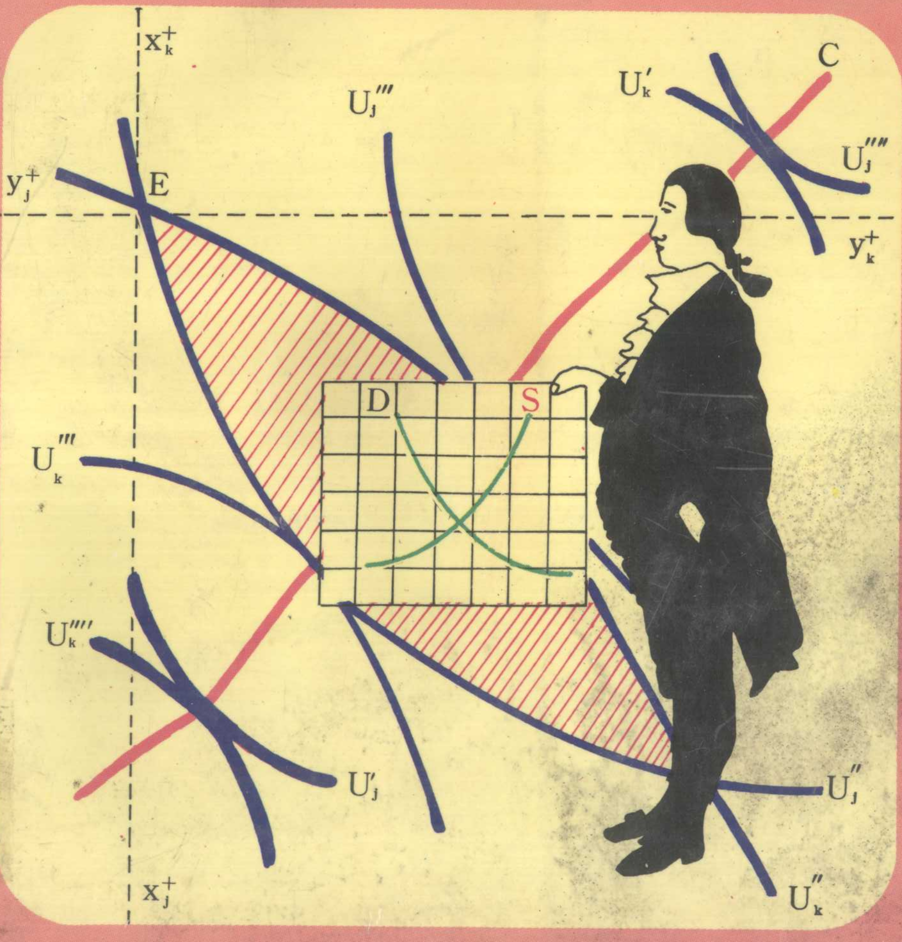
比較靜態分析

經濟數學

石齊平 編著



比較靜態分析

經濟數學

石齊平 編著

本書作者石齊平教授其他著作：

1. 當代個體經濟理論與應用（三民書局）
2. 當代個體經濟理論與應用（習題附册）（三民書局）
3. 當代總體經濟理論與政策（三民書局）
4. 當代計量經濟學（三民書局）
5. 經濟現代化之路（三民書局）

經濟數學

著者兼發行人：石　齊　平

直接訂購處：直接郵撥 135 元
台北郵政劃撥儲金111094號　石齊平收

總經銷：三民書局

印刷者：文冠打字印刷公司

定價：150 元

中華民國七十四年六月出版

自　序

這是一套分析與討論經濟分析中數量方法的書。近數年來，鑒於各種數學方法在經濟學各領域中，應用日見普及，爲了要了解許多在微積分中未談或未能深入談論，但在經濟分析中卻又廣泛使用的數學方法，各大學經濟等相關科系，因而多增設「數理經濟學」或所謂「經濟數學」的課程。本書即爲作者在大學中所授相關課程之教材整理而成。

經濟分析——包括個體、總體、貨幣理論、財政理論、國際經濟理論及國際金融等——中，所常使用的數學方法，主要有比較靜態分析、線性代數、動態分析（包括差分方程、微分方程、變分法、最適控制）及數學規劃等四種。比較靜態分析是本套書的第一册。其他數册計劃在未來陸續刊行。

經濟分析的核心概念之一是均衡。均衡本身是靜態的，在其遭遇外力衝擊後，均衡遭到破壞。經過一段時間，當外在衝擊的效果已完全被經濟體系消納吸收後，體系本身會達到另一均衡狀態。爲了解該一外在衝擊效果，我們可用某些數學方法將遭到衝擊前後的兩種靜態狀況作一比較，這種數學方法稱爲比較靜態分析方法。

