数学教学

SHU XUE JIAO XUE

1979 1

数学教学

目录

1
1979

复刊献词

苏步青

我们数学工作者，热烈欢呼《数学教学》的复刊，希望大家努力办好这个刊物，把《数学教学》办成能为提高中学数学教学的质量、促进中学数学教学的重要园地。

实现四个现代化，关键是科学技术现代化，基础在教育。数学是自然科学基础学科之一，它渗透到各门科学技术领域，起着推动作用。比方说，电子计算机的建成和发展，就是和数学分不开的。反过来，科学技术的发展，也对数学提出了各种理论要求，使数学本身得到发展，数理逻辑就是这样发展起来的。所以，我们可以这样说：数学不现代化，科学技术现代化会变成空话。数学要现代化，必须搞好数学教学，使青年养成爱数学，学数学，用数学的良好风尚，为造就一支宏大的又红又专的科技队伍，为科学技术现代化打下坚实的基础。

过去，许多青年同学把数学看成非常难学的学科，好象没有天才的头脑就不可能学会。为什么会出现这种情况呢？原因之一就在于教学：教师教不好，学生听不懂，数学终于成为许多人厌恶的东西。拿我自己青年时代来说吧，一九一五年进旧制（四年制）中学，我曾经立志将来当历史学家，因为我熟读了《左传》。第二年，中学来了一位新校长，他教我们班的平面几何，讲得通俗易懂，深入浅出，使我感到数学并不是难学的，比起《左传》来要容易得多。就这样，我放弃了要在四年内读完《资治通鉴》的计划，对数学、物理学等课程发生了兴趣。

前几年，"四人帮"破坏四个现代化，鼓吹"读书无用论"，千方百计搞垮数学教学。他们以联系实际为幌子，对中学数学教材进行破坏，什么数学的基本概念呀，什么定理呀，一概都不要，他们胡说什么：定理嘛，看看是对的就行啦，无须证明。结果，使广大青少年学不到起码的数学知识，进了大学以后，连$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div 4$这样一个算题都被认为是不可思议的。说起来并不奇怪，祸国殃民的"四人帮"连生产都不要，还要什么数学。

我们必须高举毛泽东思想的伟大旗帜，深入揭批"四人帮"在数学教学问题上犯下的罪行，从理论上拨乱反正，清除他们的流毒，办好《数学教学》，在继续长征的路上迈出新的步伐，为实现新时期的总任务作出新的贡献。

预祝复刊后的《数学教学》不断前进，越办越好！

哥德巴赫猜想

若　书

1、2、3、4、5、…这些自然数是我们最熟悉的，同时也是使用最多的数。但是，它有许许多多神秘的性质，到现在还没有被人们认识。在“数论”这门学科中，同样充满了无数没有解决的问题和各式各样的猜想。几千年来，特别是近一、二百年，好些数学家绞尽脑汁，利用各种方法（初等方法、代数方法、代数几何方法、解析方法也叫超越方法等等），取得了不少进展，但是，有几个顽固堡垒始终攻不下来。比如说，有三百多年历史的费马大定理，有二百多年历史的哥德巴赫猜想，以及孪生素数问题等，就是其中几个著名的例子。

“皇冠上的明珠”

哥德巴赫是德国数学家，他喜欢研究数字的规律。他发现：把偶数拆成两个奇数的和时，其中至少有一组是两个奇素数，而把一个奇数拆成三个奇数的和时，其中至少有一组是三个都是奇素数。例如：

(1) $6=3+3$,

$10=3+7=5+5$,

$12=3+9=5+7$,

$16=3+13=5+11=7+9$;

(2) $31=3+11+17=5+11+15$

$=7+9+15$,

$45=5+17+23=13+15+17$

$=7+13+25=9+15+21$

$=15+15+15$。

他对列在最前面的一些自然数逐一验算，发现都具有这种规律。可是，当数目一大，分拆成的组数越来越多，验算也就麻烦了。究竟这是一条普遍的规律，还是有例外？他没有把握。于是，他写信（1742 年）去请教当时首屈一指的数学家欧拉。他问欧拉：是不是每个偶数都是两个素数的和，每个奇数都是三个素数的和？欧拉给他的回信中说：他验算到 100 多，发现是对的。他也相信这是对的，但是不能给出一般的证明。

其实，解析几何的创始者笛卡儿，早在一百多年前就已说过：任何偶数是一个素数或两个素数或三个素数的和。只是他说得不确切，要去掉“偶”字才更全面。后来，到 1770 年，华林首次把这个问题以猜想的形式写在书中，并公诸于世。不过，当时都把 1 当成素数，所以问题提得含糊。

现在，“哥德巴赫猜想”的标准提法是：

(1) 每个 $\geqq 6$ 的偶数都可表成两个奇素数的和；

(2) 每个 $\geqq 9$ 的奇数都可表成三个奇素数的和。

容易看出，后一命题是前一命题的推论。事实上，如果(1)成立，设 N 是一个 $\geqq 9$ 的奇数，那末 $N-3$ 就是一个 $\geqq 6$ 的偶数。根据(1)，$N-3=p_1+p_2$（其中 p_1、p_2 是奇素数），因此 $N=p_1+p_2+3$ 是三个奇素数的和，命题(2)成立。

从那时起，许多数学家都去攻这个问题。一种是正面攻，看看一个偶数表示成两个奇素数和，一个奇数表示成三个奇素数和，各有几种表示法。只要表示法的数目都大于 0，问题就解决了。可是没有取得成功，他们的公式往往是错的，而且也不是证出来的。另一种是反面攻，看看当数目大时，是不是会出现例外情形，这也没有成功。不管走哪条路，都要通过成年累月地计算来进行验证。但是自然数无穷，而人

生有限，要在有限的步骤中解决无穷个数的问题，单是计算，即使使用最高速度的电子计算机也不行。这就要求给出数学的证明，“用有限吃掉无穷”。显然，要圆满地解决这个问题，是十分艰难的，无怪人们称它为：“皇冠上的明珠”。

难在哪里？

过去和现在，都有那么些自称解决了“哥德巴赫猜想”的人，企图用原始办法——数学归纳法、初等概率法等等，去“证明”哥德巴赫猜想，而实际上，他们却还没有弄懂问题难在哪里！

