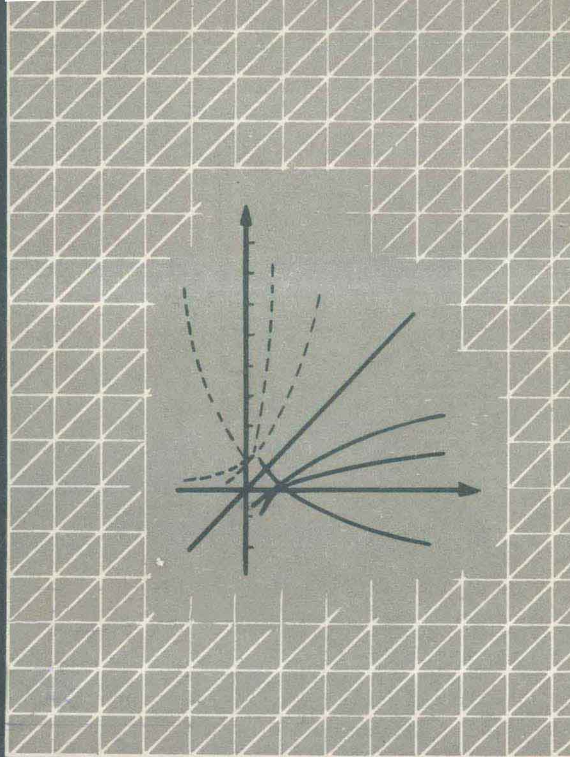
小学教师进修

中等师范教材



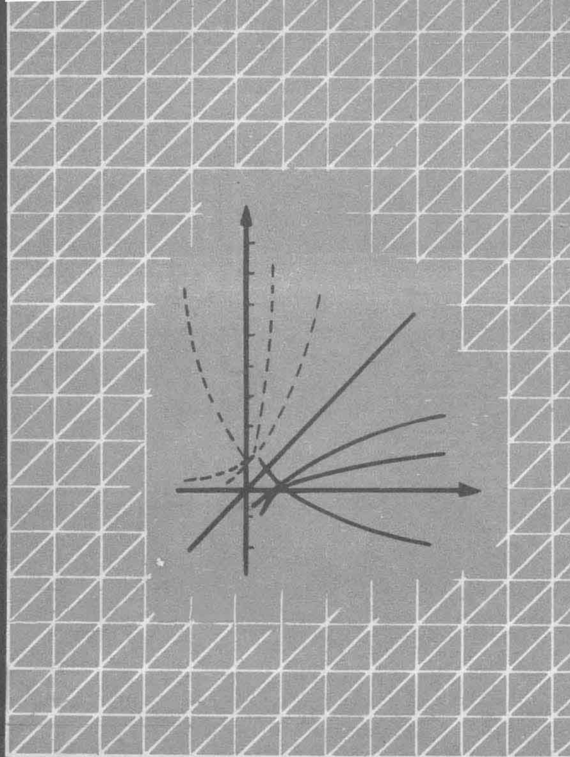
代数与初等函数（上）

北京教育学院师范教研室

河南省小学教师进修中师数学编写组

小学教师进修

中等师范教材



代数与初等函数（上）

北京教育学院师范教研室

河南省小学教师进修中师数学编写组

说 明

为了适应当前小学教师进修的迫切需要，经陕西、河南、甘肃、内蒙古、北京五省、市、自治区共同商定，分工协作编写小学教师进修中等师范教材。全套教材有：《中师语文》（即大纲规定开设的《文选与写作》全四册）、《语文基础知识》、《小学语文教学法》（即大纲规定开设的《小学语文教材教法》），《初中数学复习》、《代数与初等函数》上下册、《几何》、《算术基础理论》、《小学数学教材教法》，《自然》，《历史》，《地理》和《心理学》，《教育学》采用人民教育出版社编写的全日制中等师范学校统编教材.

这套教材是根据教育部制订的《小学教师进修中等师范教学计划（试行草案）》，参照教育部制订的各科教学大纲（征求意见稿），联系小学在职教师的实际，在总结以往经验的基础上编写的.

