现代数学译丛 9

动力系统入门教程及最新发展概述

〔美〕Boris Hasselblatt　Anatole Katok 著

朱玉峻　郑宏文　张金莲　阎欣华 译

胡虎翼　校

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学译丛 9

动力系统入门教程及最新发展概述

〔美〕Boris Hasselblatt　Anatole Katok　著
朱玉峻　郑宏文　张金莲　阎欣华　译
胡虎翼　校

科学出版社
北京

图字: 01-2009-2770 号

内 容 简 介

本书包含两部分内容：第一部分是入门教程，主要介绍动力系统基本知识，作者通过对压缩映射、线性系统、简单二次映射、低维保守系统、弹子球、圆周和环面系统的介绍，引入了回复性、等度分布、拓扑传递、混沌、拓扑熵、编码等一系列描述动力系统渐近行为的概念和工具；第二部分是发展概述，主要介绍动力系统研究的最新进展和应用，讨论了一致和非一致双曲系统、同宿结、奇异吸引子、扭转映射、闭测地线，以及动力系统在数论中的应用.

本书是面向数学、物理和工程专业高年级本科生和研究生的动力系统入门教程，所需的准备知识仅为大学数学分析及线性代数等基础课程. 同时，本书也可作为科研人员和工程技术人员的参考书.

本书是 *Dynamics*：*A First Course—with a Panorama of Recent Developments* 的中文翻译版，由原书作者授权出版.

This is a Chinese translation of *Dynamics*: *A First Course—with a Panorama of Recent Developments*, authorized by the authors.

图书在版编目(CIP)数据

动力系统入门教程及最新发展概述/(美)哈斯尔布拉特(Hasselblatt, B.)等著；朱玉峻等译. —北京：科学出版社，2009

(现代数学译丛；9)

ISBN 978-7-03-024798-8

I. 动… II. ① 哈… ② 朱… III. 动力系统 (数学)-教材 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 099287 号

责任编辑：赵彦超 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：26 1/4
印数：1—2 500 字数：513 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

中文版序

非常高兴我们的《动力系统入门教程及最新发展概述》一书与中国读者见面了. 感谢科学出版社出版本书的中译本. 同时, 感谢剑桥大学出版社提供的帮助, 使本书的中译本得以顺利出版.

将本书从英文译成中文并安排出版事宜是一个艰辛的过程. 我们首先要感谢胡虎翼教授的努力, 他所付出的大量精力以及专业能力使这一项目得以实现. 非常感谢本书的翻译者朱玉峻、郑宏文、张金莲和阎欣华, 他们对细节的探究给我们留下了深刻印象. 可以说, 中国读者现在拿在手中的版本比美国原来的版本减少了很多纰漏, 而且在某些地方作了更好的阐释.

我们希望本书能为向未来的中国学生介绍动力系统理论提供很好的帮助.

Hasselblatt, Boris and Katok, Anatole

2009 年 7 月

译 者 序

本书为动力系统的入门教程. 全书分为两部分: 第一部分是入门教程, 主要介绍动力系统的基本知识. 作者首先描述了一大批动力系统可以处理的科学和数学的问题, 使读者对该领域研究的广泛对象有一个初步的感性认识. 接着介绍一系列由简单到复杂的动力系统, 并由此给出描述系统长期行为复杂性的概念和工具. 第二部分是发展概述, 主要介绍动力系统研究的最新进展和应用. 通过介绍动力系统研究的几个分支, 将第一部分的主题与结果予以发展并将其与现今有意义的课题联系起来.

作为一本数学教材, 本书有着许多鲜明的特色: 第一, 内容的处理独具匠心. 在入门教程部分, 命题和定理的证明沿用了传统教材的处理手法, 逻辑严密而完备. 在发展概述部分, 大部分结果的证明只列出证明梗概并解释进一步的发展, 而不提供所有细节, 使读者能较快地了解到问题的背景、意义及证明思路. 第二, 知识的讲解形象直观. 除通常由定义、定理、证明所构成的体系之外, 本书还使用了大量描述性的语言, 用以说明所发生的现象, 解释其背后的原因, 阐明作者的看法, 以及与其他现象的联系等等. 这使读者能更好地理解隐藏在公式和逻辑之后的实质内容. 第三, 数学工具的运用避繁就简. 动力系统的研究所涉及的数学基础知识很广, 但在本书中, 作者特别注意了避免使用 Riemann 流形、Lebesgue 测度和积分的知识, 而只用大学本科所学的线性代数和数学分析, 以适于本科高年级学生的知识水平. 第四, 写作的语言轻快幽默. 作者常常采用一些轻松幽默甚至玩笑的语言, 为阅读增加了许多趣味. 比如在 1.2.2 节引入 Fibonacci 数列时, 借用比萨斜塔而将该节标题取为“比萨斜兔”, 在 6.2.2 节建议读者不要用“祖父辈”老钟的钟摆去验证同宿轨的存在性等.