问题难在哪里呢？虽然，在古代就已证明了素数有无穷多个，从原则上允许“猜想”是可以证明的。但是：首先是因为素数太稀，越来越稀；其次，更主要的是素数分布不规则（虽然数目很大很大时，在整体上有些规律——满足素数定理，但在每个局部却有误差）。

先说第一点，在一个局部内的素数究竟有多少？用大家所熟悉的筛法：把自然数从1开始依次排列起来，然后把1划掉，得2是素数；留下2，把以后所有2的倍数划掉，得3是素数；留下3，把以后所有3的倍数划掉，得5是素数，……这样延续下去，可以把从2开始的素数逐个“筛”出来。结果，我们可以发现，100以内有25个素数，占总数$\frac{1}{4}$；1000以内有168个素数，约占总数$\frac{1}{6}$；10,000以内有1229个素数，占总数不到$\frac{1}{8}$。再下去，100,000以内的素数就不到总数的$\frac{1}{10}$，而100亿以内的素数就不到总数的$\frac{1}{20}$了。可见数目越大，素数越来越稀。还可以证明：数目相当大以后，连续100个数目里一个素数也没有；再大，连续1000个数目里一个素数也没有；再大，连续10,000个，100,000个，…数目里也会一个素数也没有。于是，你就可以想象，那时素数是多么罕见呵！

如果素数均匀地少下去，有规律，那也好处理。但是，事实并不如此。素数的分布很不均匀，有的地方少下去了，而有的地方却又会突然多起来了。例如，从1到100，这100个数目中有25个素数；从101到200，这100个数目中只有21个素数，似乎是少下去了；但是，从4101到4200，这100个数目中只有9个素数，而从4201到4300，这100个数目中，却又突然猛增为有16个素数。这种振荡，非常激烈。比如，从10,000,001到10,000,100，这100个数目中只有2个素数，而它前面的100个数目中，素数却有9个之多，竟与4000到5000时素数的“密度”相仿佛。

素数一稀二乱，难怪在把一个偶数拆成和数时，不易碰上素数。这一次碰上了，下一次却不一定碰上。例如，把98拆成和数时，尽管它处在素数最稠密的地方，也才碰上了3次：

$$98=19+79=31+67=37+61。$$

到稀的地方，说不定真会碰不上。要想个个保险，看来决非采用简单办法所能奏效。这就是为什么长期以来解决哥德巴赫猜想进展不大的原因。

取得突破

哥德巴赫猜想，十八世纪最高明的数学家欧拉解决不了，到了十九世纪，虽然围绕费马大定理，代数数论有了很大进展，但对于涉及这类素数的问题，仍旧毫无进展，以至现代解析数论的奠基者之一朗道在1912年召开的国际数学家大会上讲：这个问题“在当前的科学水平之下是攻不动的”。

“工欲善其事，必先利其器”。没有方法上的改进，要想取得突破是根本不可能的。十八世纪到十九世纪，数学分析有了极大的发展，成为数学中的带头学科，它能够很好地处理无穷大、无穷小，能够作精细的估计和巧妙的运算。十九世纪中叶，狄利克雷和黎曼，对“数论”和“分析”的结合，作出了有效的贡献，从而促成了分析方法在数论上的应用。

1921年英国数学家哈代（1877～1947）和李特渥德（1885～1977）密切合作，运用分析方法，

对哥德巴赫问题取得了第一个突破。他们证明：在(弱型)广义黎曼猜想成立的前提下，每个大奇数都可表为三个奇素数的和，并且导出表法的渐近公式。他们写道："我们借助于堆垒数论中新的超越方法来攻这个问题，我们没有解决它。甚至于我们也没能证明任何数是1,000,000个素数之和。……然而，我们证明了这个问题不是'攻不动的'，……"。他们虽然没有作出什么具体结果，但是他们创造的"圆法"，在数论中发挥了巨大的作用，推进了许多问题的解决，而且给哥德巴赫猜想的下一个突破创造了条件。

1937年，维诺格拉朵夫在"圆法"的基础上，利用他所创造的"三角和方法"，去掉了那个前提，证明任何大奇数，都可表示为三个素数的和。后来，有人用别的分析方法，也"无前提"地证明了这个结果。这些大奇数究竟有多大？大得不得了，是比1后面带上几十万个零还要大的数！不过，剩下的数总是有限的，原则上总是可以一一加以验证的，只是因为其中一些数比人类已知的最大素数还大，所以暂时还对付不了这么大的数。尽管如此，最难的无限的那一部分已经吃掉了，这是了不起的胜利。

退一步想

经验证明：要想完全彻底解决哥德巴赫猜想，一步登天是不可能的。于是，就要寻找各种途径，一步一步地接近顶峰。

如图1，我们把全部自然数看成一把无限长的梳子，每个齿代表一个自然数，一端是1。然后，象通常所说的"筛法"一样，把所代表的不是素数的齿折断。于是，剩下的就是一把缺齿缺得很多的梳子，它的每一个齿都代表一个素数。把两把这样的梳子反方向对起来，如果上齿和下齿在一个地方能够对起来，就说明某个自然数 $2N$ 可以表示为两个素数的和；把两把梳子错2格再对起来，就是 $2N+2$ 的表示法。这样，从头 $(2N=6)$ 开始，如果每错2格，都有上下齿能够对得上，那就意味着哥德巴赫猜想是对的。

因为素数越来越稀，齿越来越少，上下齿对上的机会不一定很多。并且，这一次能对上，错2格后就不一定能对上。是否一定有其他齿对得上，那就没有把握了。针对这种情况，我们退一步想，采取加梳子的办法。对于同一个偶数，

