转向代数运算的研究. 首先，Galois 在解决代数方程用根式求解问题时也开创了群论的研究. 此后，A. Cayley，C. Jordan，M. S. Lie，F. Frobenius，F. Klein，H. Poincare 等对群的研究都作出了贡献；1882 年，Klein 的学生 W. von Dyck 引进了抽象群的概念. 其次，德国数学家 E. E. Kummer，P. G. L. Dirichlet，L. Kronecker，R. Dedeкind，D. Hilbert在代数数论的研究中引进了域、环、理想等概念. 在 19 世纪，线性代数和代数的研究十分活跃，1843 年爱尔兰数学家、天文学家 W. R. Hamilton 发现了四元数，1844 年德国数学家 H. G. Grassmann 发表了《线性扩张论》，1847 年 A. Cayley 给出了八元数非结合代数，从而推进了线性代数、结合代数、非结合代数的进一步研究. 此间，英国数学家 G. Boole 在研究思维规律中建立了 Boole 代数；1855 年 A. Cayley 引进了矩阵的简化记号，较系统地研究了矩阵代数，J. Sylvester，A. L. Cauchy，C. Jordan 和 F. Frobenius 等对矩阵理论的研究都颇有成果.

以上研究为代数学在 19 世纪末向现代发展阶段转移开辟了道路. 20 世纪初，在 D. Hilbert，E. Nöether 和 E. Artin 影响下，抽象代数应运而生，1930 年和 1931 年荷兰数学家 B. L. Van der Waerden 的两卷本《近世代数》出版，代数学成为**研究代数运算规律和各种代数结构的学科**，即抽象代数学科.

20 世纪 30 年代以来，代数学继续向纵深发展，不仅产生了同调代数、范畴论、代数 K-理论等新分支，而且代数学的一些成果和方法直接应用到自然科学、工程技术和社会科学的诸多领域，并产生了代数编码学、语言代数学、代数自动机理论、计算代数等代数应用分支. 代数在整个数学中的地位显得越来越重要，代数方法已成为现代数学的基本方法，因而与拓扑学一起构成了抽象数学的两大领域[1]，如 1994 年，著名的 Fermat 大定理的解决就深受代数学的影响.

二、高等代数的研究对象

张禾瑞和郝鈵新两位先生在文献[2]的开始就指出："作为大学数学基础课的代数，是中学代数的继续和提高. "具体地说，在初中数学中，大家学习过二元、三元

一次方程组;在高等代数中,要学习一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

对此,中学着重于具体求解;而在高等代数中,首先要回答方程组(1)是否有解? 即回答解的存在性问题. 方程组(1)的解可能不止一个,因而要回答(1)的解有多少? 是唯一,还是有无穷多个? 最后才给出解的表示,即解的结构. 又如在初中数学中,大家已经学过不少一元二次方程(二次三项式)及因式分解的知识;在高等代数中,将学习一般的一元多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n. \tag{2}$$

什么是因式分解? 中学数学未能给出回答,在高等代数中将建立一元多项式因式分解的整体理论.

根据 2003 年教育部颁布的《普通高中数学课程标准》[3],学生已经在必修课程中学习了平面上的向量,在选修系列 2 中学习了空间中的向量与立体几何. 在高等代数中,将此一般化,我们将学习一般向量空间的概念,揭示有限维向量空间的结构及其度量,这些将构成高等代数的主体. 学生在高中数学选修系列 4 中还学习过矩阵与变换,将其开拓,矩阵将成为研究向量空间之间的线性映射的极其有用的工具,而且矩阵本身有清晰的代数结构,也是高等代数的基本内容.

综上,**矩阵**、**多项式**、**向量空间**构成了高等代数研究的三大对象.

三、高等代数的思想与方法

怎样处理高等代数中的三大研究对象? 20 世纪 20～30 年代形成的抽象代数的思想就是我们处理高等代数的思想,具体地说,就是一般性的思想,苏联著名数学家 A. Г. 库洛什的著作[4]的书名《一般代数学讲义》就含此意. 例如,线性方程组(1),其系数 a_{ij},常数项 b_i 在高等代数中都属于一般数域 $\mathbb{F}$;多项式(2)的 $a_i\in\mathbb{F}$. 因此,高等代数中所建立的线性方程组理论、多项式的代数结构都对一般数域论述,对矩阵的代数结构也不例外;同时随着学习的进程,当我们阐述群、环、域概念之后,回过头来又可以用 20 世纪建立起来的一般代数刻画矩阵代数、多项式代数,并进而阐述域上向量空间及其线性算子的理论,以及向量空间的度量基础. 这种一般化的思想使得高等代数的教学贯串一条主线:三大研究对象的代数运算规律及其代数结构.