本书的作者是 Boris Hasselblatt 和 Anatole Katok. Anatole Katok 教授是当今动力系统学界的领军人物之一, 现为美国宾夕法尼亚州立大学的讲座教授及动力系统与几何中心的主任. 他们的另一本著作*Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 1995) 是一部动力系统鸿篇巨制, 已成为该方向最权威的工具书之一.

我们在翻译本书的过程中遵循了如下原则: 首先, 尽可能忠实于作者的原意. 除了数学概念、命题和定理以及逻辑推理和证明之外, 本书还有大量描述性的语言. 由于中英文语言结构的不同和中美生活背景的差异, 加之译者水平所限, 有时会造成句子不够流畅的现象, 请读者予以理解和指正. 其次, 将数学名词一律翻译成中

文. 有些数学名词国内还没有通行的译法, 甚至没有中文译名. 人们常常直接使用英文原词, 如“logistic 映射”, “specification 性质”, “sofic 系统”等. 这是一种谨慎的态度. 我们将其翻译成中文, 是考虑到我们应当建立中文的语言体系. 对这些没有通行译法的名词, 我们通过对比各种中文译名, 查找单词原意, 以及和专家们交流意见等方法, 选择适当的译名. 例如, 我们将以上数学名词分别翻译成“营房映射”、“碎轨连接性质”、“商有限型系统”.

本书的翻译及校对工作分工如下: 第 1 章由胡虎翼翻译; 第 2, 5, 6, 9–12 章以及附录由朱玉峻和张金莲翻译; 第 4, 13–15 章由郑宏文翻译; 第 3, 7, 8 章由阎欣华翻译. 胡虎翼审校了全部译稿.

最后, 感谢作者提供了本书的 Tex 文件, 使我们免去了输入大量公式之劳, 同时也避免了许多编辑上可能出现的错误. 译者特别感谢何连法教授长期以来对我们的支持和鼓励.

本书得到河北师范大学学术著作出版基金资助.

译校者

2009 年 5 月

前 言

本书为本科高年级学生提供了一本自封闭的动力系统入门教程, 以及动力系统最新成果荟萃, 这些成果有助于阐明该教程的思想的应用及发展. 这两部分在教学法上有着根本的不同但又紧密相连. 每一部分都是独立的: 没有发展概述, 教程部分仍是完备的; 而发展概述部分也不要求这一特定的教程作为背景. 科学工作者和工程师应用本书时可从发展概述和教程的内容中予以采选. 勘误表和其他有关信息可通过访问第一位作者的网页得到.

本书开始于导引,用以激发读者对动力系统的兴趣,并且介绍动力系统可以处理的科学和数学问题的例子. 它可增添对教程部分学习的动力, 但并非该部分所必需.

教程部分只假定有线性映射和特征值、多元微分和 Riemann 积分及其证明. 部分背景知识在第 9 章和附录中展开. 动力系统提供了描述随时间演化系统的长时间行为的概念和工具. 相应地, 本教程以逐步趋向更高复杂性的方式展开这些思想观点, 并给出证明. 拓扑和统计的观点都将被阐述. 据我们所知, 还没有其他教材在本科层次上兼顾两者.

发展概述部分在某些地方需要有稍强一些的数学背景, 但这将被更加宽松的证明标准所平衡, 这些证明只给出证明梗概并解释进一步的发展, 而不提供所有细节. 该部分提供了教程中思想观点的应用并将其与现今有意义的课题联系起来, 其中包含了丰富的参考文献.

本教程中一些主题的最自然的后续读物是 *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*(Cambridge University Press,1995), 另外, 还提供了一些读物可作为本教程的补充. 我们在书末提供了阅读建议.