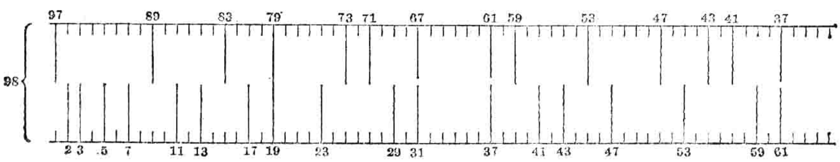

图 1

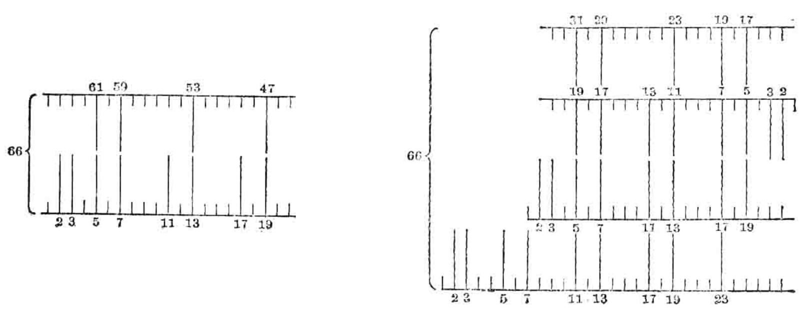

图 2

不管两个、四个、六个、…梳子的齿只要能对上就行。这样，梳子越多，对上的机会也就越多。如果可以证明，当梳子的把数加到一定的程度 r 时，每个偶数都有被对上的机会，那么虽然没有能证明原来的哥德巴赫猜想，但也证明了较差一些的结果："任何 $\geqq 6$ 的偶数都可表示为不超过 r 个素数的和"。

1930 年，青年数学家史尼列尔曼创造了"密率法"，证明了上述结果，并且定出来 $r \leqq 800,000$。在五十年前，这个结果是了不起的贡献，更重要的是，他所创造的密率法，在数论和其他数学分支获得许多应用，并把问题从无穷改到有限。留下的问题，就是一步一步减少这个 r。如果能把 r 减少到 2，那么哥德巴赫猜想也就得到了证明。经过许多数学家的努力，到 1975 年，这个 r 已经降到 26，也就是说，所有 $\geqq 6$ 的偶数可以表示为最多不超过 26 个素数之和。而稍晚一些，有人应用密率法和筛法，也已证明了大偶数可以表示为最多是 6 个素数的和。也许你会问：$r=26$ 这一结果有什么了不起，前面维诺格拉朵夫的结果不是可以推出 $r=4$ 吗？应该看到：在那里是对充分大的偶数，这里却是对所有偶数；那里用的是高深的分析方法，这里用的是初等方法，当然初等方法并不一定好懂。

另一条道路是从反方面来考虑。假设对有些偶数 $2N$ 哥德巴赫猜想不成立，这种偶数我们叫作例外偶数，并设 $E(X)$ 是小于 X 的例外偶数的个数。我们想知道 $E(X)$ 究竟有多少。如果能证明当 X 相当大时，$E(X)$ 与 X 无关，也就是从某个 $2N_0$ 起没有例外偶数，那么就说明除去这有限个例外偶数，任何大偶数都可以表示为两个奇素数之和，哥德巴赫猜想也就算基本上得到证明。如果进一步再能证明，$E(X)=2$，即仅有 2、4 这两个例外偶数，那末问题就完全彻底地得到了解决。但是，实际情况距离这个目标还很远。直到 1975 年，才有人证明存在正数 C 和 δ，使 $E(X) \leqslant CX^{1-\delta}$。也就是说，在小于 X 的所有偶数中，$E(X)$ 的数目相当小；当 X 充分大时，相对 X 而言，简直是微乎其微；但是，还不能得到结论说越来越少，因为这个公式并不排除随 X 增加，例外偶数也跟着增加，因此结果并不理想。它只是告诉我们例外偶数并不太多，使我们较有信心地去攻这个堡垒。

对于这种把偶数拆成两个数的问题，还可以通过另一条途径来攻。这种想法是：仍旧用两把梳子，梳子齿太稀，可以添加一些"义齿"（也就是假牙）使它密一些，那么对上的机会就多得多了。这样，我们把偶数表示成两个数的和，每个数的素因子不超过一定的数目。如果能够说明每一个偶数都能表示为一个不超过 a 个素因子的数和一个不超过 b 个素因子的数的和，我们就说 $(a+b)$ 成立。哥德巴赫猜想也就是要证 $(1+1)$。拿梳子打比方，就是说，在一把梳子上把代表 2–合数，3–合数，…，a–合数的齿都加上去，另一把梳子把代表 2–合数，3–合数，…，b–合数的齿都加上去（这里所说的 a–合数或 b–合数，是指有 a 个或 b 个质因子的合数）而有 $(a+b)$ 成立，也就是说，对每个偶数 $2N$ 都有上下齿对得上。用这个方法，首先取得重大突破的是布朗，他改进了那个原始的筛法，创造了所谓"布朗筛法"，在 1920 年，得到了 $(9+9)$ 的结果。后来，别人又陆续证明了 $(7+7)$，(1924 年)；$(6+6)$，(1932 年)；$(5+5)$，(1938 年) 和 $(4+4)$，(1940 年)。1947 年，赛尔贝尔格独出心裁，创造了"赛尔贝尔格筛法"，比"布朗筛法"更能定量，结果也更好，是一个强有力的工具。他曾宣布，用他的方法可以作到 $(2+3)$，但是并没有给出详细的证明。

1941 年，林尼克发明"大筛法"，自己只用了一次，就没有再管它。1948 年，瑞尼把大筛法加以精密化，首先得出 $(1+C)$，C 是某一个大的数目，把其中一个因子变成了素数，大大接近了原来的哥德巴赫猜想。1965 年，罗斯，特别是朋比利，大大改进大筛法，得出了著名的大筛法不等式。这位年青的意大利数学家是位当代数学界的多面手，在数论、代数几何、微分几何、函数论、偏微分方程等领域，都作出过杰出的贡献，但他没有去作顺手可得的 $(1+3)$ 记

录。

1966年，陈景润宣布了(1+2)，1973年全文发表，他用了赛尔贝尔格筛法、大筛法不等式以及复杂的解析工具，并通过大量的计算，创造了世界纪录。王元、潘承洞也曾经是世界纪录的保持者。1956年，王元证明了(3+4)；1957年，王元又证明了(2+3)；1962年，潘承洞证明了(1+5)；1963年，潘承洞、王元又都证明了(1+4)。我国数学家在这方面的贡献引起了国际上的重视，为我国争得了国际荣誉。