在确定教材内容时，我们既重视内容的思想性、科学性和系统性，又注重学员的基础知识、基础理论的学习和基本技能的训练，贯彻少而精、理论联系实际、面向小学的原则。在编写过程中，我们考虑到当前小学教师的实际和在职教师进修的特点，文字力求简明扼要、通俗易懂、便于自学。本套教材适合小学教师离职进修、函授、业余面授和自学使用。

中师数学进修教材是五省、市、自治区协编会委托北京市和河南省编写，由北京教育学院师范教研室和河南省小学教师进修中师数学编写组写出初稿，河南省教育厅召集陕西、甘肃、内蒙古、安徽、广西、山东、河北、河南、北京等省、市、自治区的代表参加审稿会议，对初稿进行了审查。会后，由编者根据审查意见进行了修改。《初中数学复习》一书是为帮助学员复习编写的，各地可根据实际情况，如果学员已经掌握这些知识，可以略去不学。

本书是《代数与初等函数》上册，内容包括数集、二元二次方程组和线性方程组、不等式、不定方程以及函数、幂函数、指数函数和对数函数。如果先学习《代数与初等代数》后学习《算术基础理论》，则应先学习《算术基础理论》的第一章：集合与映射。

由于我们的水平有限，编写时间又比较仓促，教材中难免会有缺点和错误，希望各地在试用过程中提出意见，以便进一步修改。

北京教育学院师范教研室
河南省小学教师进修中师数学编写组
一九八三年二月

目　　录

第一章　数　集

第一节　有理数集

1.1　有理数及其分类

数的概念是由人们的实践需要而产生的，我们在小学数学中所学过的数，称为**算术数**。引入负数以后，算术数中的自然数和分数都是正数，其中自然数又叫做**正整数**，分数又叫做**正分数**。-1，-2，-3，…叫做**负整数**。$-3\frac{1}{2}$，-1.6（即$-1\frac{3}{5}$），$-\frac{6}{7}$，…叫做**负分数**。

正整数、负整数和零统称为**整数**。

正分数和负分数统称为**分数**。

整数和分数统称为**有理数**。

全体有理数组成的集合，叫做**有理数集**。有理数集所包含的数可以按下面两种方法来分类。

1°

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

2°

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

在上述的分类表中，我们所说的分数是指不能化成整数的那种分数，这种分数也叫做**纯分数**.

如果把每一个自然数m都看成是一个以1为分母，以m为分子的分数，如$\frac{2}{1}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{4}{1}$等等. 那么,一切正有理数可以表示为$\frac{m}{n}$（其中m、n是自然数）的形式.

如果把数0看成是以1为分母以0为分子的分数，即

$$\frac{0}{1}=0$$

把它叫做零分数.

如果规定$\frac{-m}{n}=-\frac{m}{n}$（$m$、$n$是自然数），那么，一切有理数都可以表示为$\frac{m}{n}$的形式，其中$m$是整数（正、负整数或零），$n$是正整数.

我们知道，分数化成小数有两种，一种是**有限小数**，如0.6,0.25,0.625等，它们的小数位数是有限的. 另一种是无限循环小数，如$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$，$\frac{1}{7}=0.142857142857$

$\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$，$\dfrac{33}{55}=0.41818\cdots=0.4\dot{1}\dot{8}$等，它们的小数位数是无限的。

反过来，任何有限小数和无限循环小数都可以化成分数，例如

$$0.6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\qquad 2.123=2\frac{123}{1000},$$

$$0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\qquad 0.\dot{1}\dot{2}\ \ \frac{12}{99}=\frac{4}{33},$$

$$0.\dot{1}5\dot{3}=\frac{153}{999}=\frac{17}{111},$$

$$0.12\dot{3}=\frac{123-12}{900}=\frac{111}{900}=\frac{37}{300},$$

$$5.38\dot{9}\dot{0}=5\frac{3890-38}{9900}=5\frac{3852}{9900}=5\frac{107}{275}.$$

因此，一切分数可以看作有限小数或无限循环小数；而有限小数或无限循环小数也都可以看作分数。

如果把整数看作是小数点后面无限个0的小数，那么，整数都可以写成无限循环小数的形式，例如2可以写成2.0，80可以写成$80.\dot{0}$。如果再把有限小数看作是以0为循环节的循环小数，那么，有限小数也可以写成无限循环小数的形式，例如，0.18可以写成$0.18\dot{0}$，3.25可以写成$3.25\dot{0}$。这样，任何有理数就总可以写成无限循环小数的形式。从这个意义上说，有理数就是无限循环小数。

