高等数学

第四卷

（第三分册）

R. 罗 德 著
秦 裕 瑗 譯

高 等 教 育 出 版 社

高　等　数　学

第四卷

（第三分册）

R. 罗　德　著
秦　裕　瑗　譯

高　等　教　育　出　版　社

本书系根据莱比錫托伊布訥出版社(B. G. Teubner Verlagsgesellschaft)出版的罗德(R. Rothe)著“高等数学”(Höhere Mathematik)第四卷第三分册 1961 年第 10 版譯出。第四卷共有三分册，分别作为罗德著“高等数学”前三卷的补充习題集。各分册中习題不只数量增多到三、四倍，还附有較詳細的解答与提示。

本卷各分册可分别配合前三卷的学习参考，也可供教师选題参考。讀者对象是高等学校理工科程度較好的学生，基础較好的自学者以及有关教师。

高等数学

第四卷　第三分册

R. 罗德 著

秦裕瑗 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·1203　开本 850×1168 $^1/_{32}$　印张 3 $^{13}/_{16}$

字数 93,000　印数 0,001—5,300　定价(5) ¥0.38

1965 年 8 月第 1 版　1965 年 8 月北京第 1 次印刷

目 录

（第三分册）

第一章　曲面与空間曲綫坐标

1. 第三卷§1至§4的练习题

曲面的解析表达式．切平面．弧长元素．曲面的法綫．面积元素．空間的曲綫坐标．体积元素．

1. 試求通过点(0, 0, 0), (3, 0, 0), (2, 2, 0), (1, 1, 3)的球面的方程．

解：中心的坐标 a, b, c 与球半徑 R 由四个方程来决定，它們是通过給定的坐标代入方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

而得到的；解这四个方程就得

$$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{7}{6},\ R=\frac{\sqrt{139}}{6}.$$

2. 有三个球，半徑都是 $\rho=2$，它們的中心的位置矢量是 $\boldsymbol{m}_1=\{-4, -5, 1\}$, $\boldsymbol{m}_2=\{4, -5, 7\}$, $\boldsymbol{m}_3=\{-1, 7, -3\}$．試求把这三个球夹在中間的二切平面的方程．

解：这两个切平面与通过三个球心的平面相平行．所以这平面的法矢量

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{m}_2-\boldsymbol{m}_1)\times(\boldsymbol{m}_3-\boldsymbol{m}_1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & -4 \end{vmatrix}=-72\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}+96\boldsymbol{k}$$

也就是所求平面的法矢量．$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{m}_1\pm\rho\boldsymbol{A}^0$ 是該二平面上一点的位置矢量．于是所求两平面的方程是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_1\pm\rho(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_1\pm\rho|\boldsymbol{A}|.$$

結果是：　$-72x+50y+96z=394,\quad -72x+50y+96z=-126.$

3. 有两个球 K_1 与 K_2，半徑各为 $a_1=8$, $a_2=5$，中心的位置矢

量各为 $\boldsymbol{r}_1=\{2,7,-9\}$, $\boldsymbol{r}_2=\{6,4,3\}$, 它們在点 P 处相切. 試求 a) P 的位置矢量 R, b) 在 P 处公共切平面的方程.

解: a) 因为距离 $a=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|=|\{4,-3,12\}|=13$ 被 P 分成比值 $a_1:a_2=8:5$, 所以 P 的位置矢量是

$$\overline{OP}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1+\frac{a_1}{a}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{r}_2+\frac{a_2}{a}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\left\{2+\frac{32}{13},7-\frac{24}{13},-9+\frac{96}{13}\right\}=$$

$$=\left\{6-\frac{20}{13},4+\frac{15}{13},3-\frac{60}{13}\right\}=\left\{\frac{58}{13},\frac{67}{13},-\frac{21}{13}\right\}.$$

b) 公共切平面的法矢量是 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, 所以它的方程是 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$ 或 $4x-3y+12z=-17$.

4. 一中心为 $P=(5,-5,3)$ 而半徑为 $a=5$ 的球与平面 $9x-6y-2z=25$ 相截得一圓, 試求該圓的中心与半徑.