一 步 之 遥

(1+2)和(1+1)看来只有一步之遥，但是登上这陡峭的峻峰决非轻而易举的事。要想从(1+2)作到(1+1)，就必须把(1, 2)或(2, 1)的情形全都筛掉。从下面的表可以看到：98表示为两素数之和，也就是(1, 1)只有3组，而表为1-素数和2-合数，也就是(1, 2)或(2, 1)，却有13组之多。这是因为，2-合数比素数要多得多。

98=1+97 (0, 1)
=3+95 (1, 2)
=5+93 (1, 2)
=7+91 (1, 2)
=9+89 (2, 1)
=11+87 (1, 2)
=13+85 (1, 2)
=15+83 (2, 1)
=17+81 (1, 4)
=19+79 (1, 1)
=21+77 (2, 2)
=23+75 (1, 3)
=25+73 (2, 1)
=27+71 (3, 1)
=29+69 (1, 2)
=31+67 (1, 1)
=33+65 (2, 2)
=35+63 (2, 3)
=37+61 (1, 1)
=39+59 (2, 1)
=41+57 (1, 2)
=43+55 (1, 2)
=45+53 (3, 1)
=47+51 (1, 2)
=49+49 (2, 2)

一般情形也是这样。怎么办？要有新方法！正如哥德巴赫猜想的历史发展所显示的那样，任何重大突破都有方法上的重要创造。方法的好坏，要看应用范围的广泛性，同时也要看所得结果的深刻性。这两方面往往相辅相成，构成新的理论分支。密率方法、筛法、圆法以及三角和的估计，都已成为数论中独立小分支。有时，其他数学分支的方法也会有用，象代数几何方法所得的某些结果，都大大超过其他方法。当然，它也不能包打天下。对于具体问题，还要具体分析，看用什么方法最有效。

胜利在望，顶峰属于那些不畏险阻，敢于登攀，勇于创新的人们！

函数的两种定义

呈　　禾

目前的一般数学教材中，函数的定义还是采用“y是x的函数”的方式，把函数理解为一个变量。应该指出，这还是十八、十九世纪的观点。那时，集合的概念还没有在数学中生根，因此只能突出意义含混的变量，作为数学分析中的基本概念。可是，十九世纪后期集合论创立以后，形势就大大改观了。集合论的语言和工具，渗透到所有数学各分支之中，逐渐成为它们共同的基础。这时，作为数学中最基本的概念之一——“函数”，已把基础直接建立在集合上面，即把函数看作是从一个集合到另一个集合的对应，它和“映射”实际上是一回事。在现代的高等数学教材中，函数定义已更多地采用了这个观点。

我们现在把函数的两种定义方式作一比较，并给予一些评价。

旧的定义方式：设x和y是两个变量，如果按照某一确定的对应关系（或规律），当变量x每取一确定的值时，变量y总有一确定的值和它对应，那末变量y就叫做变量x的函数。

新的定义方式：设D和E是两个集合，如果按照某一确定的对应关系，对于集合D中每一确定的元素x，总有集合E中一个确定的元素y和它对应，那末这个对应关系就叫做一个函数。

在这里，故意略去了所有次要的有关术语和记法，以便突出中心内容。

比较两种定义方式，可以看到第一个重要区别在于：旧定义是建立在“变量”这个基本概念上的，而新定义则建立在“集合”这个基本概念上。什么是变量呢？当然它首先须是一个量，但量又是什么呢？通常把它理解为在选定一个单位以后，可加以度量的东西，如长度、质量、时间之类。这种理解一方面太流于笼统，只能通过举例来说明，而难于加以精确化（正因为如此，“量”这个词在数学中是不大多见的）；另一方面，由于涉及大小关系，嫌过于狭窄，无法体现应用上的普遍性。其次，即使什么是“量”的问题不存在，作为变量，它须在某一定范围内取值（不一定是数值），这一定范围实际上就是事先得假定的一个集合D（它构成函数的定义域），所谓“变量取值a”，实质上就是“a属于D”的一种变相迂回的说法。可见，在变量的概念中已经蕴含集合的概念。因此，在集合思想已得到普遍接受之后，如果函数定义自始就从集合出发，而不从变量出发，那么不但更确切一些，而且也普遍得多。以上考虑是新定义取代旧定义的原因之一。

当然，现代数学并不排斥采用变量，但那主要是在变元意义下来理解的，即指一个可表示某一集合中任一元素的符号或字母。从而它是从属于集合概念的派生物，和通常使用变量的涵义已有很大的区别了。

我们还可看到，第二个重要区别在于，旧定义中以变量y为函数，而新定义中则以对应规律为函数。在两种定义中“那末”之前的一段话，除了在形式上不同外，内容是一样的。但归结到什么是“函数”时，提法就截然不同了。究竟以哪种提法为好呢？本来，函数的本质在于两集合元素之间的联系，亦即x与y两变量之间的联系，单单y一方是不足以构成函数的。从这点看，旧定义自不如新定义。但也可替旧定义辩护说，它把y视为x的函数，实际上仍是两者并提，尽管如此，由于决定变量的是它所代表的集合，从逻辑上说，总不排除这种误解的可能性：即认为旧定义结果只是定义了与函数定

义域相联系的函数的值域，而并没有定义(具体到个别元素的)这种联系本身，因而凡定义域、值域分别相同的函数就易误解为同一函数，而不必问对应关系是否相同。现在姑且退一步，假定上述误解不致发生，那么不妨认为两种定义虽然说法不同，实质上却是等价的。于是，哪种方式比较好，就要看对理论的展开孰为有利了。这里可以这样说，就复合函数和反函数两概念的处理而论，新定义比旧定义远为自然，这从下面的示意图就可看出：

