三角之部

日本遠藤又藏著

上海羣益書社出版

分發行所　長沙府正街　羣益圖書公司

總發行所　上海棋盤街　羣益書社

印刷所　羣益書社

譯者　黃邦柱
　　　王應偉

著者　日本　遠藤又藏

民國貳年四月二十日初版

三角之部

定價大洋六角

公式一覧

$$\begin{cases} \sin A\,\mathrm{cosec}\,A = 1. \\ \cos A \sec A = 1. \\ \tan A \cot A = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2 A + \cos^2 A = 1. \\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A. \\ 1 + \cot^2 A = \mathrm{cosec}^2 A. \end{cases}$$

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\mathrm{cosec}A$
$\sin A = x$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos A = x$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan A = x$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
$\cot A = x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$	x	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$
$\sec A = x$	$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{cosec}A = x$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

	$-A$	$90^\circ-A$	$90^\circ+A$	$180^\circ-A$	$180^\circ+A$	$n.360^\circ\pm A$
$\sin$	$-\sin A$	$\cos A$	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$\pm\sin A$
$\cos$	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$\cos A$
$\tan$	$-\tan A$	$\cot A$	$\cot A$	$-\tan A$	$\tan A$	$\pm\tan A$
$\cot$	$-\cot A$	$\tan A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$\cot A$	$\pm\cot A$
$\sec$	$\sec A$	$\mathrm{cosec}A$	$\mathrm{cosec}A$	$-\sec A$	$-\sec A$	$\sec A$
cosec	$-\mathrm{cosec}A$	$\sec A$	$\sec A$	$\mathrm{cosec}A$	$-\mathrm{cosec}A$	$\pm\mathrm{cosec}A$

$$\begin{cases} \sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A \sin B. \\ \cos(A\pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B. \\ \tan(A\pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\ \cot(A\pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B \\ \qquad = \cos^2 B - \cos^2 A. \\ \cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ \qquad = \cos^2 B - \sin^2 A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta+\gamma) = \Sigma \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \Pi\sin\alpha. \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) = \Pi\cos\alpha - \Sigma\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma. \\ \tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\Sigma\tan\alpha - \Pi\tan\alpha}{1 - \Sigma\tan\alpha\tan\beta}. \\ \cot(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\Pi\cot\alpha - \Sigma\cot\alpha}{\Sigma\cot\alpha\cot\beta - 1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B). \\ 2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B). \\ 2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B). \\ 2\sin A \sin B = -\cos(A+B) + \cos(A-B). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}. \\ \sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}. \\ \cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}. \\ \cos C - \cos D = -2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \qquad = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}. \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ \qquad = 2\cos^2 A - 1 \\ \qquad = 1 - 2\sin^2 A \\ \qquad = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}. \\ \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}. \\ \cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 A = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2A). \\ \cos^2 A = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2A). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}. \\ \cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}. \\ \tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}. \\ \cot\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A} \\ \qquad = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}. \\ \cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A} \\ \qquad = \dfrac{\sin A}{1-\cos A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A. \\ \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A. \\ \tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}. \\ \cot 3A = \dfrac{3\cot A - \cot^3 A}{1 - 3\cot^2 A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^3 A = \dfrac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A). \\ \cos^3 A = \dfrac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A). \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B. \\ b = c\cos A + a\cos C. \\ c = a\cos B + b\cos A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B. \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}. \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2}bc\sin A \\ \quad = \dfrac{1}{2}ca\sin B \\ \quad = \dfrac{1}{2}ab\sin C \\ \quad = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\ r' = \dfrac{S}{p-a}. \\ r'' = \dfrac{S}{p-b}. \\ r''' = \dfrac{S}{p-c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}. \\ \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{p-b}. \\ \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b-c} = \dfrac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}. \\ \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{\cos\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}}. \\ \dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Sin}^{-1}a = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}a. \\ \mathrm{Cos}^{-1}a = 2n\pi \pm \cos^{-1}a. \\ \mathrm{Tan}^{-1}a = n\pi + \tan^{-1}a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Sin}^{-1}1 \quad = (4n+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{Sin}^{-1}(-1) = (4n-1)\dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{Cos}^{-1}0 \quad = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}. \\ \mathrm{Cos}^{-1}(-1) = (2n+1)\pi. \end{cases}$$

平面三角法教科書

第一編

銳角

第一章

測角法

(1) 三角法之定義

三角法爲研究三角函數(亦稱圓函數)之學科研究此等學科之性質及應用。其區域分爲二部分 (甲)平面三角法。(乙)球面三角法。但本書所論專係平面三角法一部分。

(2) 六十分法

應用于實地計算。其一般之測角法如次。

一直角之九十分之一。謂之一度。一度之六十分之一。謂之一分。一分之六十分之一。謂之一秒。用度分秒爲單位。以測角之大小。其測角法稱之爲六十分法。通例 d 度

m分s秒之角。用記號$d^{\circ}\,m'\,s''$表之。

(注意)　用秒為單位以測角。實際上嫌其過小。甚覺不便。故測比分更小之角。用分之小數表之。最為適當。(通常之例用小數一位已足)教科書中有用秒以測角者。唯從其習慣而已。