一般性思想是与高等代数的方法联系在一起的. 说其方法,主要有以下两种方法.

形式表示方法　如线性方程组(1)就是采用形式表示方法的，称为线性方程组的一般形式. 记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组(1)分别由如下向量、矩阵表示：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}, \tag{1$'$}$$

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta},\quad 其中\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1$''$}$$

这样多种形式表示联系在一起，易于建立线性方程组解的一般理论；圆满地回答前面说过的线性方程组解的三个基本问题. 又如一元多项式(2)也采用了形式表示，其中 x 是未定元. 通过这样一般的形式表示，引进运算、初等变换，建立起矩阵代数、多项式代数的整体理论.

公理化方法　高等代数的主体——向量空间及其线性算子：其向量空间就是采用纯公理定义的. 这样定义有别于《几何基础》的做法，它是作为代数系统之一来处理的，也就是采用如抽象代数中群、环那样的处理. 这样处理来之不易，如前面对历史的简述，群、环、域诸代数系统在 19 世纪已有许多成果，但还没有形成抽象代数这棵大树，是在 19 世纪和 20 世纪之交，特别是在 20 世纪 20 年代，在 E. Nöether 等的统一性思想及哥廷根、汉堡的系列讲学活动基础上，代数公理化方法才成熟，其大树也随之成长. 因此，逐步深入地认识公理化方法非常重要，这方面尤其要加强联系思维，如线性算子与矩阵的联系，蕴涵着丰富的表示论思想与方法.

四、高等代数的学习价值

1. 打好基础　增进素质

高等代数的基础理论和方法，不仅是学习代数后继课程的基础，而且也是学习微分方程、计算数学、数学模型、泛函分析、微分几何、微分流形、一般拓扑、概率统计、线性规划等基础数学、计算数学、应用数学、随机数学诸课程的基础. 因此，理解高等代数的思想，掌握其基础理论和方法，在学习中加强辩证思维、抽象思维和逻辑推理的训练，大家不仅能够打好数学基础，而且还能增进自身的数学素质，使自己在将来成为一个名副其实的数学工作者.

2. 联系中数 服务未来

高等代数与中学数学的联系使得它的一些内容对中学数学教学有居高临下的指导作用，中学数学中的某些原型对于克服代数概念抽象、证题难以入手等难点有时也颇有价值，在学习中要注意加强这方面的联系，这对于大部分同学将来从事中小学数学教学工作是十分有益的. 对此，读读出自 *Notices of the AMS*，58：3 (2011)的文献[5]也是十分有益的.

3. 起飞平台 开拓发展

《人人关心数学教育的未来》[6]中有这么一句话："大学数学为许多领域的专业提供坚实的起飞平台."在 21 世纪，大学数学不再是纯粹为培养未来数学家而设立的专业，更主要的是为培养各级各类数学教师和高层次人才打基础的. 掌握大学数学的人，将在计算机、自动控制、系统规划、现代经济管理等诸多领域发挥积极作用，随着知识产业化的进程，高等代数的知识，数学的理论和方法将越来越显示出强大的经济效用和社会效益.

4. 美化心灵 和谐文明

数学是美的，作为数学各专业基础课的高等代数也是美的，在教学中同学们将感受到简洁、清晰、对称、奇异的代数"画面"，享受学习进程中的快乐. 为此，重视标准形等的运用和学习引导，可以加强数学美的效果. 数学的美是心灵深处的美，它对于培养人们美的情操、开发个人智能、构建现代和谐文明都将发挥积极的作用.

总之，学习高等代数有着深刻的基础、应用、素质的意义和价值.