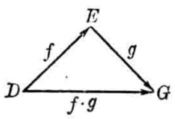

图 1

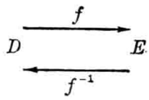

图 2

上述示意图中(图1)，f：$D\longrightarrow E$ 表示从 D 到 E 的函数，它使 D 的元素 x 与 E 的元素 y 对应 $x\longrightarrow y$。g：$E\longrightarrow G$ 表示从 E 到 G 的函数，它使 E 的元素 y 与 G 的元素 z 对应 $y\longrightarrow z$，而将这两次对应接连起来，得到的使 x 与 z 对应的对应关系 $x\longrightarrow z$，就表示函数 f 与函数 g (按照这个次序)的复合 $f\cdot g$：$D\longrightarrow G$。在图2中，f：$D\longrightarrow E$ 同前，如果不同的 x 总与不同的 y 对应，并且 E 中每个 y 都无遗地被对应到时，那末，将 $x\longrightarrow y$ 的对应次序颠倒过来，得到使 y 与 x 对应的对应关系 $y\longrightarrow x$，就表示函数 f 的逆 f^{-1}：$E\longrightarrow D$。

经过上面简单的对照和比较之后，新旧两种定义方式的优劣应该是很清楚的了。这是新定义取代旧定义的原因之二。

本文把对应关系定义为函数，以便与旧的定义作比较，只是为了在中学教学中较易接受，它还不是彻底归结为集合的更加现代化的处理方式。按照后者，函数无非就是 (x, y) 这种有序元素偶的集合，其中 x 属于 D，y 属于 E，但决不出现 x 相同而 y 不相同的有序偶。换句话说，函数无非就是一个理想的表，借此可以按 x 的值从而查出 y 的值，所谓"理想的表"是指它可以包含无限多个"数据"，而且所有"数据"又是绝对精确的，从而有别于通常的三角函数表或对数表等。

集合概念引入中学数学的教材以后，就给函数概念教学的现代化提供了基础，这不仅有助于培养严格思考的习惯，对于阅读现代文献，或将来进一步学习映射、算子等内容也有好处，因而是值得尝试的。

最后还得声明，上面关于"变量"一词的说法，是就它用于"函数"的定义而言的，我们当然不妨在其他场合运用"变量"这种直观而生动的说法。另外，我们应该在概念上区分 f，$f(x)$ 和 $y=f(x)$ 三者。第一个是表示函数，是一种对应规律；第二个是表示函数 f 在 x 的值，是一个数或一个元素；第三个是借以确定 f 的方程，是一个式子。但一旦掌握了区别之后，不妨有时有意识地混同使用，这和无意识地混用是有极大差别的。

谈“无　限”

莫　由

“天上星，亮晶晶，数来数去数不清。”孩子们的儿歌里，已有朦胧的“无限”思想。他们从“数不清”到“数不尽”，一步步地跨向“无限”的门槛。进中学之后，“无限”就以各种形式向学生们提出来：

自然数1，2，3，…永远数不完，这是讲“无限多”。

两条平行线无限延长，永远不相交，这是讲“无限远”。

圆周长看成正多边形周长的极限，这是“无限逼近”。

这类例子还可举出不少。

那么，在数学中究竟是怎样处理“无限”、认识“无限”的呢？

一、关于“无限多”

全体自然数构成无限集，其中没有最大的。我们常写1，2，3，…，n，…，这后面的三点就表示“无限多”。那么，任给一个集合，什么是元素的个数有限，什么是个数无限，能否有一个明确的定义？让我们看看在数学上是如何处理这个问题的。

在集合论里，如果两个集合之间能建立起一一对应，就说这两个集合所含的元素一样多。例如一个剧场满座，就能断定剧场的座位和观众肯定一样多。这里的根据就是一个位子坐一个人，一个人只坐一个位子。所谓对号入座就是一种一一对应的法则。把这个意思用集合论语言写出来就是：

定义一　若有两个集合A和B，对任何$a\in A$必有一个且只有一个B中的元素$b\in B$与之对应；反之，B中任一元素$b\in B$，必有一个且只有一个A中的元素$a\in A$与之对应，则称集合A和B之间是一一对应的。

一一对应，给我们判断两个集合之间的元素的多少提供了依据。我们把彼此一一对应的集合，看作元素个数相同。集合A的元素个数，记作$\overline{\overline{A}}$。

如果剧场没有满座，那一定是全体观众只和座位的一部分一一对应。在这种情况下，我们可以断言，观众数比座位数少，即座位比观众多。用数学语言写出来是：

定义二　A和B是两个集合，其元素个数分别为$\overline{\overline{A}}$和$\overline{\overline{B}}$。若A的一个子集和B一一对应，则称A的元素个数不少于B的个数，记为

$$\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}。$$

如果进一步还能断定A不能和B一一对应，就说A的元素比B多，记为

$$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}。$$

不难证明，如果$\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$，又有$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，则

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}。$$

有了这样定义，集合中元素的多少就可以互相比较了。设有一个含有n个元素的集合M。将M中元素依次编上号码：$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，然后令元素$a_k$和自然数$k$一一对应，就是

$$a_k\longleftrightarrow k\ (k=1, 2, \cdots, n),$$

那末集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$就可以和自然数中前$n$个数组成的集合$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$一一对应起来，$\overline{\overline{M}}=n$。设$N$的元素个数为$n+1$，则$M$能和$N$的子集一一对应，但不能和$N$一一对应，即$N$的元素比$M$多，$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$。这和我们的常识是一致的。

元素个数有限的集合和个数无限的集合之

间，差别很大。让我们看一个例：

$$\begin{array}{ll} A: & \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\} \\ & \ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \qquad\ \updownarrow \\ B: & \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots\} \end{array}$$

这就是说 A 和 B 一一对应，即全体自然数和全体偶数一样多。这里，部分和全体的元素个数居然一样多。在有限集情形这是不可想象的，只有在无限集才能成立。所以我们就可用它来作为无限集的定义：

定义三 对于集合 A，若它能和自己的真子集一一对应，则 A 是无限集；反之，是有限集。

无限集的元素虽有无限多个，但它们之间仍有“多”“少”的差别，其比较方法仍是一一对应。这里我们叙述两个命题。

1．正有理数全体 R 和自然数全体 I 的元素一样多。$\overline{\overline{R}}\geqslant\overline{\overline{I}}$ 是显然的。我们只要设法建立 $\overline{\overline{R}}\leqslant\overline{\overline{I}}$ 就行了。把所有正分数排成下表：