(3)　角單位之轉換

凡任意一角。用直角單位計算。或用六十分法計算。二者之中。知其一即可求得他一值。其方法如次。

第一　任何之角。用其角單位計算。所得之值。以90乘之。則得度數。其度之分數。以六十乘之。則得分數。其分之分數。以六十乘之。則得秒數。然後將所得數。用度分秒記號連記之。即化為六十分法。

例

(1)　試將$\frac{45}{64}$直角用六十分法表之

運算

$$\frac{45}{64}\text{直角}=\left(\frac{45}{64}\times 90\right)\text{度}=63\frac{9}{32}\text{度}$$

$$\frac{9}{32}\text{度}=\left(\frac{9}{32}\times 60\right)\text{分}=16\frac{7}{8}\text{分}$$

$$\frac{7}{8}\text{分}=\left(\frac{7}{8}\times 60\right)\text{秒}=52{,}5\text{秒}$$

答

$63^\circ\ 16'\ 52''.5.$

(2) 0.7875直角試以六十分法表之

運算

0.07875 直角

$\underline{\quad\quad 90}$ 度

$\underline{7}.0875$

$\underline{\quad\quad 60}$ 分

$\underline{5}.25$

$\underline{\quad 60}$ 秒

15

答 $7^\circ\ 5'\ 15''$

第二 用六十分法計算所得之值。改用直角單位計算。其公式如次

$$d^\circ m' s' = \left(\frac{d}{90} + \frac{m}{90\times60} + \frac{s}{90\times60\times60}\right)\text{直角}$$

例

問 $8^\circ\ 15'\ 27''$ 等于幾直角

運算

$$8^\circ\ 15'\ 27'' = \left(\frac{8}{90} + \frac{15}{90\times60} + \frac{27}{90\times60\times60}\right)\text{直角}$$

$$= \left(\frac{8}{90} + \frac{1}{90\times4} + \frac{3}{90+20\times20}\right)\text{直角}$$

$$= \frac{3200+100+3}{90\times400} = \text{直角}\frac{3303}{36000}\text{直角}$$

$$=\frac{367}{4000}\text{直角}=0.09175\text{直角}$$

或如次之運算亦可

$$\begin{array}{r|l}
60 & 27\ \text{秒} \\
60 & 15.45\ \text{分} \\
 & 8.2575\ \text{度} \\
 & 0.09175\ \text{直角}
\end{array}$$

設題一

(1)　試將下列諸角。以六十分法表之

$\frac{11}{16}$直角,　0.678直角　$0.024\dot{1}$直角

(2)　試將下列諸角之值。以直角單位改算之

$49^\circ 27'.8$, $32''.4$, $11^\circ 15'$, $8^\circ 0' 36''$, $45' 5''.4$, $61^\circ 52' 30''$

(3)　用某角爲單位。以測15°及0.2直角之角。其所得値之和爲$0.7\dot{3}$。試求某角之度數。

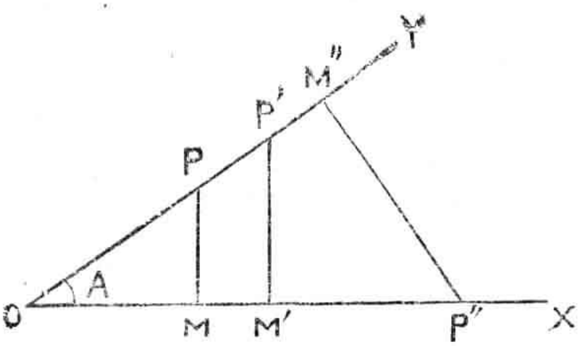
(4)　三角形之三角爲等差級數。以秒單位測最小角所得之數。適等于用分單位測最大角所得數之四倍。試將此三角。用六十分法表之。

第二章

銳角之三角函數

(4) 定義

如圖A爲任意之銳角。OX, OY 爲夾A角之兩邊。今於



OY上取任意一點P。由P引垂線於他邊OX。其垂線之足爲M。則成一直角三角形 OPM。OP爲關於A角之斜邊。MP 爲垂線。OM爲底邊。次所列六個比。總稱之爲三角函數。(亦稱圓函數)

第一 $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ 即 $\frac{OM}{OP}$ 稱之爲A角之正弦。以 $sinA$ 之記號表之