很多图由 Boris Katok, Serge Ferleger, Roland Gunesch, Ilie Ugarcovici 以及 Alistair Windsor 制作. 图 4.4.3 由 Sebastian van Strien 友情提供, 图 5.2.1 归功于 Daniel Keesing, 图 13.2.3 由 Mattias Lindkvist 绘制. 本书的出版得益于在 Pennsylvania 州立大学的 Mathematics Advanced Study Semesters, 1996 年秋, 初稿在那里试讲并补充很多习题. 还要感谢 Pennsylvania 州立大学的动力系统中心在合作中的资金支持. 特别高兴的是与剑桥大学出版社的编辑 Lauren Cowles 一起工作. 她将耐心与激励完美结合, 且在去年完成了对确定我们工作进程非常有益的文本估算.

最后, 特别感谢 Kathleen Hasselblatt 和 Svetlana Katok 的支持和无限的耐心.

作 者

目　录

第二部分　动力系统发展概述

第1章 导 引

本章为全书的前奏, 首先用一般性的语言描述什么是动力系统, 后续各节将给出大量例子. 一些在本书后续章节中讨论的问题将首先在这里出现.

1.1 动力系统

什么是动力系统? 它是动态的, 一些事情在发生, 一些事情随时间变化. 自然界中的事物如何变化? Galileo Galilei 和 Isaac Newton 在以*自然遵循可用数学表述的不变法则*为中心原则的革命中扮演了关键角色. 事物行为与演变的方式由确定不变的规则决定. 如我们所知, 动力系统之前的历史, 是力学法则的发展史, 是对严密科学的追求, 以及经典力学与天体力学的全面发展史. Newton 的革命基于如下事实: 自然原理可由数学语言表述, 物理事件可依数学的确定性预测和设计. 在力学、电学、磁学和热力学之后, 其他自然科学也亦步亦趋, 而社会科学也在掌握确定性的定量描述.

1.1.1 确定性与可预测性

关键词是确定性: 自然遵循不变的法则. 表现自然秩序永恒的最初的例子是天体运动规则.

神说, 天上要有光体, 可以分昼夜, 作记号, 定节令, 日子, 年岁[1].

经典力学特别是天体力学在 18 世纪和 19 世纪的成功曾经被看作无止境的. Pierre Simon de Laplace 感到理所当然地 (在他 1812 年的著作 *Philosophical Essay on Probabilities* 的开头部分) 说:

> *"我们可以将宇宙现在的状态看作它过去的状态的结果和它今后的状态的原因. 如果一个智者能够了解在某个给定的时刻激发自然的一切力量以及构成它的所有物体的相应情形, 进而, 如果他具有足够智慧能将所得数据进行分析, 那么他将用同样的公式得到从宇宙最大的物体到最轻的原子的运动. 对这样的智者, 没有事物是不确定的, 未来就像过去一样在他眼前洞开."*

1812 年的这一提议中的热情是可以理解的. 这种具有说服力的确定性描述, 为对动力系统一个基本方面的理解给出了一个坚实的依托. 而且, Laplace 在天体力学上泰坦尼克式的巨大成就, 赋予了他作出如此无比勇敢宣言的权力. 但是, 这里面是

[1] 摘自《圣经 · 创世纪》. —— 译者注

有问题的. 动力系统以及本书的中心任务就是探索 Laplace 所忽略的确定性与可预测性的关系. 动力系统现代理论的历史起源于 19 世纪后期的 Henri Jules Poincaré, 几乎是在 Laplace 的著作出版 100 年之后, 他写下了如下一段话以示异议:

"如果我们精确地知道自然法则以及宇宙在初始时刻的状态, 我们就能精确地预测这一宇宙在后续时刻的状态. 但是, 即便自然法则对我们已毫无秘密, 我们也只能近似地知道初始状态. 如果这能使我们以同等精度预见后续状态, 这就是我们所需要的一切. 我们说这一由自然法则确定的现象已被预测, 但情形并不总是这样. 可能初始条件的微小差异会导致最终结果的巨大差别, 先前的小错误会导致后来的大错. 预测变得不可能, 我们遇到偶然现象. "[2]

由他的洞察力所得到的观点正是动力系统研究正在实践的, 也是本书所要介绍的: 长期渐近行为的研究, 特别是其定性方面, 所需的无需事先对解进行显式计算的方法. 除了动力系统中的定性 (几何) 方法外, 概率现象也在起作用.

