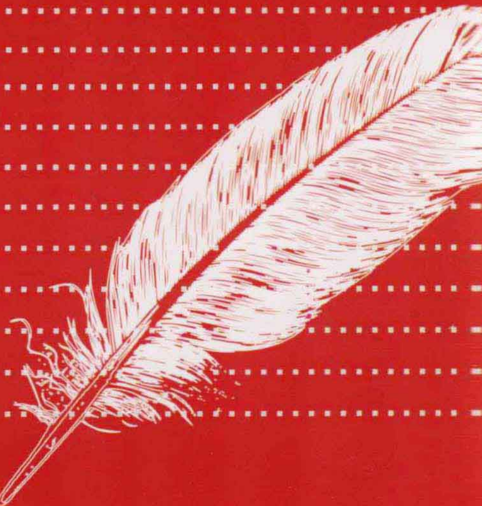
Yan Yuan
燕园教育

2014 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学一）



清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

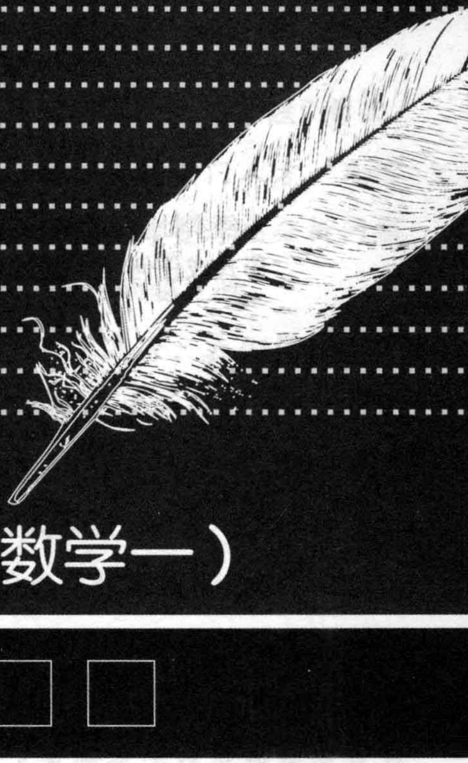
赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

2014 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学一）



清华大学 王　欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童　武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘

考研名师童武教授

考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺超越 135 分. 数学一 / 王欢主编.
—北京：中国石化出版社，2013.3
ISBN 978-7-5114-2009-1

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 Ⅳ.①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 044464 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 5.75 印张 137 千字
2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
定价:18.00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入 WTO 之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选 1000 题(理工类)》、《考研数学最新精选 1000 题(经济类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

最后冲刺试卷一

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设 $f(x) = x\sin x + \cos x$，下列命题中正确的是(　　)。

　(A) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极小值　　(B) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极大值

　(C) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值　　(D) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时，必有(　　)。

　(A) $(x - a)[f(x) - f(a)] \geqslant 0$　　(B) $(x - a)[f(x) - f(a)] \leqslant 0$

　(C) $\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \geqslant 0\ (x \neq a)$　　(D) $\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \leqslant 0\ (x \neq a)$

3. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$，渐近线的条数为(　　)。

　(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　　)。

　(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 设 A 为反对称矩阵，且 $|A| \neq 0$，B 可逆，A、B 为同阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $[A^TA^*(B^{-1})^T]^{-1} =$ (　　)。

　(A) $-\frac{B}{|A|}$　　(B) $\frac{B}{|A|}$　　(C) $-\frac{B^T}{|A|}$　　(D) $\frac{B^T}{|A|}$

6. 设向量组(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，其秩为 r_1，向量组(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，其秩为 r_2，且 $\boldsymbol{\beta}_i (i = 1,2,\cdots,s)$ 均可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则(　　)。

　(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 $r_1 + r_2$

　(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s - \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 $r_1 - r_2$

　(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 $r_1 + r_2$

　(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

7. 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 也发生，则(　　)。

　(A) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$　　(B) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

　(C) $P(C) = P(AB)$　　(D) $P(C) = P(A \cup B)$

8. 设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布，且 $D(X_i) = \sigma^2$，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \frac{1}{n - 1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则(　　)。

