

2005版·考研经典

N E T E M M A T H S

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

重点题型 80

文登考研数学团队

文登考研

指定用书

■ 陈文灯

■ 黄先开

■ 曹显兵

■ 施明存

■ 殷先军

- 新编题型
- 专题讲解
- 命题规律
10年总结



有此防伪标志皆为正版

理工类

W 世界图书出版公司



FOCUS
聚焦图书

013
328

N E T E M M A T H S

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

重点题型 80

文登考研数学团队

陈文灯

黄先开

曹显兵

理工类

施明存

殷先军

● 《数学复习指南》

帮助考生理解和吃透大纲，掌握解题方法和技巧，奠定坚实的应试知识基础。

● 《数学题型集粹与练习题集》

将浩渺的习题浓缩于有限的题型之中，并配以练习题巩固所学知识点。

● 《重点题型》

帮助考生在中后期复习阶段梳理思路，对重点题型了然于胸。

● 《模拟试卷》

依据 05 年新大纲与十年命题规律编写，全面检测考生的水平。



世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安



FOCUS
聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

重点题型 80. 理工类/陈文灯等编著. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2001.10

ISBN 7-5062-5220-1

I. 考… II. 陈… III. 高等数学—研究生—自学参考资料
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 072077 号

重点题型 80(理工类)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵 施明存 殷先军
责任编辑: 武海燕
封面设计: 滕晓娜

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 62198079)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 廊坊开发区北方彩色印务有限公司

开 本: 787×1092 毫米 1/16
印 张: 11.625
字 数: 283 千字
版 次: 2004 年 8 月第 3 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5220-1/O · 330

定价: 13.20

服务热线 010-62198078

前言

众所周知,考研数学复习的范围大、内容多。很多考生往往着了后面忘了前面,总感觉不会的东西太多,知识点比较零乱,对自己越来越没有信心。如何帮助考生在中后期复习阶段梳理思路,把握重点以及对常用解题技巧的熟练掌握,是文登数学团队一直研究的课题。

本书根据2004年6月出版的《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》在2004版《数学最后冲刺》(理工类)的基础上修订而成。本书以考题原型为指针,对各重要的知识点、考点进行有机“串联”,使知识由厚变薄,可使考生在已有的基础上对重要题型了然于胸,增强应试的自信心。

本书今年主要作了如下变动:

(1)对各板块进行了调整,分为重点冲刺题型、专项突破、解题技巧综述三个板块,使考生复习时更加有的放矢。

(2)【重点冲刺题型】板块:①新增的“**内容逻辑图**”帮助考生快速梳理思路,对所考知识点有一个全面系统的认识;②21种“**思维定势**”帮助考生快速打开思路,节省宝贵的考场时间;③“**命题规律**”通过对十年真题的研究,针对每一个重点冲刺题型,给出最近十年的出题类型、命题规律以及近3年的出题情况,可使考生在较短时间内了解命题规律及趋势。

(3)【专项突破】板块:考生可对函数方程的求解、不等式的证明、应用题、综合题这些几乎每年必考的重要题型进行专项学习,使考生在短时间内有一个质的突破。

(4)【解题技巧综述】板块:通过对高等数学快速解题型、变量代换法、辅助函数法、单项选择题的解题技巧学习,考生可迅速拔高快速、准确、灵活的解题能力。

(5)新编并更换了不少例题,拓宽并锻炼考生的应变能力。

另:本书的配套模拟练习题为《模拟试卷8套》(数学一、数学二、数学三、数学四),其中模拟试卷按照2005大纲对考生能力的要求科学编排,并对每套试卷中的每道试题给出了详细的答案解析(包括解题提示,答案详解,知识点链接及对解题技巧的评注)。