动力系统研究的主要动因, 是它在处理与我们周围世界的关系中随处可见的重要性. 许多系统随时间连续变化, 比如力学系统. 但也有些系统一步一步地自然演变, 比如我们就要描述的关于蝴蝶数量的模型, 就是依季节循环计时. 蝴蝶生活在夏天, 我们将讨论次年夏天蝴蝶的数量如何由当年夏天的数量决定的法则. 还有一些将连续时间系统弄得看起来像离散时间系统的方法. 比如, 我们可以每隔 24 小时观察月亮的精确位置, 或者记录每天它从何处升起. 这样, 我们容许动力系统依离散步骤演化, 并重复运用同样的规则于前一步所得到的结果.

这种逐步的过程的重要性还有另一理由. 它不仅存在于我们周围的世界, 也存在于我们的意识中, 即发生在当我们以一系列重复的步骤走向通往闪烁不定的完整解答的道路中. 在这样的过程中, 动力系统提供了有助于进行分析的洞察力与方法. 本书将展示分析中的一些重要事实乃是动力系统事实的结果, 有些甚至是简单的结果: 压缩映射原理 (命题 2.2.8、命题 2.2.10、命题 2.6.10) 给出反函数定理 9.2.2 和隐函数定理 9.2.3. 动力系统的威力能够在这种形势下发挥作用是基于各种不同的问题可通过运用逐步改进对解的估计的迭代过程进行处理. 动力系统自然地提供了理解这种过程导向何处的方法.

1.1.2　分析中的动力系统

当你运用一种系统的过程改进对解的估计时, 大概已经找到了一种运用动力系统严密地求解的方法. 为领会这一逼近法的效力, 重要的是要了解动力系统的迭代

[2] Henri Jules Poincaré. *Science et Méthode*. Section IV. II. Flammarion, 1908; see *The Foundations of Science; Science and Hypothesis, The Value of science, Science and Method.* translated by George Bruce Halsted. Lancaster, PA: The Science Press, 1946: 397f; *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré.* edited by Stephen Jay Gould. Modern Library, 2001.

过程完全不限于只做数字运算. 它们能处理非常复杂的对象：数字、Euclid 空间的点、曲线、函数、数列、映射等, 其可能性无穷无尽, 动力系统都能予以处理. 9.4 节将迭代方法用于函数, 9.2.1 节用于映射, 9.5 节用于序列. 这些应用的优美来自于其解答及所依据思路的雅致、威力与简明.

1.1.3 数学中的动力系统

上面所列举的仅触及动力系统在理解数学结构方面所起作用的一部分. 还有其他的, 对某些数学分支中的一些模式, 通过认识问题的基本结构易于分析, 有时是已经得到分析的动力属性, 可以非常容易地得到理解. 这是动力系统那些激动人心的思想的运用场所, 因为它常常包含精细微妙且多姿多彩的现象. 这里动力系统运用的优美, 基于其丰富多彩的行为、令人困惑的复杂性中秩序的意外发现, 以及人们可能发现的不同数学领域间的一致性. 这一章稍后部分将给出这些情形的一些简单例子.

在下面的习题中要求用计算器执行一些简单的迭代过程. 它们不是随便选取的, 以后的课程中会继续讨论其中一些问题. 在每一习题中, 给一个函数 f 和一个数 x_0, 任务是考虑由给定的初值与关系式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 递归定义的序列. 计算足够多的项以描述最终有何情形发生. 如果序列收敛, 记下它的极限, 并努力找到它的显式表达式. 注意为能看出序列的模式或得到对极限充分逼近所需要的步数.

习题 1.1.1 $f(x)=\sqrt{2+x}$, $x_0=1$.

习题 1.1.2 $f(x)=\sin x$, $x_0=1$. 在计算中使用角度设置 —— 这意味 (在弧度中) 实际计算 $f(x)=\sin\left(\pi\dfrac{x}{180}\right)$.

习题 1.1.3 $f(x)=\sin x$, $x_0=1$. 在此及以后都使用 (弧度) 设置.

习题 1.1.4 $f(x)=\cos x$, $x_0=1$.

习题 1.1.5 $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{1+\sin x}$, $x_0=\dfrac{3}{4}$.