解: 平面方程的海塞法式是

$$\frac{1}{11}(9x-6y-2z)-\frac{25}{11}=\left\{\frac{9}{11},\ -\frac{6}{11},\ -\frac{2}{11}\right\}\boldsymbol{r}-\frac{25}{11}=0.$$

因为它与点 P 的距离是 $\frac{44}{11}=4(<a)$, 所以它与球面相交, 截圓的中心的位置矢量为

$$\boldsymbol{m}=\{5,-5,3\}+\frac{\lambda}{11}\{9,-6,-2\};$$

因为它在截平面上, 故 $\boldsymbol{m}$ 滿足平面方程, 我們得到

$$\frac{1}{11}\{9,-6,-2\}\cdot\{5,-5,3\}+\frac{1}{11^2}\lambda\{9,-6,-2\}^2-\frac{25}{11}=0,$$

或 $\frac{69}{11}+\lambda-\frac{25}{11}=0$, 所以 $\lambda=-4$. 截圓的半徑为 $\rho=\sqrt{25-16}=3$.

結果是: $$\boldsymbol{m}=\left(5-\frac{36}{11}\right)\boldsymbol{i}+\left(-5+\frac{24}{11}\right)\boldsymbol{j}+\left(3+\frac{8}{11}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{1}{11}(19\boldsymbol{i}-31\boldsymbol{j}+41\boldsymbol{k}).$$

5. 試把直綫 $x=a$, $z=0$ 从点 $(0,0,2)$ 投影到球面 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k})^2=1$ 上.

解: 如果 $\boldsymbol{r}_1=\{a,\eta,0\}$ 是直綫上一点的位置矢量, 又 $\boldsymbol{r}_0=\{0,0,2\}$, 那末投影綫的方程是

$$r = r_0 + \lambda(r_1 - r_0) = \{\lambda a, \lambda\eta, 2+\lambda(-2)\},$$

利用球的方程就得到交点要满足关系式

$$(\lambda a)^2 + (\lambda\eta)^2 + (1-2\lambda)^2 = 1,$$

从而 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{4}{4+a^2+\eta^2}$; 所以投影綫与球面相交于点 $(0, 0, 2)$ 及 $\left(\frac{4a}{4+a^2+\eta^2}, \frac{4\eta}{4+a^2+\eta^2}, \frac{2(a^2+\eta^2)}{4+a^2+\eta^2}\right)$.

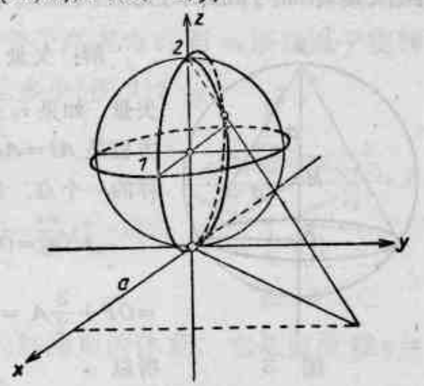

图 1

由图1可見，所給直綫在球面上的投影位于平面 $2x+az=2a$ 上，这是一个圆(球极投影)。

6. 設正圓錐的軸的单位矢量为$\boldsymbol{A}$而頂角为 2α，問它的方程为何？

解：如果把原点置于圓錐的頂点处，从一条軸截綫(图2)来看，就得到方程

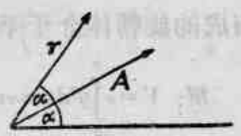

图 2

$$\boldsymbol{rA} = |\boldsymbol{r}|\cos\alpha; \quad A_x x + A_y y + A_z z = r\cos\alpha;$$
$$(A_x x + A_y y + A_z z)^2 = (x^2+y^2+z^2)\cos^2\alpha.$$

7. 試求两个正圓錐的交綫，这两个正圓錐分別以 x 軸及 y 軸为軸，頂角为 2α 及 2β，且頂点都在原点。

解：因为两个圓錐的方程分別是 $\boldsymbol{ri} = r\cos\alpha$ 及 $\boldsymbol{rj} = r\cos\beta$，所以交綫的矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = \{r\cos\alpha, r\cos\beta, \pm r\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\} =$$
$$= r\{\cos\alpha, \cos\beta, \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\}.$$

因为 $\boldsymbol{r}$ 有(两个)固定的方向，交綫是两条对称于 xy 平面、通过原点的直綫。只有当 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta\leqslant 1$，或 $\cos^2\alpha \leqslant \sin^2\beta$，交綫才是实的，所以必須有 $\alpha+\beta \geqslant \frac{1}{2}\pi$.