本册由四章構成。第一章是關於函數、導數及微分的複習，以此爲基礎，在第二章中討論 Jacobian ，二次式與極值問題。爲求極值，我們討論有關的第一階與第二階條件；在第三章中可以發現，極值問題的第一階條件即爲比較靜態分析的均衡方程式，而第二階條件則提供判斷比較靜態乘數符號的情報；第四章則就新近發展的定性經濟

模型做一介紹，這種分析方法在未來有相當的發展潛力。通篇就個體經濟及總體經濟的例子逐一詳細解說，每章之後並附習題供讀者演練，期讀者在充分了解基本概念與熟悉運用技巧之後，即具備充分能力，以獨立建立模型並進行比較靜態分析。附錄一是所有習題的解答。

本書之完成要感謝前輩學人在經濟數學方法上所做的努力，特別是對於那些本書所引用的主要參考資料的作者。我也要感謝石義行先生，他鼓勵我開經濟數學方法的課程，沒有這段因緣，此書不會在現在問世。趙志鉅先生、沈瑞畿先生及陳登源先生仔細閱讀了本書大部份的原稿，並提出了許多有價值的指正與建議，作者深致謝忱。本書的手稿，承邢慰祖、黃芝宜、郭恆慶及陳來發四位同學，不辭辛勞地耐心謄稿與校對，十分感激。家母惠題書名，我更是衷心銘感。當然，書中若有任何錯誤，都應由我個人負責。同時，我也誠懇地希望讀者能惠予指正。

石齊平

一九八五年六月

經濟分析中的數學方法

比較靜態分析

目　次

第一章

函數、導數與微分

1.1　一個變數之函數

1.2　超過一個變數之函數

1.3　複合函數

1.3.1　一個變數之函數

1.3.2　一個以上變數之函數

1.4　導數

1.5　複合函數之導數

1.5.1　一個變數之函數

1.5.2　一個以上變數之函數

1.6　一個變數函數之微分

1.6.1　一階微分

1.6.2　高階微分

1.7　一個以上變數函數之微分

1.1 一個變數之函數

一個變數的函數是許多重要數學概念的基礎，它的定義是(一)我們有一組數字，稱爲函數的定義域（domain），及(二)透過某一法則，有而且只有一個數字與該定義域中的每一數字發生關聯。正式的寫法是

$$y = f(x) \qquad\qquad x \text{ 在 } D \text{ 之中}$$

式中 D 表示函數的定義域，x 表示在 D 中的任何數字，而 $f(x)$ 則表示一種法則，經由此法則，可由每一 x 得到一個唯一的數字——以 y 表示。

我們稱 x 爲自變數（independent variable 或 argument），y 爲依變數（dependent variable）。當 x 在 D 之範圍內變動時，我們所得到的所有相應 y 值稱爲函數的值域（range）。爲方便起見，有時可把 $y = f(x)$ 逕寫爲 $f(x)$ 或更簡單的 f，

例如

$$y = 3x^2 + 6 \qquad\qquad 3 < x < 6$$

即爲一函數，此函數之 D 即爲在 3 與 6 間的一組數字（實數集合），

* 此處我們只考慮實數單值函數而不考慮複數的情況。

函數的法則由 $y=3x^2+6$ 表示。為得 y 值，可先將 x 平方，乘以3，再加上6。

下式則不是一個函數

$$y=\frac{1}{x} \qquad -2<x<4$$

因為在此情況中，當 x 為0時，我們無法經由此一函數決定 y 值。然而若，

$$y=\frac{1}{x} \qquad -2<x<0 \text{ 或 } 0<x<4$$

就是一函數了。它的 D 或介於 -2 與0之間或介於0與4之間，因此0不包括在內。根據此一法則 $y=\frac{1}{x}$，就可以為每一定義域中之 x，決定單一的 y 值。

下式也是一個函數

$$y=\frac{1}{x} \qquad \text{當} -2<x<0 \text{ 或 } 0<x<4$$

$$=0 \qquad \text{當 } x=0$$

此處 x 之 D 仍由 -2 到4，除0之外；此一法則經由 $y=\frac{1}{x}$ 決定 y 值，當 $x=0$ 時，此一法則決定 $y=0$。因此，透過此一法則，可以為 D 中之每一 x 決定一個單一的 y 值。