参考文献

[1] 胡作玄，邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南：山东教育出版社，1999.
[2] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2007.
[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京：人民教育出版社，2003.
[4] 库洛什 A Γ. 一般代数学讲义[M]. 刘绍学，译. 上海：上海科学技术出版社，1964.
[5] Ira Papick J. 加强中等数学教师的数学科学知识[J]. 数学译林，2012，31(2)：164-167.
[6] 美国国家研究委员会. 人人关心数学教育的未来[M]. 北京：世界图书出版公司，1993.

教材研究

跨世纪高等代数教材改革的思考与实践①

摘要：我国现行高等代数教材的基本框架形成于20世纪50～60年代，随着时代的发展和各种新技术的不断涌现，原先的高等代数教材已越来越不适应时代的发展和社会进步的需要．为此，必须改革高等代数教材．因此，本文在找准存在问题、明确改革方向的基础上，坚持实事求是，综合优化创新的原则，并提出改革教材应注意：吸纳众家优点推陈出新，遵循认识规律优化教材结构，根据教学需要精选典型材料．

关键词：高等代数；教材改革；"三个面向"；优化结构

面对21世纪无论是国外还是国内，许多数学家都十分关注数学教育的改革，我国高师数学面向21世纪教学内容和课程体系改革计划也在积极、有序地探讨[1]．时下，很少看到关于高等代数教材改革的文章．因此，本文结合笔者25年来从事高等代数教学和理论线性代数研究的认识与实践，对这个问题作些思考，以达抛砖引玉效用．

一、遵循"三个面向"　找准存在问题

1．形势发展逼人　改革势在必行

我国现行高等代数教材的基本框架形成于20世纪50～60年代．正如N．贾柯勃逊在《基础代数》序言中所指出的：受苏联第一颗人造地球卫星上天影响……线性代数随之提前讲授．于是，在我国，线性代数与50年代以代数方程式论为主体的高等代数体系重新整合，形成了那个时期的高等代数教材．国内许多代数名家，如丁石孙、王湘洁、谢邦杰、张禾瑞、周伯埙等教授都直接参与教材的编写及授课，为我国高等代数教学打下了良好基础．应该说，现行高等代数教材就是在此基础上演变、修改、充实形成的，因而带有一定的时代气息．

我们注意到，20世纪60年代以来，与知识经济概念逐渐形成相适应，国际上

---

① 原载数学教育学报，2001，10(2)：80-83．

数学理论、数学应用、数学教育都有显著的发展. 在数学理论方面，正如胡作玄在《20 世纪数学思想》一书中所指出的：代数学和拓扑学的发展已成为当代数学的两大领域……没有它们，现代数学可以说寸步难行. 对此，李文林在《数学史教程》一书中进一步阐明：数学科学的统一化趋势空前加强. 在数学应用方面，不仅许多应用数学分支相继形成，而且数学在信息技术、生物技术、现代经济诸领域都有广泛而深刻的应用，数学技术正在形成. 因此，可以说，数学科学已成为知识经济的基石. 在数学教育方面，从已经翻译出版的一些教材可以看出，20 世纪 70 年代苏联在教材改革方面已走在前面. 在线性代数的改革方面，美国正在一些线性代数名家带领下进行着深刻的研究、改革[2-4].

与国外情况相比，我国在非数学类专业的改革上已有成效，特别是经济类专业，线性代数不仅成了必修课，而且也是考研内容之一. 对于数学类专业的改革，虽然不少名家都有相近意见，但总体而言，特别是师范类专业，现代数学的份额却少得可怜，高等代数教材已 40 年基本不变，远跟不上时代的步伐. 因此，形势逼人，改革才有出路，遵循邓小平的“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的教导，我们应该从学科发展、实践应用、教学需求诸方面认真研究高等代数的教材改革问题.

2. 找准存在问题　明确改革方向

从我国目前较广泛使用的几本高等代数教材看，多少存在着编研分离、编者不教的现象，加上大气候的因素，很难不断提高教材质量. 因此，从总体上看现行教材（含教学参考书）存在着以下 3 个问题.

1）高度不高，广度不广，缺少创新内涵

例如，高等代数本质是代数的，在课程目标、学生可行情况下，尤其是对于优生而言，高等代数教材如何突出代数的创新内涵，以提高这门课的教学水平？显然，现行教材的高度是不够的. 现行教材关于复矩阵、复空间的内容较少，既适应不了理论后继课程的需要，也适应不了应用上的要求，其宽度也不够，再如像 $N(A)$，$R(A)$这样在当代线性代数文献中既基本、又有用的表述，高等代数教材中都不涉及.