8. 在以点 $M=(8, -1, 3)$为中心、半徑为 $a=9$ 的球面上，有一点 $P=(2, -7, 0)$，它是頂角为 $60°$、軸通过点M的圓錐的頂点，

試决定球面与圓錐的交綫所在的平面方程.

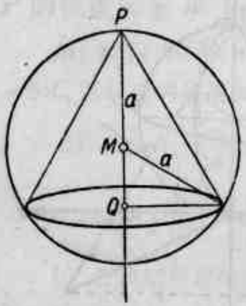

图 3

解: 矢量 $\overline{PM}=\boldsymbol{A}=\{6,\ 6,\ 3\}$ 是所求平面的法矢量, 如果 $\boldsymbol{r}_0$ 是平面上一点的位置矢量, 那末平面方程是 $\boldsymbol{Ar}=\boldsymbol{Ar}_0$. 圓錐的軸穿过平面的点 Q 就是这样的一个点. 我們有(图 3, 其中 $a=|\boldsymbol{A}|$)

$$\boldsymbol{r}_0=\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{PM}+\overline{MQ}=\overline{OP}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cos 60^\circ=$$

$$=\overline{OP}+\frac{3}{2}\boldsymbol{A}=\{11, 2, 4.5\}.$$

所以 $\boldsymbol{Ar}=91.5.$

結果是: $6x+6y+3z=91.5.$

9. 試計算擺綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$繞 x 軸旋轉而成的旋轉体介于平面 $x=0$ 与 $x=x(t)$之間的体积.

解: $V=\pi\int\limits_0^x y^2dx=\pi a^3\int\limits_0^t(1-\cos t)^3dt$. 应用余弦的二倍角及三倍角公式, 就有

$$V=\pi a^3\int\limits_0^t\left(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-\frac{1}{4}(\cos 3t+3\cos t)\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-\frac{15}{4}\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 3t\right)=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right).$$

10. 有一玻璃杯, 它是由曲綫 $y=\sinh x$ 繞正 y 軸旋轉而成的. 在杯中注入液体, 使液面升高到 1 时为止. 試計算液体的体积.

解: $$V=\pi\int\limits_{y=0}^{1}x^2dy=\pi\int\limits_{x=0}^{\operatorname{ar\,sinh}1}x^2\cosh x\,dx=$$

$$=\pi\Big[x^2\sinh x-2x\cosh x+2\sinh x\Big]_0^{\operatorname{ar\,sinh}1}=$$

$$=\pi((\operatorname{ar\,sinh}1)^2-2\sqrt{2}\operatorname{ar\,sinh}1+2)=0.879.$$

11. 把抛物綫 $y^2=2px$ 繞离 y 軸距离为 a 的平行直綫 z 旋轉. 問旋轉面的方程如何, 又問介于高度为 z_1 与 z_2 而垂直于旋轉軸的两平面之間的旋轉体体积是多少(图 4)?

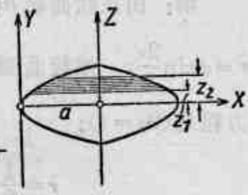

图 4

解: 旋轉曲面的方程是 $\left(a-\frac{z^2}{2p}\right)^2=r^2$,

$$V=\pi\int_{z_1}^{z_2} r^2 dz=\frac{\pi}{20p^2}(z_2^5-z_1^5)-\frac{\pi a}{3p}(z_2^3-z_1^3)+$$

$+\pi a^2(z_2-z_1)$.

12. 試計算延伸至无穷远的紡錘形的体积, 它是由曲綫 $y=$ $=xe^{-x}(x>0)$ 繞 x 軸旋轉得到的.

解:

$$V=\pi\int_0^\infty x^2 e^{-2x}dx=\pi\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^2e^{-2x}dx=\pi\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2a}\left(a^2+a+\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{4}$$

(分部积分).