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\cdots,\frac{n}{1},\cdots, \\
\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\cdots,\frac{n}{2},\cdots, \\
\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\cdots,\frac{n}{3},\cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \frac{3}{m},\ \frac{4}{m},\cdots,\frac{n}{m},\cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

显然，任何正有理数都可写成正分数，都可以在上表中找到它的位置。表中的有些分数不是既约的，即一个正有理数在表里可能重复出现，因此表中所列的分数比正有理数只会多，不会少。但这个表内的分数却可以和自然数一一对应。对应的办法很多，例如按斜线法就可排列为

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{4}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4},\cdots, \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10,\cdots
\end{array}$$

这就表明正有理数不会比自然数多：$\overline{\overline{R}}\leqslant\overline{\overline{I}}$。而自然数当然不会比正有理数多，这就证得了正有理数和自然数一样多。我们把能和自然数一一对应的集称为可数集。

2．实数全体不可能和有理数一一对应。我们只须证明 $[0,\ 1]$ 中实数不可能是可数集就可以了。可用反证法，大致步骤如下：倘若 $[0,\ 1]$ 中实数集 C 能和自然数一一对应，则 C 可写为 $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$。我们将 $[0,\ 1]$ 分为三部分 $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$，则 x_1 必含于其中之一，如果 x_1 是 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$，顶多落在两个区间之内。故至少有一个不含 x_1。记为 $[a_1,\ b_1]$，再将 $[a_1,\ b_1]$ 三等分，其中必有一个子区间不含 x_2，记为 $[a_2,\ b_2]$，如此做下去可得一系列闭区间：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,\ b_n]\supset\cdots$$

而

$$b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\to 0,$$

根据区间套定理，它决定唯一实数 x_0。但 $x_0\neq x_n$，$n=1,\ 2,\cdots$，所以 x_0 不在 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$ 之内，这矛盾说明 C 是不可数的。

以上说明无限集中元素仍然有“多”“少”之分。这种衡量元素多少的量称为集合的“势”，不存在最大的势，无限集里仍有无限多的层次，“无限多”是没有止境的。

二、关于“无限远”

宇宙空间是无限的。目前人们可以探测到的最远星球，距地球有几十亿光年，即每秒走三十万公里的光要几十亿年才能走完这段距离，但不管怎么说，它仍是有限距离，决不会是宇宙的边界。作为研究空间形式的几何学，可以而且应该提出一些模型，对无限远点作一些模拟和假想，以便近似地或从某个侧面反映人们对空间无限远处的认识。

在欧氏几何中，并没有明确提出无限远点。它只是说，两条平行线无限延长永远不会相交，沿着这条路子想下去，可以认为两条平行线在无限远点相交，至于无限远点有几个，其结构如何，欧氏几何没有涉及。

为了研究实数范围内的极限运算，人们把一条直线的两端添上 $-\infty$ 和 $+\infty$ 这两个无限远点，并也把它们看成两个数。$x_n \to +\infty$ 就可说成 x_n 收敛于 $+\infty$。这两个特殊的数可以和普通数进行某些运算。设 a 是有限数，则

$$+\infty \pm a = +\infty,$$

$$-\infty \pm a = -\infty,$$

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty}=0。$$

$a>0$ 时，$\pm\infty \cdot a=\pm\infty$；$a<0$ 时，$\pm\infty \cdot a=\mp\infty$ 等。但有些运算不能进行，如

$$0\cdot(\pm\infty),$$

$$(+\infty)-(+\infty),$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

等没有意义。这时，无限远点 $\pm\infty$ 和直线上有限点之间有联系，又不能完全等同。

在复数分析范围内，却设想无穷远点只有一个。它使用的模型是球面。π 是复数平面，在 $Z=0$ 置一直径为 1 的球面和 π 相切，顶点是 P（图 1）。对于平面上一点 Z，连结 $\overline{PZ}$ 交球面

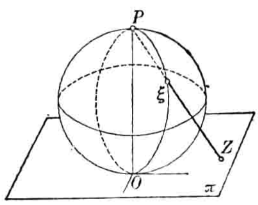

图 1

于 ξ，则 Z 和 ξ 构成一一对应，那么和 P 对应的点就是平面上的无限远点了。从球面上看，点 P 和其他点完全一样，没有什么特殊之处。

在这个模型中，平面上通过原点的两条直线，对应在球面上是通过 O 和 P 的大圆。可以证明，平面上两条平行线对应为球面上两条相交于 P 的圆周。这就是说，在复数分析范围内，人们认为无限远点只有一个，任何两条平行线都相交于同一个无限远点。

我们再看一个非欧几何的例子。在罗巴契夫斯基几何中的平行公理是："通过直线外一点，可引无限多条直线，都不与已知直线相交，这些直线填满某一角形区域，这个角的边线称为已知直线的平行线"。对于这种和我们直观想象不相容的几何学，可以作出一个模型（图 2）。在欧氏平面上画一个圆周 Γ，其内部表示

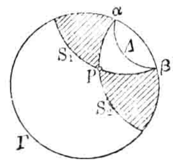

图 2

非欧平面，圆内的点为非欧点。圆内与 Γ 直交的圆弧称为非欧直线。把圆周 Γ 上的点都看成无限远点，罗氏公理就可得到解释。设 $\varDelta$ 是端点为 α 和 β 的非欧直线，P 是 $\varDelta$ 外一点，过 P 可作 S_1 交 $\varDelta$ 于 β，作 S_2 交 $\varDelta$ 于 α。它们围成一角域（阴影部分）。位于角域中的过 P 的非欧直线和 $\varDelta$ 不相交。S_1、S_2 是角域的边界，它们和 $\varDelta$ 平行，分别和 $\varDelta$ 交于无限远点 β 与 α。这个例子说明，罗氏几何里的无限远点有无限多个，在这个模型里，它们充满一个圆周。

三、关于"无限运算"