另一個函數的例子是

$$y=6 \qquad -\infty<x<\infty$$

式中 x 之 D 為所有數字的集合，然而就每一 x 而言，均有一個單一的 $y=6$ *。

* 稱為常數函數（constant function）。

在以下行文中，爲了簡化，均不明顯標示D之範圍。讀者可自行排斥基本上不屬於D之範圍，例如，若有一函數爲$y = 1/(x-3)$，則我們知道x的D並不包括3；若有一函數$y=\sqrt{x}$，則x的D必爲所有等於或大於0的數字，因爲此處我們不考慮複數。

1.2 超過一個變數之函數

幾個變數之函數的定義與一個變數之函數定義極其相似。

定義：一個n - 向量（n - vector）即爲一n個數字之有序集合（ordered set）。

因此，2 - 向量即爲兩個數字的序對（ordered pair），由於必須是有序的，故〔2,3〕與〔3,2〕雖均爲2 - 向量，但兩者不相等。又如

$$[x_1, x_2, x_3] \qquad 5<x_1<10,\ 2<x_2<6,\ 3<x_3<5$$

表示此一3 - 向量是按序分別由介於5到10，2到6與3到5的三個數字所構成的，例如〔6,4,4〕，〔7,5,4〕均屬於該一3 - 向量之集合。

再舉一例，設有一4 - 向量，定義爲

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leqq 20$$

則〔2,1,3,2〕屬於該一4 - 向量之集合，而〔3,4,3,2〕則不是。

現在我們可定義n個變數之函數了。它的定義是㈠我們有一個n - 向量之集合，這稱爲函數之定義域（D）與㈡透過某一法則，有而且只有一個數字與D中之每一n - 向量發生關聯。正式的寫法是

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad [x_1, x_2, \cdots, x_n] \text{ 在}D\text{之中}$$

式中D爲函數之定義域，〔$x_1, x_2, \cdots, x_n$〕代表在D中之任何n - 向量，而f〔$x_1, x_2, \cdots, x_n$〕則表示一法則，經由此一法則，可由每一〔$x_1, x_2, \cdots, x_n$〕得到一個單一的數字y。同樣地，x_1, x_2,

$\cdots, x_n$ 稱作自變數，而 y 稱爲依變數。當〔$x_1, x_2, \cdots, x_n$〕在 D 之範圍內變動時，我們所得到的所有相應變動的 y 值，稱爲函數的值域。

一個兩變數函數的例子如下：

$$z = 2x^2 + 3xy + y^2 \qquad 2 < x < 20 \,,\, 3 < y < 10$$

此一函數之 D 爲所有 x 介於 2 與 20，y 介於 3 與 10 間所構成之 2 - 向量〔x, y〕的集合。我們可以很容易地透過此一函數找出對應于此一 D 之所有 z 值。又例如

$$y = \frac{3x_1^2 + 2x_2^3 + 3x_3 + 4x_4^2}{2(x_1 - 7)(x_2 - 6)} \qquad 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 < 5$$

此一函數之 D 爲所有能滿足 $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 < 5$ 條件之 x_1，x_2，x_3，x_4 所構成的 4 - 向量〔x_1, x_2, x_3, x_4〕。但很明顯地，D 並不包括當 $x_1 = 7$ 或 $x_2 = 6$ 時的情況。又如

$$z = 8 \qquad 1 < x < 6 \,,\, 2 < y < 3$$

爲一常數函數，因爲不論 D 中之〔x, y〕爲何，此一法則決定 z 必爲 8。

1.3　複合函數

1.3.1　一個變數之函數

設有下列兩函數

$$z = 4y^2 + 6 \qquad 1 < y < 8$$

與

$$y = 2x \qquad 1 < x < 3$$

當第二函數中之 x 在 1 與 3 間變動時，y 在 2 與 6 間變動。從而所有的這些 y 值均落於第一函數之 D 中。這種情形，我們定義 z 是 x 之複合函數（composite function）或 z 爲 x 之函數的函數（function of a function of x)，亦可寫為

$$z = 4(2x)^2 + 6 = 16x^2 + 6 \qquad 1 < x < 3$$

若以一般化的形式表示，令 z 為在某些 D 中之 y 的函數，以 D_y 表示此一函數之定義域，則可寫為 $z = f(y)$ ，y 在 D_y 中。此外，又設 y 為在某些 D_x 中之 x 的函數，即 $y = g(x)$ ，x 在 D_x 中，並且 $y = g(x)$ 之值域被包括於 D_y 之中。則下式即表示 z 為 x 之複合函數

$$z = f\,[(g(x)] \qquad x \text{ 在 } D_x \text{ 之中}$$

另舉一例，若

$$z = 2y^3 + 3y^2 + 4 \qquad y \text{ 在 } D_y \text{ 之中}$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \qquad x \text{ 在 } D_x \text{ 之中}$$