2）传统影响，表述不佳，难以引人入胜

受 20 世纪 50 年代高等代数教材影响，不少教材将多项式代数列前讲授，在线性与非线性分划上违背了认知规律，更难将多项式有机地融入整体之中. 有的教材虽将线性列前，但行列式排在前面，将整体的矩阵基础一分为三，因而在行列式表述时缺乏矩阵语言，对教与学都有诸多不便. 受传统影响的再一突出表现是不习惯于使用集合论语言、代数符号，致使表述繁杂，数学美逊色，加上极少涉及应用，使

学生学了感到烦躁，何谈引人入胜？

3）品种单调，题集泛滥，不利于学生参考阅读及其数学品格的培养

有些图书馆里上架的高等代数类教学参考书，要么是较教材更泛的参考书，要么是在“分析与研究”“常用方法”……之下的题解类图书，要么是直截了当的教材习题解答的配套图书，要么是非数学专业用的线性代数书籍. 如果老师不去留神学生的课外阅读，将很容易造成课堂教学的严格要求与课外的“大众化”倾向的分离，极大地削弱了基础课的功能，不利于学生数学自学能力的提高，也妨碍了教师在教学实践中的教育创新.

二、坚持实事求是　综合优化创新

1. 吸纳众家优点　探索推陈出新

在看到现行教材整体不足的同时，也应看到各教材的可用性及特色，重视吸纳各自的优点，进行科学的整合、优化，进而开拓创新，编写出 21 世纪所需要的高等代数教材.

例如，丘维声的《高等代数》，是在北大前代数小组的《高等代数简明教程》(1966 年版)、《高等代数》(1978 年版)基础上，经多年使用，并面向新世纪写成的. 因此，这套教材在保留北大两套教材优点的同时，在许多方面都有改进、提高，教材的结构更趋合理；深度、广度都有加大，特别是安排了一些“阅读材料”，注意理论联系实际. 这些都是值得好好研究、细化，进而开拓、发展的. 又如张禾瑞、郝鈵新的《高等代数》深入浅出，有些习题颇有创意，与教材融为一体，其做法值得研究、发扬. 再如谢邦杰的《线性代数》，较早重视分块方法；谢先生生前曾告诉笔者，这是他“文革”期间参与数理统计应用时的收获. 事后笔者在研读一些国外线性代数文献时更加深了这一印象：只要善于深入浅出，分块方法可酌情贯串于整个教材. 既可简化一些表述，熟化基本技巧，也可体现数学美，达到真善美一体化的境界. 此外，在注意学生解题能力培养上，陈昭木的《高等代数》刻意安排了“解题例证”专题，这方面在科学分类下显然还有很大提升空间.

吸纳众家优点也应注意消化国外的有益经验及成果. 例如，文献[3]对理论线性代数、应用线性代数、数值线性代数的教材体系有清晰的阐述；文献[4]对线性代数基本定理的阐述较为深刻；文献[5]的智力题形式在国内是不多见的. 这些对于国内高等代数教材的改革，实现素质教育都有借鉴价值.

2. 遵循认识规律　优化教材结构

在集思广益基础上，高等代数教材改革的成败在于确定结构、精选材料. 要做

到优化结构、我们认为应遵循认识规律，贯串学科思想，整合基本对象，贯串教学主线，反映当代成果；同时，注意课程效用，关联基础课程，方便师生教学（尤其是可供学生自学）. 因此，在丘维声的《高等代数》基础上，新的高等代数教材可分划为两大结构：基本结构和辅助结构.

基本结构的内容是教材主体，属必学内容. 根据科学性、效用性和可接受性相统一的原则，可按线性与非线性、形式表述与抽象兼容形式化的表述确定结构系统主线：绪论（高等代数的内容、方法和意义）→矩阵→多项式→向量空间及其线性映射（含 Euclid 空间和双线性度量空间）. 因而在方法上从形式定义入手，使用演绎推理，突出归纳、反证、归谬等证法，从经典的代数方法有序地向味道稍浓的代数公理化方法渐进；在计算上始终突出矩阵的初等变换，并随着教材进程逐步添加选项、加大综合计算（在条件许可情况下，后期可安排 2 到 3 次上机演练，开展计算机辅助教学）.