中学数学主要研究有限运算。例如解一元一次方程，通过有限次加、减、乘、除运算就能得出结果。但是，中学里实际上已多次碰到无限运算，最明显的例子是求圆周长。用直线段去度量圆周长度，只通过有限次测量绝对无法达到，只能用无限逼近的思想，先通过多边形的周长给以近似描写，然后令边数无限增加，取极限而得。公元前三世纪，古希腊的阿基米德已用这种方法得到过抛物线弓形的面积，但是，阿基米德拒绝无限逼近的概念，想方设法回避"无限"，绕开"无限"。在这方面，我国魏晋时代的大数学家刘徽敢于打破旧规，面对无限，创立了割圆术。他说过"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣！"

这种无限细分和无限逼近的思想，是大胆的，相当彻底的。

求圆周长之困难，归根结蒂在于圆周长和半径不可公度，即圆周率 π 是无理数。所谓线段 a 和 b 不可公度，有两种等价的说法。常用的说法 A 是：用 a 量 b，若量不尽

$$b=n_1a+b_1,$$

则用 $\frac{a}{10}$ 再量 b_1，又量不尽

$$b_1=n_2\frac{a}{10}+b_2,$$

则再用 $\frac{a}{10^2}$ 量 b_2，如果无限继续下去一直量不尽，则 a 和 b 不可公度，以 a 为单位 1，则 $b=n_1.n_2n_3\cdots$ 是无限小数。另一种说法 B 是：用 a 量 b 得

$$b=n_1a+b_1,$$

如量不尽，即 $b_1\neq0$，利用余数 b_1 量 a，得

$$a=n_2b_1+b_2$$

若 $b_2\neq0$，再用 b_2 量 b_1，这样依次辗转量测，如果 b_n 能将 b_{n-1} 正好量完，则 b_{n-1} 是 b_n 的整数倍，倒推上去，a 和 b 都是 b_n 的整数倍，$\frac{b}{a}$ 就是有理数，a 和 b 有公共量度 b_n，如一直量不尽，则称不可公度。

大家知道，边长为 1 的正方形的边长和对角线之间不可公度。但在历史上最早的不可公度概念却产生于正五边形的边长和对角线。它出现在公元前五世纪的毕达哥拉斯时代。设 $ABCDE$ 是正五边形（图 3），则 $BC=CD'$，$AD'=CE'$，$EC'=E'C'$。如正五边形的边长为 x，对角线长为 a，则显然有

$$a:x=(a-x):[a-2(a-x)]。$$

（这是因为 $A'B'C'D'E'$ 也是正五边形，边长为 $[a-2(a-x)]$，对角线为 $(a-x)$。）整理后解得 $x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$，它是无理数。从几何上看，$x$ 和 a 也不可公度。实际上，由 $A'B'C'D'E'$ 联对角线又可得 $A''B''C''D''E''$，它也是正五边形，这个手续永远作不完，但用 x 量 a 得余数 $a-x$，用 $a-x$ 量 x 得余数 $a-2(a-x)$，这正是 $A'B'C'D'E'$ 的边长。正五边形可永远作下去，辗转量测也就永不会完结，所以 x 和 a 不可公度。

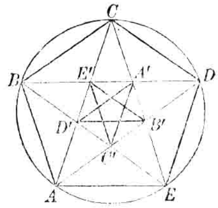

图 3

毕达哥拉斯认为，世界上没有不可公度的线段，相传他的一个门生发现了上述的不可公度线段，却被诬为大逆不道，逼得乘船逃走，最后沉舟身死，终于为真理而献身。

和无限运算紧密相连，无理数是无限不循环小数，有理数有时也可表为无限循环小数，但那是“无限”的外表，实质仍然是有限。无理数是以有理数为材料，经过无限的过程，得到一个新“对象”，称为新数。$\sqrt{2}$ 就是由

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\cdots$$

无限地变化着的数列所确定。实数是无限数学驰骋的战场。正如有理数对四则运算封闭，实数对无限运算也是封闭的。

所谓无限过程，其实是极限过程。$\frac{1}{2^n}$ 的极限是 0，说明 $\frac{1}{2^n}$ 经过了无限的过程。0 是有限数，它标志 $\frac{1}{2^n}$ 无限运算的过程和结果，通过 0 可由有限把握无限。人们正是利用这一思想达到了微积分的许多光辉成果。

由有限到无限，是人类认识的一次飞跃。但无限又要通过有限来表现，加以掌握。研究无限的微积分发展了有限的初等代数，但概括分析学的成果又出现了研究有限的近世代数。通过无限发展有限，概括无限又提出新的有限，如此循环往复，就在认识客观世界的各个层次上出现绚丽多彩的画面。

三 角 式 的 变 换

上海市复兴中学　　姚　　晶

三角式的恒等变形，需要用到大量的三角公式。不少学生往往只知死记公式，遇到问题，把公式一一排队，拿来套用，这样不仅效率低，容易搞错，而且日久也容易忘记。怎样解决这个问题呢？我认为，学习三角式的变换时，应做到"脑中有图，变换靠式"。把基本公式的推导建筑在几何图形的基础上；而对派生的公式，则根据代数式的恒等变形关系，把它和基本公式紧密联系起来。这样，就可做到公式少而精，印象深，便于应用。下面从三个方面分别谈谈我的处理意见。

一、关于同角三角比之间的关系

同角三角比之间的关系，最基本的还是锐角的三角比之间的关系。这些关系，可以根据锐角三角比的定义，画出一个直角三角形，并取其中某一边作为单位，从图形上观察得到。例如，取斜边作为单位长，根据锐角三角比的定义，得到图 1。利用这个图：

1．应用 α 的三角比的定义，即得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}。$$

2．根据勾股定理，即得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,$$
$$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha。$$

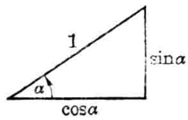

图 1

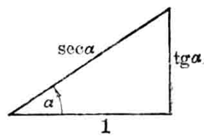

图 2

又如，取角 α 的邻边作为单位长，从锐角三角比的定义得到图 2，根据勾股定理，就有：

$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1,$$
$$\sec^2\alpha-1=\operatorname{tg}^2\alpha,$$
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha。$$