习题 1.1.6 $f(x)=\{10x\}=10x-\lfloor 10x\rfloor$ (小数部分), $x_0=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

习题 1.1.7 $f(x)=\{2x\}$, $x_0=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

习题 1.1.8 $f(x)=\dfrac{5+x^2}{2x}$, $x_0=2$.

习题 1.1.9 $f(x)=x-\tan x$, $x_0=1$.

习题 1.1.10 $f(x)=kx(1-x)$, $x_0=\dfrac{1}{2}$, $k=\dfrac{1}{2}$, 1, 2, 3.1, 3.5, 3.83, 3.99, 4.

习题 1.1.11 $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$, $x_0=1$.

1.2　自然中的动力系统

1.2.1　对踵之兔 [3]

兔子原不产于澳大利亚. 大约 1860 年, 24 只欧洲野兔被 Thomas Austin 引至维多利亚南部的基隆并引起了严重的后果. 不出 10 年, 这些兔子遍布于维多利亚. 20 年间, 上百万兔子泛滥全境. 于是, 曾有二万五千澳元悬赏以求治理之道. 至 1991 年, 这些兔子的后代散布整个澳洲大陆的大部地区, 其生态影响广泛深远, 被称为国家灾难, 每年在农业上的损失估计为 6 亿澳元. 兔子数量无限制地增长, 为动力系统的研究提供了一个有意义的例子.

为建立兔子数量增长的模型, 我们作如下的选择. 因其数量巨大, 我们以百万为单位计量. 这样, 当兔子数量表示为 x 百万时, x 不必为整数, 总之初值为 0.000024 百万只兔子. 因此, 我们以实数 x 量度兔子数. 至于时间, 在一般气候情况下, 兔子以接连不断地繁殖而著名 (比如说, 与蝴蝶不同, 其生存与繁殖有严格的季节性, 见 1.2.9 节). 从而, 我们最好将时间变量也取实数, 比如说 t. 这样, 我们要寻找将兔子数量描述为时间的函数 $x(t)$ 的方法.

为理解这一函数与时间的依赖关系, 我们看兔子做什么：吃和繁殖. 澳大利亚地域辽阔, 所以它们可以尽情地吃. 在每一给定的时间段 Δt, 一个固定百分比的雌兔将生小兔而一个更小百分比的老兔死亡 (它们没有天敌). 从而, 增长量 $x(t+\Delta t)-x(t)$ 正比于 $x(t)\Delta t$(出生率与死亡率之差). 令 $\Delta\to 0$ 并取极限, 得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx, \tag{1.2.1}$$

这里 k 表示兔子数量的 (固定) 相对增长率. 有时也记为 $\dot{x}=kx$, 这里点表示关于 t 的微分. 至此, 你会认出这是一个在微积分课程中见过的模型.

正是这一不变的环境 (和生物) 导致这一不变的演化律并引出了我们所研究的这类动力系统. 将 x 与其导数联系起来的微分方程式 (1.2.1) 很容易求解：分离变量 (将 x 置于左, t 置于右) 得到 $(1/x)\mathrm{d}x=k\,\mathrm{d}t$. 再将其对 t 积分并用变量代换：

$$\log|x|=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int k\,\mathrm{d}t=kt+C,$$

这里 log 是自然对数. 从而 $|x(t)|=\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{kt}$, 这里 $\mathrm{e}^C=|x(0)|$, 得到

$$x(t)=x(0)\mathrm{e}^{kt}. \tag{1.2.2}$$

习题 1.2.1　证明上面没有绝对值符号是正确的.

习题 1.2.2　若 $x(0)=3$ 及 $x(4)=6$, 找出 $x(2)$, $x(6)$ 与 $x(8)$.

[3] 澳大利亚大致位于美国的对踵点上. —— 译者注

1.2.2 比萨斜兔

1202 年, Leonardo 考虑过关于兔子的稍微缓和一些的问题. 我们将在例 2.2.9 和 3.1.9 节进一步讨论. 较之上述大范围的澳大利亚模型, 其主要差别是由于城市院落的限制, 只有少量兔子. 因为数量少, 其增长便不能看作连续的, 而应是离散的. 他提出的问题为[4]: 一对兔子一年中可繁殖出多少对兔子?