第二 $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ 即 $\frac{OM}{OP}$ 稱之爲A角之餘弦。以 $cosA$ 之記號表之

第三 $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ 即 $\frac{PM}{OM}$ 稱之爲A角之正切。以 $tanA$ (或 tgA) 之記號表之

第四 $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ 即 $\frac{OM}{PM}$ 稱之爲A角餘切。以 $cotA$ 之記號

表之

第五 $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$即$\frac{OP}{MP}$稱之爲A角之正割。以$sec A$之記號表之

第六 $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$即$\frac{OP}{MP}$稱之爲A角之餘割。以$cosec A$之記號表之

(注意一) 正弦,正切,正割,與餘弦,餘切,餘割。相互爲餘函數

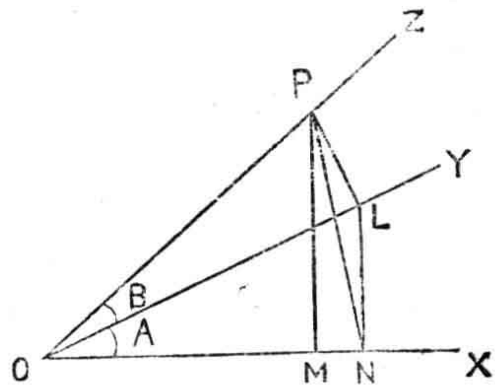
(注意二) OY上任意取他點P′。及OX上任意取他點P″。用同方法。引垂線P′M′,P″M″,則三角形OP′M′,OP″M″皆與三角形OPM成相似形。依相似形之理。相似形之各對應邊之比總相等。故A角若一定。則各三角函數之值亦一定。

(5) 關于記法之注意

第一 $sin A$等爲關于A所用比之記號。其sin與A萬不可分離書之。例如$sin A+sin B$用以表A之正弦與B之正弦之和。$sin(A+B)$用以表A與B和之正弦。二者之值自然不相等。

今如圖$X\hat{O}Y=A$, $Y\hat{O}Z=B$, OZ上取任意一點P。由P引

二垂線PL, PM於OY,OX。其垂線之足爲L,M。更由L引垂線LN於OX。其垂線之足爲N。然則次之關係式成立也明矣。



$$\sin A=\frac{LN}{OL}>\frac{NL}{OP}$$

$$\sin B=\frac{LP}{OP}$$

$$\therefore\quad \sin A+\sin B>\frac{NL+LP}{OP}>\frac{PN}{OP}>\frac{MP}{OP}$$

即 $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$

第二 若 n 爲正整數時三角函數之 n 乘方。常附指數 n 于函數記號之右肩上以表之。(因計算上之便宜也)例如 $(\sin A)^3$ $(\cos A)^2$ 等。常以 $\sin^3 A$ $\cos^2 A$ 表之

設題二

(5) 直角三角之三邊爲三寸,四寸,五寸。試求其最小角之正弦,餘弦,正切。

(6) 直角三角形夾直角二邊之數値。爲 28, 45。試求其大銳角之正弦。

(7) 三角形之三邊之比爲 33 : 56 : 65。試求其最小角之餘切,正割,餘割。

(8) ABC為三角形。D為AB之中點。若CD⊥AC。則$A\hat{C}B$補角之正切等于A角正切之二倍。試證明之。

(6) 三角函數相互之關係

次所舉各式于三角函數為最重要之關係。

第一 二重關係

$$sinA\,coscecA=\frac{垂}{斜}\cdot\frac{斜}{垂}=2\cdots\cdots(1)$$

$$cosA\,secA=\frac{底}{斜}\cdot\frac{斜}{底}=1\cdots\cdots(2)$$

$$tanA\,cotA=\frac{垂}{底}\cdot\frac{底}{垂}=1\cdots\cdots(3)$$

第二 三重關係

$$tanA=\frac{垂}{底}=\frac{垂}{斜}\div\frac{底}{斜}=\frac{sinA}{cosA}\cdots\cdots(4)$$

$$cotA=\frac{底}{垂}=\frac{底}{斜}\div\frac{垂}{斜}=\frac{cosA}{sinA}\cdots\cdots(5)$$

第三 平方關係

$$sin^2A+cos^2A=\left(\frac{垂}{斜}\right)^2+\left(\frac{底}{斜}\right)^2=\frac{(斜)^2}{(斜)}=1\cdots\cdots(6)$$

$$1+tan^2A=1+\left(\frac{垂}{底}\right)^2=\left(\frac{斜}{底}\right)^2=sec^2A\cdots\cdots(7)$$

$$1+cot^2A=1+\left(\frac{底}{垂}\right)^2=\left(\frac{斜}{垂}\right)^2=cosec^2A\cdots\cdots(8)$$