　(A) S 是 σ 的无偏估计量　　(B) S 是 σ 的最大似然估计量

　(C) S 是 σ 的一致估计量　　(D) S 与 $\overline{X}$ 相互独立

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$ ________。

10. 设 $f(x)=xe^{x}$，则 $f^{(n)}(x)$ 的极小值为________。

11. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ________。

12. 曲线 $r=3\cos\theta$，$r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分面积 $A=$ ________。

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$，且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$ ________。

14. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为________。

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 19 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$。

16.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$。

17.（本题满分 11 分）

计算 $I=\oint_L\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是绕原点旋转一周的正向光滑闭曲线。

18.（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$，求 $f(x)$。

19.（本题满分 10 分）

假设曲线 $l_1: y=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴，y 轴所围成区域被曲线 $l_2: y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值。

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$。

（Ⅰ）求 x 与 y 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。

21.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

（Ⅰ）已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为3，试求 y；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵。

22.（本题满分11分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$，

（Ⅰ）求 $P\{Z\leqslant 1/2 \mid X=0\}$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度。

23.（本题满分11分）

一台设备由三大部分构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为0.10、0.20和0.30，假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的概率分布、数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$。

最后冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的最（极）大值、最（极）小值

【解题分析】因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上可导，$f'(x)=x\cos x>0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，所以 $f(0)<f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，

即 $f(0)$ 是最（极）小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是最（极）大值，故选(B)。

2.【考点提示】极值点

【解题分析】由题设连续性及 $f(a)$ 为极大值知 $(x-a)(f(x)-f(a))$ 在 $x=a$ 左右两侧变号，从而(A)(B)都可排除，当 $x\neq a$ 时，$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\dfrac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}$，由于 $f(a)$ 在 $x=a$ 点为极大值，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 的小邻域内连续，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0$，因此，选(C)，而排除(D)。

3.【考点提示】渐近线的求法

【解题分析】$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，则 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；

$\lim\limits_{x\to -\infty}y=\lim\limits_{x\to \infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$，则 $y=0$ 是曲线的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=1$，则 $y=x$ 是曲线的斜渐近线。故应选(D)。

4.【考点提示】分段函数的高阶导数

【解题分析】$3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $\varphi(x)=x^2|x|$，它是分段函数，$x=0$ 是连接点。

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 0,\\ x^3, & x\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow \varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x<0,\\ 3x^2, & x>0,\end{cases}$$

又 $\varphi_+'(0)=(x^3)_+'\big|_{x=0}=0$，$\varphi_-'(0)=(-x^3)_-'\big|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0$；

同理可得 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0\\ 6x, & x>0\end{cases}$，$\varphi''(0)=0$；

即 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant 0,\\ 6x, & x\geqslant 0\end{cases}=6|x|$，因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导 $\Rightarrow\varphi'''(0)$ 不存在，应选(C)。

5.【考点提示】矩阵的计算

【解题分析】$[A^TA^*(B^{-1})^T]^{-1}=[(B^{-1})^T]^{-1}(A^*)^{-1}(A^T)^{-1}$

$$=[(B^{-1})^{-1}]^T\frac{A}{|A|}(-A)^{-1}=-\frac{B^T}{|A|}$$

应选(C)。

6.【考点提示】向量组的秩

【解题分析】设 α'_1，α'_2，…，α'_{r_1} 为 α_1，α_2，…，α_s 的极大无关组，

则它也是 α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_s 的极大线性无关组，所以(D)结论成立。

7.【考点提示】利用随机事件之间的关系及其概率性质

【解题分析】由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，知 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$。

因为 $AB\subset C$，所以 $P(AB)\leqslant P(C)$，

又 $P(A\cup B)\leqslant 1$，故 $P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$。

故应选(B)。

8.【考点提示】随机变量的无偏估计量

【解题分析】$\because\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$

由辛钦大数定律可知 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X_1^2)$，$\overline{X}\xrightarrow{P}E(X_1)$

根据依概率收敛的性质可知

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\xrightarrow{P}E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=D(X_1)=\sigma^2$$

$\therefore\quad S=\sqrt{S^2}\xrightarrow{P}\sqrt{\sigma^2}=\sigma$，故选(C)。

二、填空题

9.【考点提示】一元复合函数求导法则

【解题分析】已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，$f'(x)=e^{f(x)}$，所以 $f'(x)$ 在 $x=2$ 的同一邻域内可导，即在该邻域内函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)=[e^{f(x)}]'=f'(x)e^{f(x)}=e^{2f(x)}$。