並且若 x 在 D_x 中變動時，$y = x^2 + 3x + 2$ 在 D_y 中變動，則複合函數可寫為

$$z = 2(x^2 + 3x + 2)^3 + 3(x^2 + 3x + 2)^2 + 4 \qquad x \text{ 在 } D_x \text{ 之中}$$

1.3.2 一個以上變數之函數

複合函數也適用於一個變數以上的情況，設有下列三函數

$$z = 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad 4 < x < 12\,,\ 7 < y < 18$$

$$y = 2u + 3v \qquad 1 < u < 2\,,\ 2 < v < 4$$

$$x = u + 2v \qquad 1 < u < 2\,,\ 2 < v < 4$$

我們很容易可以看出，當 u ，v 在第二、第三函數之 D 中變動時，x 與 y 在第一函數中之 D 變動。因此，可定義複合函數為

$$z = 3(u + 2v)^2 + 2(u + 2v)(2u + 3v) + (2u + 3v)^2$$

$$1 < u < 2\,,\ 2 < v < 4$$

以下我們不設定超過一個函數以上函數的一般形式，而藉用若干例子將有關的複合函數分為六種類型，這樣做雖然有點繁瑣但對於以

後比較靜態的分析則有很大助益。

類型一：

設有以下函數

$z=f(y_1,y_2,y_3)$　　　　〔y_1,y_2,y_3〕在D_y之中

$y_1=g_1(x_1,x_2)$　　　　〔x_1,x_2〕在D_{x1}之中

$y_2=g_2(x_1,x_2)$　　　　〔x_1,x_2〕在D_{x2}之中

$y_3=g_3(x_1,x_2)$　　　　〔x_1,x_2〕在D_{x3}之中

假設當x_1與x_2在D_x中變動時*，後三個函數中的y_1，y_2與y_3在D_y中變動，則定義複合函數爲

$$z=f[g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2),g_3(x_1,x_2)],$$

〔x_1,x_2〕在D_x之中

這種類型的複合函數，在第一個函數中之所有自變數在第二套函數中都依存於另一些不同的變數。

剛才所舉的數字例即屬此一類型。可再舉一稍有不同但仍歸於此一類型的例子，如

$z=\sqrt{y_1y_2y_3^2}$　　　　$0<y_1<10,0<y_2<20,0<y_3<20$

$y_1=2x_1$　　　　$2<x_1<3$

$y_2=x_1+3x_2$　　　　$2<x_1<3,1<x_2<4$

$y_3=4x_3$　　　　$0<x_3<4$

此時，複合函數可寫爲

$$z=\sqrt{(2x_1)(x_1+3x_2)(4x_3)^2}$$

$$2<x_1<3,1<x_2<4,0<x_3<4$$

類型二：

設有下列函數

*此處D_x應爲D_{x1}，D_{x2}及D_{x3}的交集，即$D_x=D_{x1}\cap D_{x2}\cap D_{x3}$。

$z=f(y_1,y_2,y_3,y_4)$ 　　〔y_1,y_2,y_3,y_4〕在D_y 之中

$y_1=g_1(x_1,x_2)$ 　　〔x_1,x_2〕在D_x 之中

$y_2=g_2(x_1,x_2)$ 　　〔x_1,x_2〕在D_x 之中

若當 x_1 與 x_2 在 D_x 中變動時，後兩個方程式所關聯之 y_1 與 y_2 之變動，使〔y_1,y_2,y_3,y_4〕在 D_y 中變動，則可定義複合函數為

$z=f[g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2),y_3,y_4]$

〔x_1,x_2〕在 D_x 之中

〔$g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2),y_3,y_4$〕在 D_y 之中

此處 z 依存於 x_1,x_2,y_3 與 y_4，而函數之D則為使〔x_1,x_2〕在D_x中及〔$g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2),y_3,y_4$〕在$D_y$ 中之所有〔x_1,x_2,y_3,y_4〕所構成之集合。