辅助结构的内容是教材主体的补充，供选讲、点讲、单元复习、学生自学及今后考研备用. 因此，按各辅助教学功能划分有：①预备章；②阅读参考（含供提升观念参考的群、环、域的概念，渗透数值思想的参考材料以及教材基础知识自然延伸的小品文章）；③应用参考（按章搭配）、综合应用；④解题探索（置于章末，分类编入）.

这样，再运用当代排印技术，异体排版，可达主线突出，辅线相承，因而要在提高教材深度、开拓教材广度，沟通代数、几何、分析的联系，以及基础与应用的联系等方面多花笔墨，这样可使教材更好地体现数学诸基础课程的统一；基础性、师范性和应用性的统一；面向全体学生与因材施教的统一. 因此，两大结构的整合有利于整个教学目标的实现，使教材达到优化的境界.

作为对两大结构思考的补充，下面再提及三点值得关注的事项.

（1）数学模式论给高等代数教材改革留有较大空间.

数学已被称为模式的科学. 据此，矩阵不再是单纯的计算工具，也是数学的重要研究对象. 在模式论的观念下，高等代数中的形式化内容无论从教材还是教法上看都有加强的必要.

（2）要加强向量空间的教材份额.

这一事项可在三处考虑：①在前期增补矩阵空间的内容，如 A 的列空间 $R(A)$ 和零空间 $N(A)$；②将线性变换稍开拓为线性映射，这样做在客观上还强化了向量空间同构的概念；③加强双线性度量空间的内容，此若再配上阅读参考：群、Erlangen 纲领，或许是漂亮完美的处理.

（3）多项式代数不能随意删减.

随着代数几何、非线性数学在数学中地位的提高，多项式代数无论从理论上还是应用方面都十分重要，我国现行高等代数教材对之处理是正确的，但已删减到不能再减的地步了！我们认为，任何再将它删减的做法都是不恰当的.

3. 根据教学需要精选典型材料

在结构确定之后，就应考虑教学各环节的需要，吸纳众家之长，精选典型材料. 对此，以下诸方面尤其重要.

1）重点内容，材料丰富

如矩阵分块，除专节陈述外，在以后的相关章节中也应酌情加强，提升表述技巧. 又如 $R(A)$ 与 $N(A)$，在线性方程组理论方面有提升效用，到了线性映射部分也有回味价值. 再如矩阵相似标准形，Jordan 标准形有其极限性，应增加有理标准形内容，这无论在理论上还是应用上都有价值，且无需增加教学时数.

2）力求简洁，择优选材

数学是简洁的，代数更是如此，这是数学美的核心，也是调动学生学习积极性的一个环节. 因此，应重视择优选材. 例如，重视集合论语言的运用，简化表述. 又如证明的化简，这方面北大前代数小组的《高等代数》在不少地方都值得吸纳. 再如化二次型为平方和，如陈重穆的《高等代数》有创新.

3）精选例题，配好习题

精选例题首先要根据教材进程，择优吸纳. 如实对称矩阵的正交相似化简，在一定意义上带有全书计算的系统小结，涉及行列式计算、多项式求根（因式分解）、求矩阵零空间的基（解齐次线性方程组）、求 Euclid 空间的标准正交基，其例题既要顾及全局又要力求简洁是件不易之事. 对此，北大前代数小组的《高等代数》做得好. 其次，精选"解题探索"中的例题，不仅要目标明确，反映该章的重点，而且还要把握难度，做好分类，这就更需全面考虑. 再说习题搭配，既要供每次授课布置课外作业用，也要供小单元上习题课用，加上刚提到的"解题探索"的需要，配好习题更是要花很大心思.

4）阅读参考，恰到好处

从阅读参考的功能看，应小巧玲珑、编排得当、富于回味，真正体现恰到好处. 如提升数域上向量空间，作为阅读参考可安排在向量空间概念之后，其中域的介绍应尽量简洁，但模 n 的剩余类域的内容不可缺少. 又如关于矩阵相抵标准形的应用，可介绍幂等矩阵、对合矩阵的相似化简；讲矩阵广义逆之后，可介绍广义逆对线性方程组的应用.