"某人有一对兔子, 养在一处四周被围墙围着的地方. 我们希望知道, 如果这对兔子每月生一对小兔, 且新生的兔子在两个月大时便可繁殖, 那么一对兔子一年中可繁殖出多少对兔子. 若第一对兔子在第一个月内生一对小兔, 则兔子增加一倍, 第一个月末便有两对兔子; 第一对兔子在第二个月内生一对小兔, 这样, 第二个月末便有三对兔子. 至此, 一个月内会有两对兔子怀孕, 从而第三个月末会有五对. 于是, 同一个月内会有三对兔子怀孕, 从而第四个月末会有八对 ······ (我们已经做了) 加上第一个数与第二个数, 即 1 和 2, 第二个数与第三个数, 第三个数与第四个数 ······"

换句话说, 他得到一个用递归公式 $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ 给出的 (兔子对数) 的数列且选取初值 $b_0 = b_1 = 1$. 这一数列为 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$. 看起来很熟悉吧 (提示: Leonardo 是 Bonaccio 的儿子, 被称为 filius Bonaccio 或"幸运之子", 简称 Fibonacci[5]). 这里有一个用一点动力系统便很容易回答的问题: 如何将他的模型与上面连续性的指数增长模型进行比较?

根据指数增长可以预期, 一旦项数变大, 总有 $b_{n+1} \approx ab_n$ 对某个与 n 无关的常数成立. 如果假设实际上等式成立, 则递归公式给出

$$a^2 b_n = ab_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+1} + b_n = (a+1)b_n.$$

所以必有 $a^2 = a + 1$. 这个二次方程给出增长常数 a 的值.

习题 1.2.3 计算 a.

然而, 要注意我们只证明了如果增长最终是指数的, 则增长常数就是这个 a, 但并没有证明增长最终是指数的. 动力系统为我们提供了工具, 使我们得以用不同方法验证这一性质 (例 2.2.9 与 3.1.9 节). 在命题 3.1.11 中, 我们甚至将这一用递归定义的序列转换成封闭形式.

---

[4]Leonardo of Pisa: Liber abaci (1202), 出版于*Scritti di Leonardo Pisano*. Rome, B. Boncompagni, 1857; see p. 3 of Dirk J Struik. *A Source Book in Mathematics* 1200–1800. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986.

[5] Fibonacci 为 filius Bonaccio 的简称, 是用在他的著作*Liber Abaci* (算经) 上的名字, 直接意思为 Bonaccio 之子. 也有人认为这一名字是由于他父亲名为 Guglielmo Bonaccio 的缘故. —— 译者注

这一渐近比例的值已为 Johannes Kepler 所知, 即黄金数或黄金比例. 在他 1619 年的著作*Harmonices Mundi* 中 (第 273 页) 写道:

"有一个比率, 它从来没有被完整地用数写出来, 也不能用任何方法将其用数表示出来. 除非通过一长列数逐渐逼近它: 这个比率在完美无瑕时被称为神的(divine), 它依不同的方法支配所有正十二面体婚礼[6]. 相应地, 下面和谐的比是这一比率的前四次跟踪: 1:2 和 2:3 和 3:5 和 5:8, 因为它最不完美地存在于 1:2, 更完美地存在于 5:8, 如果将 5 和 8 相加得到 13 并取 8 作为分子, 则更加完美 ······"[7].

我们注意, 从例 15.2.5 可知这些 Fibonacci 比例是黄金数的最优有理逼近.

习题 1.2.4　将 $1+1+2+3+\cdots+b_n$ 用 b_{n+2} 表示.

1.2.3　精美正餐

从前, 新英格兰水域有大量龙虾, 它们是穷人的食物, 在缅因州, 甚至发生过囚犯暴乱要求龙虾以外的食物以变换口味. 现在, 龙虾因捕获量减少而成了精美的正餐. 一个 (最优的) 描述产量缩减的模型规定任一给定年份的捕获量应当是前两年捕获量的平均值.

以 a_n 表示第 n 年捕获的龙虾数量, 可以将这一模型表为简单的递归关系:

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{2}. \tag{1.2.3}$$

作为初值, 可取缅因州 1996 年和 1997 年的产量分别为 16435 和 20871 吨. 这一递归关系与给出 Fibonacci 数的关系相似, 但在这种情形不再是指数增长. 从这一关系可以看出, 所有未来年份的产量都在两个初始数据之间. 事实上, 1997 年是创记录的一年. 在命题 3.1.13 中, 可以找到给出未来产量的显式表达的方法, 即以 n 的显函数给出任意年份 n 的产量.