试想一想下面的问题：

（1）有没有最小的正整数？有没有最大的正整数？有没有最小的负整数？有没有最大的负整数？有没有最小的有理

数？有没有最大的有理数？

（2）有理数集是有限集还是无限集？

（3）零是正数吗？是负数吗？是自然数吗？是整数吗？是有理数吗？

（4）有限小数一定是有理数吗？无限循环小数一定是有理数吗？

（5）为什么说一切有理数都可以表示为$\frac{m}{n}$的形式？（其中m是整数，n是正整数）。

（6）{正数}∩{整数}＝？

（7）{有理数}∪{整数}＝？

1.2 有理数集的性质

有理数集有以下的一些重要性质：

1.封闭性

在研究数学问题时，常常要对数进行运算，而数的运算和数集有着密切的关系．一个数学问题能否得到解决，与我们在哪个数集里讨论关系很大，在较小的数集内不能解决的问题，可能在它的扩集内得到解决．有时对于同一个数学问题，在不同的数集内，其结论也不相同．例如，在自然数范围内，任意两个自然数的差不一定是自然数，即减法在自然数集内不是永远可以施行的，但在整数范围内，减法就是永远可以施行的了。又如，同一个方程在不同的数集内，有时它的解也不相同，我们将在第三章里讨论这个问题．

如果一个运算，对于一个非空数集A的任意两个数，通过这个运算，其结果仍然属于A，我们就说集合A对这个运算

是封闭的。例如，自然数集对于加法和乘法是封闭的。而自然数集对减法和除法不是封闭的。

例1 试证明偶数集$M=\{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$对加法、减法和乘法是封闭的。

证明：显然，偶数集是一个非空集合。

设a、b是任意两个偶数，记作

$$a=2a_1,\ b=2b_1,\ (a_1,\ b_1\text{是整数})$$

则

$$a+b=2a_1+2b_1=2(a_1+b_1),$$

$$a-b=2a_1-2b_1=2(a_1-b_1),$$

$$ab=2a_1\cdot 2b_1=2(2a_1b_1).$$

因为a_1+b_1，a_1-b_1，$2a_1b_1$是整数，所以$a+b$，$a-b$，ab都是偶数，因此，偶数集M对加法、减法和乘法是封闭的。

例2 试证明：有理数集Q对加法、减法、乘法和除法（除数不为零）是封闭的。

证明：显然，有理数集Q是一个非空集合。

设a、b是任意两个有理数，而任何有理数都可以表示成分数的形式。所以有

$$a=\frac{n_1}{m_1},\ b=\frac{n_2}{m_2}$$

（其中m_1，n_1，m_2，n_2是整数，且m_1，m_2，n_2都不是零）

则

$$a+b=\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1m_2+n_2m_1}{m_1m_2},$$

$$a-b=\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1m_2-n_2m_1}{m_1m_2},$$

$$a\cdot b=\frac{n_1}{m_1}\cdot\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1n_2}{m_1m_2},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{n_1}{m_1}\div\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1m_2}{m_1n_2}.\ (b\neq 0)$$

因为$\frac{n_1m_2+n_2m_1}{m_1m_2}$，$\frac{n_1m_2-n_2m_1}{m_1m_2}$，$\frac{n_1n_2}{m_1m_2}$，$\frac{n_1m_2}{m_1n_2}$显然都是有理数，所以，有理数集$Q$对加法、减法、乘法和除法（除数不为零）是封闭的。

2．有序性

我们知道，在自然数集里的任意两个数之间，可以比较大小，它们相互之间存在着顺序关系，并且满足以下的顺序律：

（1）对于任意两个数a和b，下面三个关系

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

有一个且只有一个成立；

（2）不等的对逆性：如果$a<b$，则$b>a$，

如果$a>b$，则$b<a$；

（3）不等的传递性：

如果$a<b$，$b<c$，则$a<c$；

（4）相等的自反性：$a=a$；

（5）相等的对称性：如果$a=b$，则$b=a$；

（6）相等的传递性：

如果$a=b$，$b=c$，则$a=c$。

同样，在整数集和有理数集的元素之间也具有上述的顺序关系和满足上面几条顺序律，并且在顺序关系和运算之间有以下的基本关系：

设a、b是有理数，我们有

如果$a>b$，则$a-b>0$；

如果$a=b$，则$a-b=0$；

如果$a<b$，则$a-b<0$.