书中若有不当之处,敬请广大读者和同仁批评指正。

编者
2004.8

目 录

第一部分 重点冲刺题型大串讲

第1讲 高等数学篇	(1)
◆ 内容逻辑图	(1)
◆ 重点冲刺题(含十年命题规律,最近3年出题概况)	(2)
一、极限与连续中的重点冲刺题	(2)
二、导数与微分中的重点冲刺题	(5)
三、不定积分中的重点冲刺题	(9)
四、定积分中的重点冲刺题	(10)
五、微分方程中的重点冲刺题	(12)
六、无穷级数中的重点冲刺题*	(18)
七、多元函数微分学中的重点冲刺题	(21)
八、向量代数与空间解析几何的重点冲刺题*	(23)
九、重积分、曲线*、曲面积分*中的重点冲刺题	(24)
◆ 4种思维定势	(31)
第2讲 线性代数篇	(36)
◆ 内容逻辑图	(36)
◆ 重点冲刺题(含十年命题规律,最近3年出题概况)	(37)
一、行列式中的重点冲刺题	(37)
二、矩阵中的重点冲刺题	(37)
三、向量中的重点冲刺题	(39)
四、线性方程组中的重点冲刺题	(41)
五、特征值与特征向量中的重点冲刺题	(43)
六、二次型中的重点冲刺题*	(44)
◆ 8种思维定势	(46)

第3讲 概率论与数理统计*	(53)
◆ 内容逻辑图	(53)
◆ 重点冲刺题(含十年命题规律,最近3年出题概况)	(54)
一、事件的概率中的重点冲刺题	(54)
二、随机变量及其分布中的重点冲刺题	(54)
三、随机变量的数字特征中的重点冲刺题	(57)
四、大数定律和中心极限定理中的重点冲刺题	(58)
五、数理统计中的重点冲刺题	(59)
◆ 9种思维定势	(60)

第二部分 专项突破

第1讲 函数方程的求解	(69)
一、利用函数表示法与用什么字母表示无关的“特性”求解方程	(69)
二、利用极限求解函数方程	(69)
三、利用导数定义求解方程	(70)
四、利用变上限积分的可导性求解方程	(71)
五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解方程	(72)
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	(74)
七、杂题	(75)
第2讲 等式与不等式的证明	(77)
一、利用微分中值定理证明	(77)
二、利用函数的单调增减性证明	(78)
三、利用函数的极值或最值证明	(79)
四、利用泰勒公式证明	(80)
五、利用“积分过渡法”证明	(81)
六、杂题	(83)

第3讲 高等数学中的应用题	(85)
一、一元微分学的应用	(85)
二、定积分的应用	(87)
三、微分方程的应用	(88)
四、空间解析几何的应用	(92)
五、多元函数微分学的应用	(93)
六、重积分的应用	(95)
七、曲线和曲面积分的应用*	(95)

第4讲 综合题	(98)
一、高等数学中的综合题	(98)
二、线性代数中的综合题	(108)
三、概率论与数理统计中的综合题	(111)
四、高等数学与线性代数的综合题	(115)
五、高等数学与概率论的综合题	(117)
六、线性代数与概率论的综合题	(120)

第三部分 解题技巧综述

第1讲 高等数学中的快速解题方法	(122)
一、极限运算中的快速解题型	(122)
二、导数运算中的快速解题型	(123)
三、不定积分中的快速解题型	(125)
四、定积分中的快速解题型	(127)
五、常微分方程中的快速解题型	(128)
六、多元微分学中的快速解题型	(131)
七、重积分计算中的快速解题型	(134)
八、曲线、曲面积分中的快速解题型*	(136)
九、无穷级数中的快速解题型*	(138)