这一情形与 Fibonacci 兔子问题都是离散地测量时间的例子. 在许多其他例子中这是一种自然的方法, 我们将在 1.2.9 节讨论. 其他生物学中的例子来自遗传学 (基因频率) 与流行病学. 离散时间模型也用于社会科学 (货物价格、流言传播速度、描述在给定时间内有多少信息量存留的学习理论).

1.2.4　新叶轮生

单词叶序 (phyllotaxis) 来自词 phyllo = 叶和 taxis = 序或安排, 表示叶片在小枝上, 或植物的其他组成部分在上一级较大的部分上的排列方法. 向日葵与松果的

[6] 该书中作者在前面曾将正多面体分为"男性"和"女性", 并按内接关系进行各种"婚配". —— 译者注

[7] Johannes Kepler. *Epitome of Copernican Astronomy & Harmonies of the World*. Amherst, NY: Prometheus Books, 1995.

种子为更进一步的例子. Harold Scott Macdonald Coxeter 在其著作 *Introduction to Geometry* 中给出了漂亮的描述. 来自雪花和菠萝的规则图案也是我们熟悉的.

在一些树种中, 树叶在小枝上也按某种规则的方式排列, 这些方式随树种变化. 最简单的方式是树叶交替地长在树枝相反的一侧, 称为 (1, 2) 叶序: 相继的叶片为半圈树枝所分开. 榆树叶就排列成这种方式, 还有榛树叶 [8]. 相邻的树叶也可以相隔 (2/3) 圈, 称为 (2, 3) 叶序. 山毛榉便是这种情形. 橡树展示出 (3, 5) 叶序, 杨树为 (5, 8) 叶序, 柳树为 (8, 13) 叶序. 当然, 这些形式并不总是完全精确, 有些植物在生长时, 会在不同的叶序中转换.

向日葵钻石形的种子排列得紧密而规则, 我们可以看出其排列方式为螺旋形. 事实上, 有两组方向相反的螺旋, 这两组中螺旋条数为相邻的 Fibonacci 数. 种子在冷杉球果上也排成螺旋形, 但是在锥面而非平面上, 它们形成两族, 其数量也为相邻的 Fibonacci 数.

菠萝上也显示出螺旋形图案, 因其表面为近似六边形的图案拼成, 我们能够在三个可能方向上看到螺旋形. 相应地, 我们可以找到 5,8,13 条螺旋, 比如说, 5 条右旋并缓慢地向上倾斜, 8 条左旋向上倾斜, 13 条右旋并急速上升.

对这些美丽图案的观察与欣赏并非新事, 这在 19 世纪已被系统地观察到. 但对这些形式为什么会产生并未很快得到解释. 事实上, 问题还未完全解决.

解释叶序产生的模型是这样的. 这一类型的基本生长过程是叶子或种子 (原基) 的芽由中心长出并向外生长, 且服从由自学成才的植物学家 Wilhelm Friedrich Benedikt Hofmeister 于 1868 年 (其时他为位于 Heidelberg 的植物园的教授与主任) 所提出的三条法则:

(1) 新芽形成于远离老芽的规则区间上;

(2) 芽沿径向生长;

(3) 当芽向外长时, 生长速度变慢.

为模仿这三条 Hofmeister法则而设计的物理实验产生了这种 Fibonacci 型螺旋形图案. 所以, 从这些法则应当能够导出螺旋形图案一定会出现. 这一工作近来已通过使用本书所介绍的方法做出 [9].

在此给出动力系统如何起作用的描述. 为落实 Hofmeister 法则, 用 $N+1$ 个半径为 r^k ($k=0,\cdots,N$) 的同心圆作为描述这一情形的模型, 这里 r 表示生长速度, 我们在每一圆周上放一个芽. 每个芽与下一个之间 (关于圆心) 的角度为 θ_k. 现在可能的形式已用角度 $(\theta_0,\cdots,\theta_N)$ 参数化了. 这意味着“植物的空间”是一个环, 见 2.6.4 节. 当一个新芽出现在单位圆周上, 所有其他芽向外移动一个圆周. 新芽的角

[8] 本书的第一位作者当是这方面的专家!

[9] Pau Atela, Christophe Golé, Scott Hotton. A dynamical system for plant pattern formation: a rigorous analysis. *Journal of Nonlinear Science*, 2002, 12(6): 641–676.