3.有理数的稠密性

在自然数集里，两个相邻的自然数（例如5和6）之间不再有其他自然数，这一性质叫做自然数集的离散性，整数集也具有离散性．如果把这些数在数轴上表示出来，它们是一些孤立的点。

但是，有理数集却具有不同的性质，任意两个有理数a、b，设$a<b$，总存在一个有理数c，能使$a<c<b$（例如，我们可以取$c=\frac{a+b}{2}$）。由此，我们还可以说，在a、b之间存在无限多个有理数．这是有理数的一个重要性质，这个性质反映在数轴上，就是两个不同的有理点A（表示数a）与B（表示数b）之间，存在着无穷多个有理点．由此可见，有理点密密麻麻地分布在整个数轴上，有理数集的这个性质，叫做有理数的稠密性。

*4.可数性

在前面我们讨论了自然数的“离散性”和有理数的“稠密性”，初看起来，似乎有理数集的数要比自然数集的数“多”，但是，我们将要看到一个有趣的现象，就是从有理数集到自然数集可以建立一一映射，如果要说多少的话，它们的元素个数是“同样多”．

下面我们来证明这一事实。

我们将所有正有理数$\frac{m}{n}$（m，$n\in N$）排列成下表：

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots\cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots\cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots\cdots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

然后，按虚线所示的对角线顺序把一切正有理数排列出来，得

$$r_1, r_2, r_3, \cdots;$$

在排列过程中，遇到与前面相同的数可以去掉，例如，$\frac{2}{2}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{3}{9}$，……等等。

同样可以把所有负有理数排列出来，即

$$-r_1, -r_2, -r_3, \cdots;$$

这样，有理数集Q可以表示为：

$$Q=\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \cdots\}^{*},$$

把有理数集里的数用自然数来编号，就是把每一个有理数与自然数配对。这就是说，从有理数集到自然数集可以建立起一一映射。所以它们的元素个数“同样多”。有理数的这个性质叫做**可数性**。所以，有理数集是一个可数集。

习 题 一

1．判断下列各命题的真假，并说明理由：

(1)有理数都是分数，分数也都是有理数；

(2)有理数都是小数，小数也都是有理数；

(3)两个有理数的和、差、积、商都是有理数；

(4)任何正有理数都大于任何负有理数。

2．指出在下面列举的数集里，各对哪些算术运算是封闭的？

(1)由所有正偶数组成的集合A，即

$$A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\};$$

(2)所有10的倍数组成的集合B，即

$$B=\{\cdots, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, \cdots\};$$

(3)一切能被3整除的数的集合.

3．在下列两个有理数之间，写出三个有理数.

(1)1.4与1.5;

(2)−0.178与−0.179;

(3)32.8与−0.87;

(4)−17.685与17.684.

4．有理数集的性质中．哪些是和整数集所共有？哪些是整数集所没有的？

---

* 在这里不是按有理数的大小顺序来排列的

第二节 实 数 集

1.3 无理数的引入

现实世界中的许多量，如长度、面积、体积、重量等等，只用有理数还是不能完全精确地表示出来．就数的运算来说，乘方的逆运算——开方，在有理数集里不一定能够施行．为了解决这些矛盾，有必要对数的概念作进一步扩充．

图1—1

我们先来看下面的例子：

有一个正方形，它的面积等于2平方米，问它的边长是多少？（图1—1）

设正方形的边长为x米，根据正方形的面积公式，得$x^2=2$，求正方形边长x的值，就是求2的算术平方根，即$\sqrt{2}$米．

现在我们要证明这个$\sqrt{2}$不可能是有理数．

例1 证明没有一个有理数的平方能等于2．

证明：因为负数的平方等于与它相反的正数的平方，而$0^2=0\neq2$，所以，只要证明没有一个正有理数的平方等于2就可以了．

（1）x不可能是正整数．因为$1^2=1$，$2^2=4$，$1^2<2<2^2$，而1和2之间不存在其他整数．

（2）设x是一个正分数，那么，它就可以化成最简分数$\frac{n}{m}$的形式，在这里m、n是互质数，即$x=\frac{n}{m}$，这样就有