因为 $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a^2+a+\frac{1}{2}}{e^{2a}}=0$, 故 $V=\frac{\pi}{4}$.

13. 把阿基米德螺綫 $r=$ $=a\varphi$ 繞它的軸 $\varphi=0$旋轉一周, 試建立所得旋轉曲面的方程(参閱第 25, 26 頁第 7 題)①.

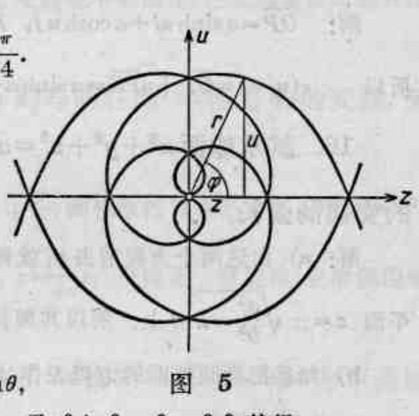

图 5

解: 由图 5, 得到 $z=r\cos\varphi$, $u=r\sin\varphi$; 又 $x=u\cos\theta$, $y=u\sin\theta$, 所以 $x=a\varphi\sin\varphi\cos\theta$, $y=a\varphi\sin\varphi\sin\theta$, $z=a\varphi\cos\varphi$; 因为 $u=\sqrt{x^2+y^2}=z\operatorname{tg}\varphi$ 及 $u^2+z^2=r^2=a^2\varphi^2$, 就得

$$\sqrt{x^2+y^2}=z\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}\right).$$

14. 有一正弦曲綫, 它通过原点, 周期为 h 且振幅为 a, 把它

① 本分册内括号里所指的是本书第三卷中譯本的頁碼及題次——譯者.

繞它的长軸(即 x 軸)旋轉一周，这长軸同时也是螺距为 h 的螺旋曲面的軸．問这样得出的交綫如何？它的弧长是多少？

解：由正弦曲綫所得旋轉曲面的方程是 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$r=a\sin\frac{2\pi}{h}z$．螺旋曲面的方程是：$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=\frac{h\varphi}{2\pi}$．所以交綫的方程是$(2\varphi=t)$：

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}a\sin t\,\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}a(1-\cos t)\,\boldsymbol{j}+\frac{ht}{4\pi}\boldsymbol{k}.$$

弧长是
$$s=\int_{t=0}^{4\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{16\pi^2}}dt=\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

15. 試求錐面的方程，它的导綫是 $x=a\sinh t$，$y=a\cosh t$，$z=0$，頂点是$(0,0,h)$．提示：錐面上一点的位置矢量 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是由两个矢量合成的，一个是导綫上一点 P 的位置矢量 $\overline{OP}$，另一个矢量的方向是从 P 指向錐面的頂点 S．

解：$\overline{OP}=a\sinh u\boldsymbol{i}+a\cosh u\boldsymbol{j}$；$\overline{PS}=-a\sinh u\boldsymbol{i}-a\cosh u\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$．

所以 $\boldsymbol{r}(u,v)=\overline{OP}+v\overline{PS}=a\sinh u\cdot(1-v)\boldsymbol{i}+a\cosh u\cdot(1-v)\boldsymbol{j}+vh\boldsymbol{k}$．

16. 試求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与橢圓柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b^2\leqslant a^2)$ 的交綫的弧长．

解：a) 由这两个方程消去 x，就得到交綫是球面上的两个大圓，它們在平面 $z=\pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\cdot y$ 上．所以其周长为 $2\cdot 2\pi a$．

b) 如果把橢圓柱面的方程表作 $x=a\cos\varphi$，$y=b\sin\varphi$，那末由球面方程得到 $z=\sqrt{a^2-b^2}\sin\varphi$，又 $ds=ad\varphi$，所以对于 $\frac{z}{y}>0$ 或者 $\frac{z}{y}<0$ 都有 $s=\int_0^{2\pi}ad\varphi=2\pi a$．結果是：$4\pi a$．

17. 試决定曲面 $x^2+y^2-z=0$ 与 $4xy-z=0$ 的交綫(平面曲綫!) 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之間的弧长．提示：把 z 作为参数，并計

算 $s=\int_0^2\frac{ds}{dz}dz$.