于是 $f''(x)$ 也在 $x=2$ 的同一邻域内可导，即在该邻域内函数 $f(x)$ 三阶可导，

且 $f'''(x)=[e^{2f(x)}]'=2f'(x)e^{2f(x)}=2e^{3f(x)}$，将 $f(2)=1$ 代入可得 $f'''(2)=2e^3$。

10.【考点提示】先求 n 阶导数，再求极值

【解题分析】

$$f(x)=xe^x$$
$$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$$
$$f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x$$

$$f^{(n+2)}(x)=(n+2+x)e^{x}$$

令$f^{(n+1)}(x)=0$，解得$f^{(n)}(x)$的驻点$x=-(n+1)$，

又$f^{(n+2)}[-(n+1)]=[n+2-(n+1)]e^{-(n+1)}=e^{-(n+1)}>0$，

故$x=-(n+1)$为$f^{(n)}(x)$的极小值点，$f^{(n)}[-(n+1)]=-\frac{1}{e^{n+1}}$。

11.【考点提示】全微分的四则运算、一阶全微分形式不变性

【解题分析】因为
$$\begin{aligned}dz&=e^{x+y}dx+xde^{x+y}+\ln(1+y)d(x+1)+(x+1)d\ln(1+y)\\&=e^{x+y}dx+xe^{x+y}d(x+y)+\ln(1+y)dx+(x+1)\frac{dy}{1+y}\\&=e^{x+y}dx+xe^{x+y}(dx+dy)+\ln(1+y)dx+\frac{(x+1)dy}{1+y}\end{aligned}$$

所以
$$dz|_{(1,0)}=edx+e(dx+dy)+2dy=2edx+(e+2)dy$$

12.【考点提示】曲线积分

【解题分析】解方程组$\begin{cases}r=3\cos\theta\\r=1+\cos\theta\end{cases}$得$\theta=\frac{\pi}{3}$，

故$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2d\theta\right]=\frac{5\pi}{4}$。

13.【考点提示】矩阵的秩

【解题分析】由题设，$r(\boldsymbol{A})=3$，则$|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{vmatrix}$$

从而$k=-3$或$k=1$。当$k=1$时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，

则$r(A)=1$，与已知矛盾，所以$k=-3$。

14.【考点提示】相关系数

【解题分析】由题设，$D(Z)=D(X)$，

$$\begin{aligned}cov(Z,Y)&=cov(X-0.4,Y)=E[((X-0.4)-E(X-0.4))(Y-E(Y))]\\&=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=cov(X,Y)\end{aligned}$$

因此
$$\rho_{YZ}=\frac{cov(Z,Y)}{\sqrt{D(Z)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho_{XY}=0.9$$

三、解答题

15.【考点提示】数列的极限

【解题分析】解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}}$，$\underline{\underline{令\sqrt[n]{n}-1=x}}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$。

16.【考点提示】介值定理、微分中值定理

【解题分析】由题设，$f(x)$在$[0,3]$上连续，则$f(x)$在$[0,2]$上也必然连续，则在$[0,2]$上$f(x)$必有最大值M和最小值m，因而$m\leqslant f(0)\leqslant M$，$m\leqslant f(1)\leqslant M$，$m\leqslant f(2)\leqslant M$，从而$m\leqslant\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$。

由连续函数的介值定理，知存在一点$\eta\in[0,2]$，使$\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=f(\eta)$。

由已知条件$f(0)+f(1)+f(2)=3$，可推知$f(\eta)=1$，因此$f(\eta)=f(3)=1$，$\eta\in[0,2]$。

由罗尔定理，知存在$\xi\in(\eta,3)\subset[0,3)$，使$f'(\xi)=0$。证毕。

17.【考点提示】格林公式

【解题分析】令$P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\dfrac{x-y}{x^2+y^2}=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$，显然$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$。

令L_r: $x^2+y^2=r^2$，其中$r>0$，L_r在L内，方向取逆时针，由格林公式得

$\oint_{L+L_r^-}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中$D$为$L$与$L_r^-$所围成的平面区域，则

$$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L_r}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

而$$\oint_{L_r}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-r(r\cos\theta+r\sin\theta)\sin\theta-r(r\cos\theta-r\sin\theta)\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=-2\pi$$