(7) 恆等式之證明法

由前節之關係。含三角函數之種々恆等式。得以證明。

其最要之方法。則有次二種。

第一　從左邊證明與右邊相等之法。

例

試證次式　$tan^2 A cos^2 A + cot^2 A sin^2 A = \text{I}$

證

左邊 $= \dfrac{sin^2 A}{cos^2 A} cos^2 A + \dfrac{cos^2 A}{sin^2 A} sin^2 A = sin^2 A cos^2 A$

$= \text{I}$

第二　由既知之關係證明本式恒等之法

例

試證次式　$\dfrac{cosecA - secA}{cotA + tanA} = \dfrac{cotA - tanA}{cosecA + secA}$

證

$cose^2 A = \text{I} + cot^2 A$

$sec^2 A = \text{I} + tan^2 A$

$\therefore \quad cosec^2 A - sec^2 A = cot^2 A - tan^2 A$

$\therefore \quad (cosecA + secA)(cosecA - secA) = (cotA - tanA)\ cotA + tanA)$

$\therefore \quad \dfrac{cosecA - secA}{cotA + tanA} = \dfrac{cotA - tanA}{cosecA + secA}$

(注意)　恒等式之證明法上二法外。尚有變化右邊。使與左邊相等法。同時將左右兩邊變化。使成同一之形法。

以及求恒等式成立之充分條件法。然總以用上二法最爲便利。

設題三

試證次之諸恒等式

*(9) $\tan^2 A - \sin A = \tan^2 A \sin^2 A$

*(10) $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$

*(11) $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$

此三式均屬平方關係

*(12) $\operatorname{cosec} A - \sin A = \cot A \cos A$

*(13) $\sec A - \cos A = \tan A \sin A$

*(14) $\cot A + \tan A = \sec A \operatorname{cosec} A$

此三式稱爲四重關係

(附星標之題均係重要者以下倣此)

(15) $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$

(16) $(1 + \sin A)^2 + (1 + \cos A)^2 = 3 + 2(\sin A + \cos A)$

(17) $\sin^3 A + \cos^3 A = (\sin A + \cos A)(1 - \sin A \cos A)$

(18) $(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A)$

(19) $\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A = \tan A + \cot A$

(20) $(\tan A \sec A)^2 = \dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}$

(21) $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=(\sec A+\operatorname{cosec} A)$

(22) $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\operatorname{cosec} A)^2=(1+\sec A\operatorname{cosec} A)^2$

(23) $2(\sin^6 A+\cos^6 A)-3(\sin^4+\cos^4 A)+1=0$

(24) $\sec A+\tan A=\dfrac{1}{\sec A-\tan A}$

(25) $\sec^4 A+\tan^4 A=1+2\sec^2 A\tan^2 A$

(26) $\operatorname{cosec}^6 A-\cot^6 A=1+3\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$

(27) $(1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2$

(28) $1+\operatorname{cosec}^4 A-\cot^4 A=2\operatorname{cosec}^2 A$

(29) $(1-\tan^4 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1$

(30) $(\cos^2 A+\cot^2 A)\tan^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A$

(31) 若 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ 則 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$ 試證明之

(32) 試由次二式將 θ 消去之

$a\sin\theta+b\cos\theta=c \quad a'\sin\theta+b'\cos\theta=c'$

略解　先由此二式求 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之值再應用公式6則得所求之結果

(8) 以一種三角函數之值。表他種三角函數之方法

無論何角。有六種之三角函數。其六者之中.得任以其

一表他五種之三角函數其法有次二種。

第一　由六節第三任意取一含有平方關係之等式稍々變化之。即得以一函數代表他一函數之關係式。然後再應用公式一至五。遞得以此一函數代表其餘四種函數之關係式。

例

(1)　求以$sin A$表他種之三角函數

解

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\therefore\quad \cos A=\sqrt{1-\sin A}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos E}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$$

(2)　求以$cot A$表他種三角函數

解

$$1+\cot^2 A=\cos^2 A$$

$$\therefore\quad \operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}$$

$$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$$

$$\cos A=\cot A\sin A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$$

$$\tan A=\frac{1}{\cot A}$$

依同理若用餘弦表他種三角函數。則用公式(6)。以正割,或正切表他種三角函數。則用公式(7)。以餘割表他種三角函數則用公式(8)。即可。

第二　由4節定義任一種之三角函數。均得以直角三角形之兩邊。作一分數式表之。今若設想其分數之分母爲一。則分子之値即爲此函數之値也明甚。由是直角三角形中一邊之長既假定爲一則第二邊之長。爲代表既知三角函數之値。故由*Pythagoras*之定理。得以求第三邊依定義得以此一函數代表他種之三角函數

例

求以$\sec E$表他諸種三角函數

解

如I圖 $\sec A=\frac{斜邊}{底邊}$ 若令底邊$=1$則斜邊$=\sec A$