解: 由曲面方程作加法及减法得到

$$(x+y)^2=\frac{3}{2}z,\quad (x-y)^2=\frac{z}{2};$$

所以有
$$x=\sqrt{z}\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\quad y=\sqrt{z}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

及
$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}\,dz=\sqrt{1+\frac{1}{4z}}dz.$$

作置换 $4z=\sinh^2 t$, 就得到

$$s=\frac{1}{2}\int_0^2\cosh^2 t dt=\frac{1}{4}\left[\operatorname{ar\,sinh}2\sqrt{z}+\sqrt{4z(1+4z)}\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\operatorname{ar\,sinh}2\sqrt{2}+6\sqrt{2})=2.56.$$

附言: 因为$\frac{y}{x}=2-\sqrt{3}=$常数, 交綫是平面曲綫; 这交綫是旋轉抛物面 $x^2+y^2-z=0$ 的軸截綫.

18. 試决定螺旋面(螺距为 h)与圆柱面(半徑为 a)的交綫, 而螺旋面的軸在圆柱面上.

解: 螺旋面的方程是 $z=\frac{h}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, 圆柱面的方程是 $(x-a)^2+y^2=a^2$. 令$x-a=a\cos t$, 那末就有 $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{4\pi}t$; 交綫是一螺旋綫(它的螺距等于所給螺旋面螺矩的一半).

19. 試計算下列交綫的弧长: a) 抛物柱面 $y^2=2px$ 与双曲抛物面 $xy=3pz$, b) 抛物柱面 $4ay=x^2$ 与双曲抛物面 $z^2=\frac{16}{9}xy$.

解: a) 由 $x=\frac{y^2}{2p}$, $z=\frac{y^3}{6p^2}$, 得到

$$s=\int_0^y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}\,dy=y+z.$$

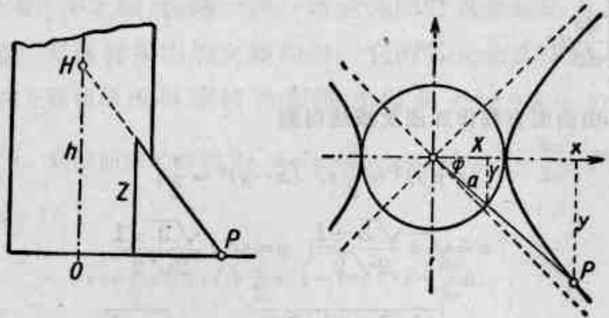

图 6

b) 由 $y=\frac{x^2}{4a}$, $z^2=\frac{4x^3}{9a}$, 相应地有 $s=x+y$.

20. 把等軸双曲綫 $x=a\cosh t, y=a\sinh t$ 从点$(0, 0, h)$投影到圓柱面 $X=a\cos\varphi, Y=a\sin\varphi$. 試决定投影曲綫的位置矢量, 于此我們把 t 当作参数.

解: 由图 6 得到比例关系

$$Z:h=(\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t}-a):(\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t}),$$

所以有

$$Z=h\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t}}\right)=h\left(1-\frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}}\right).$$

又因为 $$y:x=Y:X,$$

所以 $$\operatorname{tgh} t=\operatorname{tg}\varphi.$$

于是由 $\cos^2\varphi=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$有

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2 t}}=\frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \text{ 及 } \sin\varphi=\frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}}.$$

我們得到

$$X=a\frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}},\quad Y=a\frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \text{ 及 } \boldsymbol{r}(t)=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}.$$

21. 試证: 曲綫 $\boldsymbol{r}(t)=e^t\cos t\boldsymbol{i}+e^t\sin t\boldsymbol{j}+e^t\sqrt{3}\boldsymbol{k}$ 在一以 z 軸为軸的圓錐面上, 再决定这圓錐的頂角 α.

解: $x^2+y^2=e^{2t}$, $z^2=3e^{2t}$, 所以 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{1}{3}};\ \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

22. 問曲綫 $\boldsymbol{r}=t^2\cos(t^2)\boldsymbol{i}+t^2\sin(t^2)\boldsymbol{j}+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^3\boldsymbol{k}$ 在什么旋轉曲面上？試决定这曲面的子午綫.