在此一類型的複合函數中，某些但並非全部的自變數依存於一些其他的變數。舉一數字例：

$z=3y_1^2+2y_2^3+y_3^2+y^4$ 　　$0<y_1<10,\ -2<y_2<15$

$-1<y_3<20,\ 0<y_4<22$

$y_1=2x_1^2+x_2$ 　　$0<x_1<1,\ 0<x_2<2$

$y_2=x_2$ 　　$0<x_2<1,\ 0<x_2<2$

於是，複合函數為

$z=3(2x_1^2+x_2)^2+2x_2^3+y_3^2+y_4$

$0<x_1<x_1,\ 0<x_2<2$

$-1<y_3<20,\ 0<y_4<22$

類型三：

設有下列函數：

$z=f(y_1,y_2,y_3,y_4)$ 　　〔y_1,y_2,y_3,y_4〕在D_y 之中

$y_1=g_1(x_1,x_2,x_3,y_3,y_4)$ 　　〔x_1,x_2,x_3,y_3,y_4〕在D_{xy} 之中

$y_2=g_2(x_1,x_2,x_3,y_3,y_4)$ 　　〔x_1,x_2,x_3,y_3,y_4〕在D_{xy}之中

此處我們仍然假設，當〔x_1, x_2, x_3, y_3, y_4〕在D_{xy}中變動，從而在後兩個函數中的y_1, y_2與〔x_1, x_2, x_3, y_3, y_4〕中之y_3, y_4均使得〔y_1, y_2, y_3, y_4〕在D_y中變動。因此，可得複合函數如下：

$$z = f\left[g_1(x_1, x_2, x_3, y_3, y_4), g_2(x_1, x_2, x_3, y_3, y_4), y_3, y_4\right]$$

$$[x_1, x_2, x_3, y_3, y_4]\text{在}D_{xy}\text{之中}$$

在此一類型的複合函數中，原函數中的某些變數依存於(1)其他的變數及(2)原函數中所有剩餘的變數。舉數字例如下：

$$z = 2y_1 + y_2 + 3y_3 \qquad 0<y_1<20, 0<y_2<25, 0<y_3<2$$

$$y_1 = 3x_1 + 2x_2 + y_3 \qquad 0<x_1<1, 0<x_2<1, 0<y_3<2$$

$$y_2 = x_1 + 2y_3 \qquad 0<x_1<1, 0<x_2<1, 0<y_3<2$$

於是，複合函數為

$$z = 2(3x_1 + 2x_2 + y_3) + (x_1 + 2y_3) + 3y_3$$

$$0<x_1<1, 0<x_2<1, 0<y_3<2$$

類型四：

設有下列函數

$$z = f(y_1, y_2, y_3, y_4) \qquad [y_1, y_2, y_3, y_4]\text{在}D_y\text{之中}$$

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, y_3) \qquad [x_1, x_2, y_3]\text{在}D_{xy}\text{之中}$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_2, y_3) \qquad [x_1, x_2, y_3]\text{在}D_{xy}\text{之中}$$

假設對應著D_{xy}中的每一〔x_1, x_2, y_3〕，在後兩個函數中之y_1與y_2值與y_4配合能使〔y_1, y_2, y_3, y_4〕均在D_y中變動，則複合函數可寫為：

$$z = f\left[g_1(x_1, x_2, y_3), g_2(x_1, x_2, y_3), y_3, y_4\right]$$

$$[x_1, x_2, x_3]\text{在}D_{xy}\text{之中}$$

$$[g_1(x_1, x_2, y_3), g_2(x_1, x_2, y_3), y_3, y_4]\text{在}D_y\text{之中}$$

在此一類型之複合函數中，部份的y依存於(1)其他變數x與(2)原函數中剩下的一部份（非全部）y。

例如（有關之定義域省略）

$$z=4y_1^2+2y_2^2+3y_3^2+2y_4$$

$$y_1=2x_1+x_2+3y_3$$

$$y_2=x_1+2x_2+2y_3$$

可得複合函數爲

$$z=4(2x_1+x_2+3y_3)^2+2(x_1+2x_2+2y_3)^2+3y_3^2+2y_4$$

類型五：

設有函數如下：

$z=f(y_1,y_2,y_3,y_4)$ 　　〔y_1,y_2,y_3,y_4〕在D_1之中

$y_1=g_1(y_3,y_4)$ 　　〔y_3,y_4〕在D_2之中

$y_2=g_2(y_3,y_4)$ 　　〔y_3,y_4〕在D_2之中

若有關的值域與定義域能互相配合，則複合函數可寫爲：

$z=f[g_1(y_3,y_4),g_2(y_3,y_4),y_3,y_4]$

〔y_3,y_4〕在D_2之中

在此一類型的複合函數中，某些自變數依存於所有其他的自變數。例如（定義域省略）

$$z=3y_1y_2y_3y_4$$

$$y_1=2y_3^2+y_4$$

$$y_2=y_3+y_4$$

則複合函數爲

$$z=3(2y_3^2+y_4)(y_3+y_4)y_3y_4$$

類型六：

設有下列函數

$z=f(y_1,y_2,y_3,y_4)$ 　　〔y_1,y_2,y_3,y_4〕在D_1之中

$y_1=g_1(y_3)$ 　　y_3在D_2之中

$y_2=g_2(y_3)$ 　　y_3在D_2之中