所以 $$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-2\pi$$

18.【考点提示】先在等式两边对x求导，消去变限积分，将原方程化为关于未知函数$f(x)$的微分方程，再求解该微分方程。

【解题分析】方程$f(x)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$两边对$x$求导得$f'(x)=3f(x)+2\mathrm{e}^{2x}$，

即$f'(x)-3f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$，令$x=0$，由原方程得$f(0)=1$。

于是，原问题就转化为求微分方程$f'(x)-3f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$满足初始条件$f(0)=1$的特解。

由一阶线性微分方程的通解公式，得

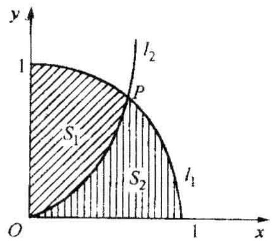
$$f(x)=\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\left(\int 2\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{3x}\left(\int 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$$

代入初始条件$f(0)=1$，得$C=3$，从而$f(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$。

19.【考点提示】先求出曲线l_1与曲线l_2的交点，然后利用定积分求平面图形面积的公式计算出S_1和S_2，由$S_1=S_2$求a的值。

【解题分析】如图，由$\begin{cases}y=1-x^2\\y=ax^2\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 1)$得曲线$l_1$与曲线$l_2$的交点为$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a}\right)$，

所求平面图形面积为



$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}(1 - x^2 - ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1+a}} - \frac{1+a}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} = \frac{2}{3\sqrt{1+a}}$$

$$S_1 + S_2 = \int_0^1(1 + x^2)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

因为 $S_1 = S_2$，所以 $S_1 = \dfrac{2}{3\sqrt{1+a}} = \dfrac{1}{3}$，得 $a = 3$。

20.【考点提示】若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}|$ 对所有 λ 均成立，由此可定出参数 x，y，故其特征多项式相同。

【解题分析】(Ⅰ) 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，故其特征多项式相同，即 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}|$，

$$(\lambda + 2)[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)] = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - y)$$

令 $\lambda = 0$，得 $2(x-2) = 2y$，即 $y = x - 2$，

令 $\lambda = 1$，得 $y = -2$，从而 $x = 0$。

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，

对应于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的共同的特征值 -1、2、-2 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0,\ 2,\ -1)^T,\ \boldsymbol{\xi}_2 = (0,\ 1,\ 1)^T,\ \boldsymbol{\xi}_3 = (1,\ 0,\ -1)^T$$

则可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$。

21.【考点提示】由定义有 $|3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，由此可定出参数 y。考虑到 $\boldsymbol{A}^2$ 为对称矩阵，而 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$，化其对角矩阵方法有两种：转化为对应二次型 $x^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$，通过非退化线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$ 化为标准形，相应求出 $\boldsymbol{P}$；或者求出 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值、单位化，最后构造出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，本题所求 P 不唯一。

【解题分析】(Ⅰ)因为 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)[\lambda^2 - (y+2)\lambda + 2y - 1] = 0$。

当 $\lambda = 3$ 时，代入上式解得 $y = 2$，于是 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$，得 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$，而矩阵 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$。

考虑二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^2x = x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4 = x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2$。

令 $y_1=x_1$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4$，$y_4=x_4$，得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$，

取 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，则有 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{bmatrix}$。

22. **【考点提示】**随机变量的条件概率与概率密度

【解题分析】(Ⅰ)因为 $Z=X+Y$，所以

$$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=0+\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

(Ⅱ)因为 $Z=X+Y$，故随机变量 Z 的分布函数 $F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$。

显然当 $z\geqslant2$ 时，X，Y 的所有取值均满足上式，即 $F(z)=1$；

相反当 $z<-1$ 时，有 $F(z)=0$；而当 $-1\leqslant z<2$ 时，$F(z)=P\{X+Y\leqslant z\}$

$=P\{Y\leqslant z+1\mid X=-1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\mid X=0\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\mid X=1\}P\{X=1\}$

$=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\})$。

当 $-1\leqslant z<0$ 时，$F(z)=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+0+0)=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}1\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(z+1)$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F(z)=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+0)=\frac{1}{3}\left(1+\int_0^z\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{3}(z+1)$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F(z)=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\})$

$$=\frac{1}{3}\left(1+1+\int_0^{z-1}1\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{3}(z+1)\text{。}$$