解: $x^2+y^2=t^4$, $z=\frac{2\sqrt{2}}{3}t^3$. 曲面方程是

$$(x^2+y^2)^3=\frac{81}{64}z^4.$$

当 $x=0$ 时 $y^6=\frac{81}{64}z^4$. 子午綫 $3z=(2y)^{3/2}$ 是一条半立方抛物綫.

23. 一半徑为 a 的圓柱面上有一螺旋綫，当圓柱面展成平面时，它成为一抛物綫. 試求这螺旋綫的方程.

解: 抛物綫上一点的横坐标对应于圆柱底圆的弧长 $a\varphi$，纵坐标等于螺旋綫的高 z.

$$z=c(a\varphi)^2,\ \boldsymbol{r}(\varphi)=\{a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ ca^2\varphi^2\}.$$

24. 問双曲抛物面 $az=xy$ 在点 (b,c,z_0) 处的切平面方程如何？

解: $z_0=\frac{bc}{a}$; $a(z-z_0)=c(x-b)+b(y-c)$ 或 $cx+by-az=bc$.

25. 問螺旋面 $\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+cv\boldsymbol{k}$ 上任意一点处的切平面方程如何？这平面与原点的距离是多少？

解: 曲面的单位法綫矢量記作 $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}=\{\xi,\eta,\zeta\}$ 表示切平面上一点的位置矢量，那末切平面的方程是 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})=0$（参閱§2(10)）. 現在

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^0=(\{\cos v,\ \sin v,\ 0\}\times\{-u\sin v,\ u\cos v,\ c\})^0=$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & c\end{vmatrix}^0=\frac{c\sin v\boldsymbol{i}-c\cos v\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}}{\sqrt{c^2+u^2}},$$

所以切平面的方程是

$$c\sin v\xi-c\cos v\eta+u\zeta=cuv.$$

平面与原点的距离是$\dfrac{cuv}{\sqrt{c^2+u^2}}$.

26. 試討論正劈錐面 $\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+\varphi(v)\boldsymbol{k}$. 問切平面与原点的距离是多少? 并证: a) 若 $\varphi(v)=cv$, 就得到通常的螺旋曲面, b)若 $\varphi(v)=\sin 2v$, 就得到普虑克劈錐面(第一卷 §18.3). (参閱第 24 頁第 1、2、3 題.)

解: 由于当 $v=$常数时 $z=\varphi(v)=$常数及$\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}v=$常数, u 曲綫是与 z 軸垂直相交的直綫. 由于 $x^2+y^2=u^2$, z 是任意的, v 曲綫($u=$常数)是圓柱上的圓. 由

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v,\ \sin v,\ 0\},\quad \boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v,\ u\cos v,\ \varphi'(v)\},$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=1,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2=\varphi'(v)^2+u^2,$$

就有

$$ds^2=du^2+(\varphi'(v)^2+u^2)dv^2.$$

面积元素为

$$do=\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}\,dudv.$$

曲面的法綫矢量为

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\varphi'(v)\sin v\boldsymbol{i}-\varphi'(v)\cos v\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}}{\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}}.$$

切平面方程的海塞法式是

$$\frac{(x-u\cos v)\sin v\varphi'(v)-(y-u\sin v)\cos v\varphi'(v)+(z-\varphi(v))u}{\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}}=0.$$

它离原点的距离是 $l_0=\dfrac{u\varphi(v)}{\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}}$.

a) 当 $\varphi(v)=cv$, 就有 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=cv$, 所以 $z=c\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$;

b) 当 $\varphi(v)=\sin 2v$, 就有 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\sin 2v$, 所以 $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$(普虑克劈錐面).

27. 把悬鏈綫 $y=c\cosh\dfrac{x}{c}$繞 x 軸旋轉一周就得到一个曲面, 叫做悬鏈面. 把子午綫的弧长当作 u, 把地理經度記作 v, 試证这时弧长元素与螺旋面(§3.8)的弧长元素是相等的. (参閱第 25 頁第 5 題.)

解：先不取 u 而取緯圆的半徑 ρ 作为参数；于是按 § 3.7 有

$$y=\rho\cos v,\quad z=\rho\sin v,$$

又因为 $\rho=c\cosh\frac{x}{c}$，故 $x=c\operatorname{ar}\cosh\frac{\rho}{c}$.

$$\boldsymbol{r}=c\operatorname{ar}\cosh\frac{\rho}{c}\boldsymbol{i}+\rho\cos v\boldsymbol{j}+\rho\sin v\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_\rho=\left\{\frac{c}{\sqrt{\rho^2-c^2}},\ \cos v,\ \sin v\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{0,\ -\rho\sin v,\ \rho\cos v\},$$

$$E=\frac{\rho^2}{\rho^2-c^2},\ F=0,\ G=\rho^2,\ 及$$

$$ds^2=\frac{\rho^2}{\rho^2-c^2}d\rho^2+\rho^2dv^2.$$

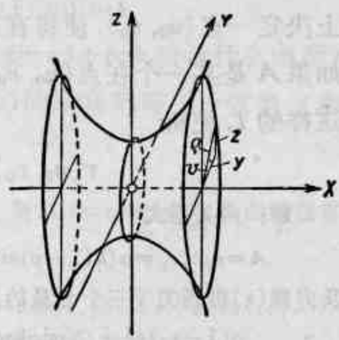

图 7

所以对于子午綫 $v=$ 常数，我們得到它的弧长

$$u=\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\sqrt{\rho^2-c^2}+常数.$$

因此 $ds^2=du^2+(u^2+c^2)dv^2$ 与螺旋曲面（§ 3.8）的弧长元素的平方一致．两个曲面叫做可以相互貼合的，如果适当选取参数后，它們的弧长元素可以写成同一形式，因而它們的点就可以这样地相互对应起来，使得相应的曲綫段有相同的弧长．悬鏈面与螺旋面因而是可以相互貼合的．

28. 把悬鏈綫 $y=\cosh x$ a）繞 x 軸，b）繞 y 軸旋轉一周．試决定这两个旋轉曲面的弧长元素与面积元素．

解：a）曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{u,\ \cosh u\cos v,\ \cosh u\sin v\};$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,\ \sinh u\cos v,\ \sinh u\sin v\},\ \boldsymbol{r}_v=\{0,\ -\cosh u\sin v,\ \cosh u\cos v\};$$

$$E=\cosh^2u=G,\quad F=0;$$

$$ds^2=\cosh^2u(du^2+dv^2),\quad do=\cosh^2u\,du\,dv.$$

b）曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{\operatorname{ar}\cosh u\cos v,\ u,\ \operatorname{ar}\cosh u\sin v\};$$

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{\frac{\cos v}{\sqrt{u^2-1}},\ 1,\ \frac{\sin v}{\sqrt{u^2-1}}\right\},\ \boldsymbol{r}_v=\{-\operatorname{ar}\cosh u\sin v,\ 0,\ \operatorname{ar}\cosh u\cos v\};$$

$$E=\frac{u^2}{u^2-1},\quad F=0,\quad G=(\operatorname{ar}\cosh u)^2;$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,\ \ do = \frac{u\operatorname{ar}\cosh u}{\sqrt{u^2-1}}dudv.$$

29. 試在曲面 $\boldsymbol{r}(u, v) = \{a(1-v)\sinh u,\ a(1-v)\cosh u,\ vh\}$ 上决定一点 (u_0, v_0)，使得在这点处，曲面的法綫通过原点．提示：如果 $\boldsymbol{A}$ 是某一个在点 (u_0, v_0) 处与曲面垂直的矢量，那末可以决定这样的 t，使得

$$\boldsymbol{r}(u_0, v_0) + t\boldsymbol{A}(u_0, v_0) = 0. \qquad (*)$$

解：由关系式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = a\{h(1-v)\sinh u,\ -h(1-v)\cosh u,\ -a(1-v)\}$$

及方程(*)得到关于三个分量的方程

$$a(1-v_0)(1+th)\sinh u_0 = 0,\ \ a(1-v_0)(1-th)\cosh u_0 = 0,$$
$$v_0h - ta^2(1-v_0) = 0,$$