由图 2，还可看到：

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha},$$

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}。$$

其中，最后一个关系式不易记忆。如果利用这个图，在三角式的变换中就可大大简化运算步骤。

至于任意角 α 的三角比之间的关系，可以在这个基础上，同样利用图形来得出。应用时，只需注意这个角的终边在什么象限，正确运用算术根的概念和分母不能为零的原则，一切问题都可迎刃而解。例如，要化简

$$F(\alpha)=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

时，先把它变换成

$$\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|},$$

然后分别讨论 α 的终边在各个象限以及 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时的情况，从而可得：

$$F(\alpha)=\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

$$=\begin{cases}2\operatorname{tg}\alpha, & \text{若 } 2n\pi\leqslant\alpha<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{若 } 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leqslant(2n+1)\pi,\\ -2\operatorname{tg}\alpha, & \text{若 } (2n+1)\pi<\alpha<(2n+1)\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{若 } (2n+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2(n+1)\pi,\end{cases}$$

而当 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$F(\alpha)$ 没有意义（这里 n 为整数）。

二、关于简化公式

简化公式通常也称“诱导公式”。它主要揭示 α 与 $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的三角比之间的关系。过去的课本中曾引进 54 个公式，使学生记不胜记，而且推导很烦琐，我看只要抓住以下几点，就可大大简化。

1．只考虑 α 与 $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的正、余弦之间的关系，至于它们的其余四种三角比之间的关系，可应用同角三角比之间的关系来导出。

2．始边和终边相同的角具有完全相同的三角比，即

$$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$

如遇超过一个周角的角的三角比时，可按“去整为零”的办法（即：除以 360° 或 2π 后，取其余数）转化为角 α（$0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$ 或 $0\leqslant\alpha<2\pi$）的相同的三角比。

3．应用角 $-\alpha$ 与 α 的终边对称于 x 轴的特征，得出

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha。$$

把负角的三角比转化为正角的三角比。

4．对于角 $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的正、余弦之间的关系，可按先考虑 α 为锐角的情况，再推广到一般来处理，并把建立 α 为锐角时的关系式作为教学中的重点。

(1) 当 n 为奇数时，画出图 3，并命角 $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的终边上一点 P 的坐标为 (x, y)，$OP=1$，由任意角的三角比的定义可知

$$\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=y,$$
$$\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=x。$$

另一方面，从直角 $\triangle OPM$ 中，$\angle POM=\alpha$，根据锐角三角比的定义可知

$$\sin\alpha=MP=|x|,\quad \cos\alpha=OM=|y|。$$

这样，只需考察在各个象限中 P 的坐标 x, y 的符号，直接得出下面这一组关系式：

OP 在第 I 象限：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$$

OP 在第 II 象限：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

OP 在第 III 象限：

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

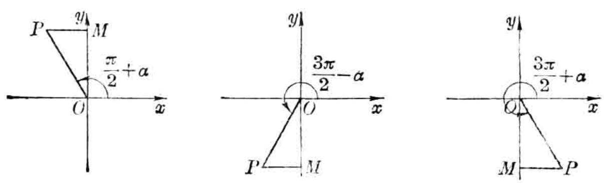

图 3

OP 在第Ⅳ象限:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha。$$

(2) 当 n 为偶数时，基本上可参照 n 为奇数时的处理方法,类似地解决。

这样处理，充分利用了几何直观，公式的导出比较简洁,而且也可使学生做到“脑中有个图”,进行正确的变换。

打好了这一基础，然后再把上面建立的这两组公式推广到 α 为一般角的情况。这时，主要任务是使学生理解 $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的三角比之间的关系:当 α 为任意角时,在形式上与 α 为锐角时完全相同，只是在意义上正号(不加符号)表示符号相同,负号表示符号相反。

例如: $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 与 α 的终边的位置关系，可以看作分别以 Oy 轴与 Ox 轴为始边、以 $-\alpha$ 与 α 的终边为终边的位置关系，它们关于Ⅰ、Ⅲ象限的角平分线是对称的。从而,当 $OA=OB=1$ 时,点 A、B 的坐标 (x, y) 与 (x', y') 的对应关系是: $y'=x$, $x'=y$，即:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

不论 α 的终边在哪个象限都适用。

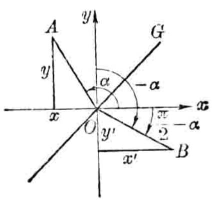

图 4

又如，$\pi+\alpha$ 与 α 的终边必然关于原点为中心对称,从而当 $OA=OB=1$ 时,点 A、B 的坐标 (x, y) 与 (x', y') 的对应关系是 $y'=-y$, $x'=-x$，从而可得

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha。$$

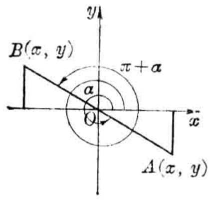

图 5

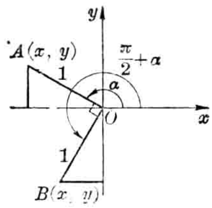

图 6

类似地,根据 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 与 α 的终边位置关系，可导出当 $OA=OB=1$ 时，点 A、B 的坐标 (x, y)、(x', y') 间的对应关系分别为 $y'=x$, $x'=-y$，从而得出:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha。$$

以上三个例子也就足以让学生确信前面所得到的结论了。

三、关于加法定理及其应用

加法定理常用的有六个公式，再加上由此派生的倍角、半角、积化和差与和差化积，通常在课本中至少出现 28 个公式。如果平均使用力量加以记忆和熟练运用,势必学时很苦,学后易忘。我认为，初学时应该集中主要力量掌握 $\sin(\alpha\pm\beta)$、$\cos(\alpha\pm\beta)$ 这四个基本公式和 $\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$ 这两个常用公式，其余在第一阶段不作为公式提出,而在做有关练习题时,要求学生根据这六个公式自己推导，从而熟练掌握其推导过程及公式之间的互相联系。第二阶段,则让学生通过练习,在对这些公式已能基本掌握的基础上，研究如何综合运用这些公式解决恒等变形以及其他应用，这样就可以收到事半功倍的效果。具体意见是:

1. 对 $\alpha\pm\beta$ 的正、余弦公式,必须对其导出过程和表达形式做到透彻理解,牢固掌握。

(1) 这几个公式的导出，我主张力求使推导过程与记忆公式的形式相一致，因而倾向于利用面积来导出，推导仍可采取先特殊再推广