故可得到随机变量 Z 的分布函数和概率密度分别为

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<-1,\\ \frac{1}{3}(z+1), & -1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant2,\end{cases}\quad f(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2\text{。}\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

23. **【考点提示】**先确定 X 的所有可能取值，然后分别求出每一取值的概率，再按定义求数学期望和方差即可。

【解题分析】设事件 $A_i=\{$部件 i 需要调整$\}$，$i=1,2,3$，则 A_1，A_2，A_3 相互独立，并有 $P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.2$，$P(A_3)=0.3$，由题意知，X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

且 $P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$

$=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504$

$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$=0.1\times(1-0.2)\times(1-0.3)+(1-0.1)\times0.2\times(1-0.3)+(1-0.1)\times(1-0.2)\times0.3$

$=0.398$

$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$

$=0.1\times0.2\times(1-0.3)+0.1\times(1-0.2)\times0.3+(1-0.1)\times0.2\times0.3=0.092$

$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$

即 X 的概率分布

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

因此 X 的数学期望 $E(X)=0\times P\{X=0\}+1\times P\{X=1\}+2\times P\{X=2\}+3\times P\{X=3\}$

$=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$。

又因为 $E(X^2)=0^2\times P\{X=0\}+1^2\times P\{X=1\}+2^2\times P\{X=2\}+3^2\times P\{X=3\}$

$=0\times0.504+1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006=0.82$,

所以 X 的方差 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.82-0.6^2=0.46$。

最后冲刺试卷二

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）。

（A）不可导　　（B）可导但 $f'(x)\neq 0$　　（C）取得极大值　　（D）取得极小值

2. 曲线 $y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有（　　）。

（A）1 条　　（B）2 条　　（C）3 条　　（D）4 条

3. 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$（　　）。

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）收敛性与 α 的取值有关

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有定义，在开区间 $(a,\ b)$ 内可导，则（　　）。

（A）当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f(\xi)=0$

（B）对任何 $\xi\in(a,\ b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

（C）当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f'(\xi)=0$

（D）存在 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

5. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\gamma}_n)$，记向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n$，（Ⅲ）$\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\gamma}_n$，如果向量组（Ⅲ）线性相关，则（　　）。

（A）向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）都线性相关

（B）向量组（Ⅰ）线性相关

（C）向量组（Ⅱ）线性相关

（D）向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）中至少有一个线性相关

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$（　　）。

（A）必有一列元素全为 0

（B）必有两列元素对应成比例

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合

（D）任一列向量是其余列向量的线性组合

7. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,\ 1)$ 和 $N(1,\ 1)$，则下列结论正确的是（　　）。

（A）$P\{X+Y\leqslant 0\}=1/2$　　（B）$P\{X+Y\leqslant 1\}=1/2$

（C）$P\{X-Y\leqslant 0\}=1/2$　　（D）$P\{X-Y\leqslant 1\}=1/2$

8. 设随机变量 $X\sim t(n)\,(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（　　）。

（A）$Y\sim\chi^2(n)$　　（B）$Y\sim\chi^2(n-1)$

（C）$Y\sim F(n,\ 1)$　　（D）$Y\sim F(1,\ n)$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ ________。

10. 方程 $yy''=1+y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的通解为________。

11. 设曲线 L：$y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$，则 $\int_L(x^2+2xy)\,ds=$ ________。

12. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数 $z=z(x,\ y)$ 在点 $(1,\ 0,\ -1)$ 处的微分为 $dz=$ ________。

13. 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & -1\\ -x & -x & -x\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是________。

14. 投掷 n 枚骰子，则出现点数之和的数学期望________。

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 10 分）

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

16.（本题满分 10 分）

已知二元函数 $f(x,\ y)$ 满足 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，作变换 $\begin{cases}x=uv\\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$，且 $f(x,\ y)=g(u,\ v)$，若 $a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，求 a，b。

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（Ⅱ）存在两个不同的点 η，$\zeta\in(0,\ 1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$。

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，$(0,\ 1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,dx=f(0)$，证明在 $(0,\ 1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$。

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上满足 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，$|f'(x)|\leqslant q<1$，令 $u_n=f(u_{n-1})$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，$u_0\in[a,\ b]$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛。