21世纪高等职业教育数学规划教材

gaozhi jiaoyu

新编高等数学

主　编　刘书田

编　著　高淑娥 周友军 李文辉

北京大學出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪高等职业教育数学规划教材

新编高等数学

主编 刘书田
编著 高淑娥 周友军 李文辉

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学/刘书田主编.—北京：北京大学出版社，2009.7
(21世纪高等职业教育数学规划教材)
ISBN 978-7-301-14422-0

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 169142 号

书　　名：新编高等数学
著作责任者：刘书田 主编　高淑娥　周友军　李文辉 编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-14422-0/O·0767
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
787mm×960mm　16 开本　15.25 印张　340 千字
2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：25.00 元

内 容 简 介

本书是高等职业教育数学基础课高等数学的教材. 全书共分七章，内容包括：函数与极限，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，多元函数微积分，微分方程，无穷级数. 本书每节有“学习本节要达到的目标”，节后配有适量的 A、B 两组习题；每章后配有总习题，供教师和学生选用；书后附有习题参考答案，对较难的习题有习题解答，可供读者参考.

本书注重基础知识的讲述和基本能力训练，本着重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路，根据目前高等职业教育数学课的教学实际，并参照授课学时精选内容编写而成. 本书叙述由浅入深、通俗易懂，概念清晰，难点分散，例题典型又贴近实际，注意归纳数学思想方法、解题思路与解题程序，便于教师教学与学生自学.

本书可作为高职高专工科类、管理类各专业大学生高等数学的教材.

21 世纪高等职业教育数学规划教材书目

新编高等数学	刘书田主编	定价 25.00 元
新编微积分	刘书田主编	定价 19.00 元
新编线性代数与概率统计	刘书田主编	定价 22.00 元

前　言

当前，我国高等职业教育蓬勃发展，教学改革不断深入，高等职业院校数学基础课的教学理念、教学内容以及教材建设也孕育在这场变革之中. 目前高职院校正在酝酿或进行的教学内容和授课学时的调整是教学改革中的一部分，这势必要求教材内容也应反映相应的改革精神. 为了适应高职数学基础课教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质应用型人才，我们应北京大学出版社的邀请，经统一策划、集体讨论，分工编写了这套《21 世纪高等职业教育数学规划教材》. 这套教材共分三册，其中包括《新编高等数学》、《新编微积分》、《新编线性代数与概率统计》.

本套教材本着重基础知识、重基本训练、重素质、重能力、重应用、求创新的总体思路，在认真总结高职数学基础课教学改革的经验基础上，由长期在教学第一线具有丰富教学经验的资深教师编写.

本书是《新编高等数学》分册，它具有以下特点：

1. 以高职高专学生的基础知识状况、教学课时相应调整、与后继课程相衔接为依据，调整结构体系，精选教材内容；体现了工科数学基础课的特点与基本要求，并与生产、管理的实际需求相适应，力求实现基础性、科学性、系统性的和谐与统一.

2. 按照认知规律，以几何直观、物理背景和典型例题作为引入数学概念的切入点；对重要内容的讲解简洁、透彻，特别是对高等数学在几何、物理、工程、经济等领域中的应用给予翔实的讲述，便于学生理解与掌握.

3. 内容叙述由浅入深、通俗易懂、难点分散，注意归纳数学思维方法及解题程序.

4. 强调基础训练和基本能力的培养. 紧密结合数学概念、定理和运算法则配置适量的例题，按节配置 A、B 两组习题，每章配有总习题，书末附有习题答案和较详细的提示，便于读者参考.

本书的上述特点便于任课教师根据教学课时选择和安排教学内容，同时也便于学生自学.

本书由刘书田、高淑娥、周友军、李文辉执笔编写，并由主编刘书田对全书进行了统稿，经修改后定稿. 参加本书编写工作的还有冯翠莲、张爱香.

本套教材在编写过程中得到了北京工业大学实验学院、北京交通职业技术学院、首都经济贸易大学密云分校有关领导的大力支持，同时也得到了北京大学出版社的积极支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，不足之处恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 5 月

目 录

第一章

函数与极限

微积分学研究的对象是函数，函数极限和函数连续性的基本内容是研究微积分学所必须具备的知识.

本章先复习函数概念和初等函数；然后讲述函数的极限概念及其运算，并在此基础上导出函数的连续性概念及连续函数的性质.

§1.1 函　　数

【学习本节要达到的目标】

1. 理解函数定义，反函数定义和复合函数定义.
2. 了解函数有界性的意义.
3. 理解初等函数的意义.
4. 熟练掌握将初等函数按基本初等函数复合与四则运算形式分解.

一、函数概念

1. 函数定义

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的**非空数集**. 若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的**对应法则** f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为该函数的**定义域**，有时也记为 D_f.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集. 由此，若 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，则称该函数在 x_0 **有定义**，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**，记为

$$f(x_0) \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0}.$$

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Y = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为该函数的**值域**. 若 $x_0 \overline{\in} D$,则称该函数**在点** x_0 **没有定义**.

上述定义,简言之,**函数是从自变量的输入值产生出输出值的一种法则或过程**.

由函数的定义可知,决定一个函数有**三个因素**:定义域 D,对应法则 f 和值域 Y. 注意到每一个函数值都可由一个 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定,于是给定 D 和 f,则 Y 就相应地被确定了;从而定义域 D 和对应法则 f 是决定一个函数的**两个要素**. 称**两个函数相等**,是指它们的定义域相同且对应法则也相同.

直角坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形或图像**. 函数的图形一般是坐标平面上的一条曲线(包括直线).

例 1 圆的半径 r 和它的面积 A 是两个变量,若将 r 视为自变量,A 视为因变量,它们之间的函数关系是

$$A = \pi r^2,\quad r \in (0, +\infty),$$

其中 π 是一个定值. 当 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一值时,按上式确定的对应规律,A 就有唯一确定的值与之对应.

例 2 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

称为**绝对值函数**. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $Y=[0,+\infty)$,其图形如图 1-1.

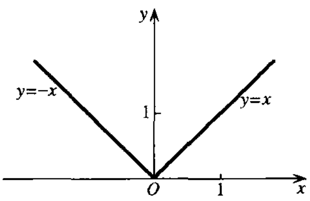

图 1-1

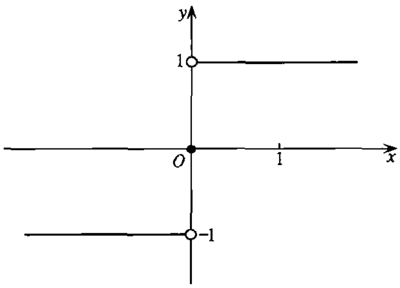

图 1-2

例 3 函数

$$f(x) = \mathrm{sgn}\,x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为**符号函数**. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$;值域 $Z=\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-2 所示.

对于符号函数,当 x 为任何实数时,下述关系总成立:

$$x = \mathrm{sgn}x \cdot |x|.$$

例如,当 $x=4$ 时,$\mathrm{sgn}4 \cdot |4|=1\cdot 4=4$;当 $x=-4$ 时,$\mathrm{sgn}(-4)\cdot|-4|=-1\cdot 4=-4$.

例 2 是用两个数学式子表示一个函数,例 3 是用三个数学式子表示一个函数,这样的函数称为**分段函数**.

若一个函数要用两个或多于两个数学式子来表示,即一个函数,在其定义域的不同部分用不同的数学式子来表示,称为**分段函数**.

例 4 设函数

$$y = f(x) = [x] = n, \quad n \leqslant x < n+1,$$

这里 n 是整数. 记号 $y=[x]$表示"y 是不超过 x 的最大整数". 由于 y 只取整数,也称为**取整函数**.

由于 n 是整数,且 $n\leqslant x<n+1$,所以该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 若 x 是整数,即 $x=n$ 时,则 $y=n$;若 x 不是整数,可把 x 看做是一个整数和一个非负小数之和,其函数值取 x 的整数部分. 显然它的值域 Y 是全体整数 $\mathbf{Z}$. 比如

当 $x=-3$ 时,按定义,$[-3]=-3$;

当 $x=-4.3$ 时,因 $x=-5+0.7$,故$[-4.3]=-5$;

当 $x=3$ 时,按定义,$[3]=3$;

当 $x=2.8$ 时,因 $x=2+0.8$,故$[2.8]=2$.

该函数的图形如图 1-3 所示,这图形呈阶梯形,在 x 取整数值处,图形有跳跃度为 1 的跳跃.

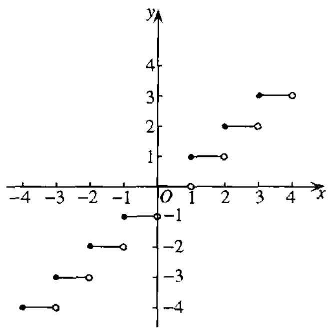

图 1-3

2. 反函数

在一个函数关系中的两个变量 x 与 y,它们的地位是相对的. 可以把变量 y 看做是变量 x 的函数,也可把变量 x 看做是变量 y 的函数. 这样,由函数的定义就引出**反函数的定义**. 一般可如下叙述:

已知函数

$$y = f(x), \quad x\in D,\ y\in Y.$$

若对每一个 $y\in Y$,D 中只有一个 x 值,使得

$$f(x) = y$$

成立,这就以 Y 为定义域确定了一个函数,这个函数称为**函数** $y=f(x)$的**反函数**,记为

$$x = f^{-1}(y), \quad y\in Y.$$

按习惯记法,把 x 做自变量,y 做因变量,函数 $y=f(x)$的反函数记为

$$y = f^{-1}(x), \quad x\in Y.$$

若函数 $y=f(x)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)$,则 $y=f(x)$也是函数 $y=f^{-1}(x)$的反函数,或者称它们互为反函数,且

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

关于反函数，还需**明确以下两点**：

(1) **单调函数必有反函数**，而且单调增加(减少)函数的反函数也是单调增加(减少)的.

(2) 在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形**关于直线** $y=x$ **对称**.

例 5 在前述例 1 中，是将面积 A 视为半径 r 的函数

$$A = f(r) = \pi r^2, \quad r \in (0, +\infty), A \in (0, +\infty).$$

若将 A 视为自变量，r 视为因变量，则有函数关系

$$r = f^{-1}(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}, \quad A \in (0, +\infty), r \in (0, +\infty).$$

函数 $A=f(r)$ 与 $r=f^{-1}(A)$ 互为反函数.

3. 复合函数

已知两个函数

$$y = f(u), \quad u \in D_f;$$
$$u = \varphi(x), \quad x \in D_\varphi,$$

若 $D=\{x \mid \varphi(x) \in D_f, x \in D_\varphi\} \neq \varnothing$，即 D 表示 D_φ 中使 $\varphi(x) \in D_f$ 的 x 的全体所构成的非空数集，则确定在 D 上的函数，记为

$$y = f(\varphi(x)), \quad x \in D,$$

称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**. 通常称 $f(u)$ 是**外层函数**，称 $\varphi(x)$ 是**内层函数**，称 u 是**中间变量**.

函数 $y=f(\varphi(x))$ 看做是将函数 $\varphi(x)$ 代换函数 $y=f(u)$ 中的 u 得到的.

例如，两个函数

$$y = f(u) = \sqrt{u}, \quad u \in D_f = [0, +\infty);$$
$$u = \varphi(x) = 4 - x^2, \quad x \in D_\varphi = (-\infty, +\infty).$$

因 $D=\{x \mid \varphi(x) \in D_f, x \in D_\varphi\} = [-2, 2] \neq \varnothing$，所以

$$y = f(\varphi(x)) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in D = [-2, 2]$$

就是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=4-x^2$ 经过复合而成的复合函数.

再看下面的例题. 对两个函数

$$y = f(u) = \sqrt{u-2}, \quad u \in D_f = [2, +\infty);$$
$$u = \varphi(x) = \sin x, \quad x \in D_\varphi = (-\infty, +\infty).$$

因对任一 $x \in (-\infty, +\infty)$，$\sin x \overline{\in} [2, +\infty)$，即 $D=\{x \mid \varphi(x) \in D_f, x \in D_\varphi\} = \varnothing$，故 $y=\sqrt{u-2}$ 与 $u=\sin x$ 就不能构成复合函数.

复合函数不仅可由两个函数复合而成，也可由多于两个函数复合而成. 例如，由三个

函数

$$y = e^u, \quad u = v^2, \quad v = \sin x$$

可以复合成函数 $y=e^{\sin^2 x}$.

二、有界函数

在微积分学中，经常要用到函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性，其中前三个性质我们已经很熟悉，这里只讲述函数的有界性.

在区间$(-\infty,+\infty)$上，正弦函数 $y=\sin x$ 的图形(图 1-4)介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有

$$|\sin x| \leqslant 1,$$

这时称 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是**有界函数**. 在区间$(-\infty,+\infty)$内，函数 $y=x^3$ 的图形(图 1-5)向上、向下都可以无限延伸，不可能找到两条平行于 x 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是**无界函数**.

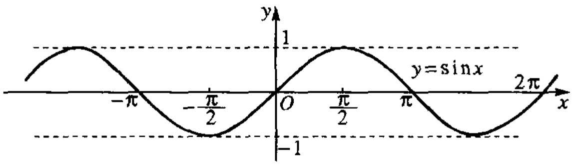

图 1-4

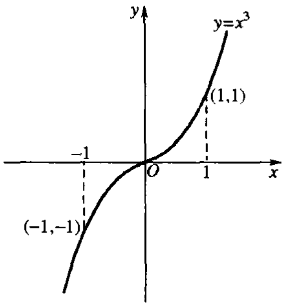

图 1-5

一般情况，给出有界函数的如下**定义**：

设函数 $f(x)$在区间 I①上有定义，若存在正数 M，使得对任意的 $x\in I$，有

$$|f(x)| \leqslant M \quad (\text{可以没有等号}),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**有界函数**；否则称 $f(x)$是**无界函数**.

有界函数的图形**必介于两条平行于 x 轴的直线** $y=-M(M>0)$**和** $y=M$ **之间**.

由函数有界性定义知，对一个函数，必须就自变量的某个取值范围内讨论其有界性. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$在有定义的区间$[2,+\infty)$内有界：

---

① 若我们讨论的问题在任何一种区间(有限区间：(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$或无限区间：$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$)都成立时，将用字母 I 表示这样一个泛指的区间.

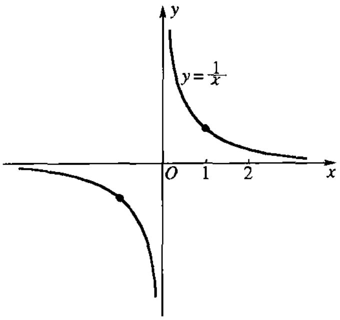

图 1-6

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2};$$

而在有定义的区间(0,1)内就无界(图 1-6).

三、初等函数

下列五类函数称为**基本初等函数**.

(1) 幂函数：$y=x^{\mu}$ (μ 为实数).

(2) 指数函数：$y=a^{x}$ ($a>0$,且 $a\neq1$).

本课程常常用以 e 为底的指数函数：$y=\mathrm{e}^{x}$ (e = 2.71828182859…是一个无理数).

(3) 对数函数：$y=\log_{a}x$ ($a>0$,且 $a\neq1$).

本课程常常用以 e 为底的对数函数：$y=\ln x$.

(4) 三角函数：正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$.

(5) 反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\, x$ 等.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的函数,统称为**初等函数**.例如

$$y=2^{\sin^2 x},\quad y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

都是初等函数.

本课程研究的函数,**主要是初等函数**.为了需要,今后经常要将一个给定的函数看成是由若干个基本初等函数经四则运算与复合而成的形式,从而把它分解成基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式.

例 6 将下列函数按基本初等函数复合与四则运算形式分解：

(1) $y=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$;　　(2) $y=\arctan^2\dfrac{2x}{1-x^2}$.

解 (1) 该函数由基本初等函数复合而成.从内层向外层分解.

设 $v=\dfrac{1}{x}$,则 $y=\mathrm{e}^{\cos v}$;设 $u=\cos v$,则 $y=\mathrm{e}^{u}$.于是所给函数由下列各式构成：

$$y=\mathrm{e}^{u},\quad u=\cos v,\quad v=\frac{1}{x}.$$

(2) 该函数由基本初等函数经四则运算与复合而成.从外层向内层分解.

设 $y=u^2$,则 $u=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;设 $u=\arctan v$,则 $v=\dfrac{2x}{1-x^2}$.因 $v=\dfrac{2x}{1-x^2}$已是经基本初等函数四则运算而成,无须再分解.于是所给函数由下列各式构成：

$$y=u^2,\quad u=\arctan v,\quad v=\frac{2x}{1-x^2}.$$

习 题 1.1

A 组

1. 求下列函数的反函数并写出其定义域和值域：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$； (2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求：

(1) $f(x)$的定义域； (2) $f(0),f(\pi),f(1),f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$，其中 a,b 为待定常数：

(1) 已知 $f(-3)=f(2)=0$，求 $f(x)$； (2) 求 $f(-x),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f(x_0+h)-f(x_0)$.

4. 设 $f(x)=\sin x$，$\varphi(x)=\ln(2+x)$，求 $f(f(x)),f(\varphi(x)),\varphi(f(x))$.

5. 确定函数 $f(x)=\ln x$ 在给定区间上的有界性：

(1) $(0,+\infty)$； (2) $(0,1)$； (3) $(1,2)$.

6. 将下列函数按基本初等函数复合形式分解：

(1) $y=\cos\dfrac{1}{x}$； (2) $y=e^{\sqrt{x}}$； (3) $y=\ln\tan\dfrac{1}{x^2}$； (4) $y=(\arcsin e^x)^2$.

7. 将下列函数按基本初等函数复合及四则运算形式分解：

(1) $y=\sqrt[3]{3+2x}$； (2) $y=\ln\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$； (3) $y=\log_a e^{\sqrt{x^2+1}}$； (4) $y=2^{(x+\tan x)^2}$.

B 组

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ e^x, & x>0,\end{cases}$ 且 a 为任意实数，$h>0$，求：

(1) 函数的定义域； (2) $f(0),f(a),f(h),f(-h)$.

2. 确定下列函数在其定义域内是否有界：

(1) $y=\sin\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\arctan x$； (3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$； (4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.