从而，因为 v_0 必須不等于1，得 $t = \frac{1}{h}$，$u_0 = 0$，$v_0 = \frac{a^2}{a^2+h^2}$. 所以所求的点是

$$\boldsymbol{r}(u_0, v_0) = a\frac{h^2}{a^2+h^2}\boldsymbol{j} + h\frac{a^2}{a^2+h^2}\boldsymbol{k}.$$

它与原点的距离是

$$s = t\,|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{r}(u_0, v_0)| = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

30. 螺旋面

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \{u\cos v,\ u\sin v,\ cv\}$$

在点 $u_0 = 2c$，$v_0 = 0$ 处的法綫与这螺旋面还于无穷多个别的点处相交．試决定离这出发点最近的点 (u_1, v_1)．

解：由关系式 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0) + \lambda\boldsymbol{N}(u_0, v_0) = \boldsymbol{r}(u_1, v_1)$，又因为 $\boldsymbol{r}_u = \{\cos v, \sin v, 0\}$，$\boldsymbol{r}_v = \{-u\sin v, u\cos v, c\}$ 及 $\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \{c\sin v, -c\cos v, u\}$，所以在点 $u_0 = 2c$，$v_0 = 0$ 处成立等式：$2c = u_1\cos v_1$，$-\lambda c = u_1\sin v_1$，$2\lambda c = cv_1$；由此得到 $\operatorname{tg} v_1 = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{v_1}{4}$. 这方程有无穷多个解；每一解对应法綫与曲面的一个交点．离 (u_0, v_0) 最近的交点对应最小的解 v_1．把 v_1 看作是曲綫 $y = \operatorname{tg} v_1$ 与 $y = -\frac{1}{4}v_1$ 的交点的横坐标，于是用图解法得到 $v_1 = \pm 2.570$，所

以

$$\lambda=\pm 1.285,\quad u_1=\frac{2c}{\cos v_1}=-2.38c,$$

$$\boldsymbol{r}(u_1,v_1)=2c\boldsymbol{i}-(\pm 1.285c)\boldsymbol{j}\pm 2.570c\boldsymbol{k}.$$

31. 問 $\boldsymbol{r}=\varphi(u,v)\cos v\boldsymbol{i}+\varphi(u,v)\sin v\boldsymbol{j}+cv\boldsymbol{k}$ 表示什么曲面？試确定 $\varphi(u,v)$，使得曲面上坐标网 (u,v) 的网角都等于一常数.（参閱第 26 頁第 8 題.）

解：因为 $x^2+y^2=(\varphi(u,v))^2$，$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}v$，所以 $z=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，曲面是通常的螺旋曲面；

$\boldsymbol{r}_u=\{\varphi_u\cos v,\varphi_u\sin v,0\}$，$\boldsymbol{r}_v=\{\varphi_v\cos v-\varphi\sin v,\varphi_v\sin v+\varphi\cos v,c\}$.

因为 $E=\varphi_u^2$，$F=\varphi_u\varphi_v$，$G=\varphi_v^2+\varphi^2+c^2$，按 § 2.3, (5a)，就有

$$\cos\alpha=\frac{\varphi_v}{\sqrt{\varphi_v^2+\varphi^2+c^2}}.$$

要使这式子等于常数，那末作为是 v 的函数 φ 必須由微分方程 $\varphi_v^2=\operatorname{ctg}^2\alpha(\varphi^2+c^2)$ 来决定.

分离变量并对 v 作积分，得到

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+c^2}}=v\operatorname{ctg}\alpha+f(u),$$

其中 $f(u)$ 是 u 的任意函数，在这里把它当作是积分常数. 按第二卷 § 3(6)，这积分是 $\operatorname{ar\,sinh}\frac{\varphi}{c}$，所以得出

$$\varphi=c\sinh(v\operatorname{ctg}\alpha+f(u)).$$

特别地这对情形 $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ 也是适用的，于此 $\varphi=c\sinh(f(u))$ 变成 u 的一个任意函数.

32. 試证：曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{a(\cos u-v\sin u),a(\sin u+v\cos u),c(u+v)\}$$

是通常的螺旋綫的切綫曲面，就是說，它是由这螺旋綫的切綫所构成；并再算出它的弧长元素与面积元素.

解：螺旋綫的方程是

$$\boldsymbol{r}(u)=\{a\cos u,a\sin u,cu\},$$