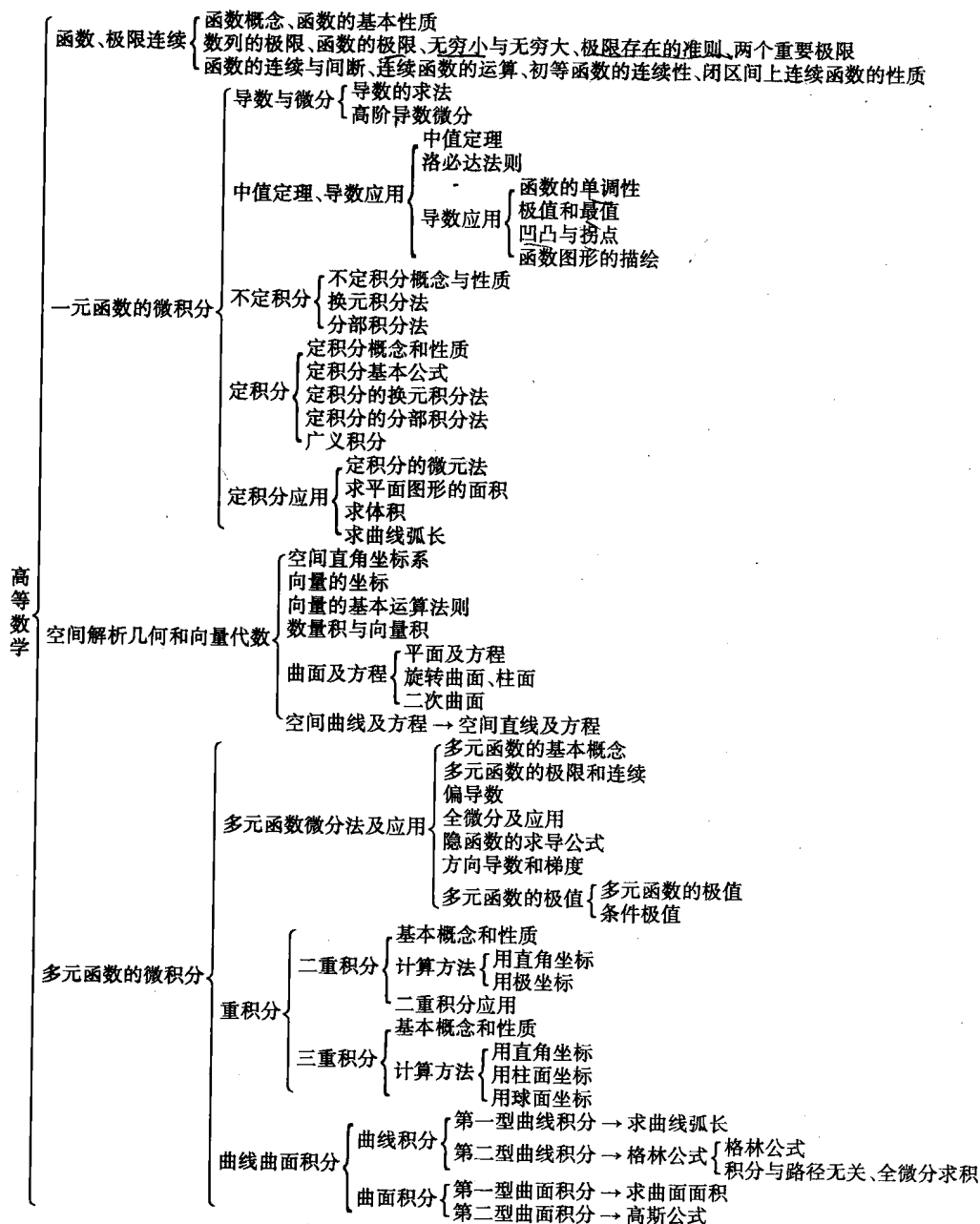
第2讲 单项选择题的解题技巧	(140)
第3讲 常用的变量替换	(151)
一、极限运算中变量替换的应用	(151)
二、不定积分运算中常用的变量替换	(154)
三、定积分运算中常用的变量替换	(156)
四、解微分方程中变量替换的应用技巧	(160)
第4讲 辅助函数作法技巧综述	(164)
一、证明“中值”命题所用辅助函数的作法技巧	(164)
二、证明不等式所用辅助函数的作法技巧	(172)

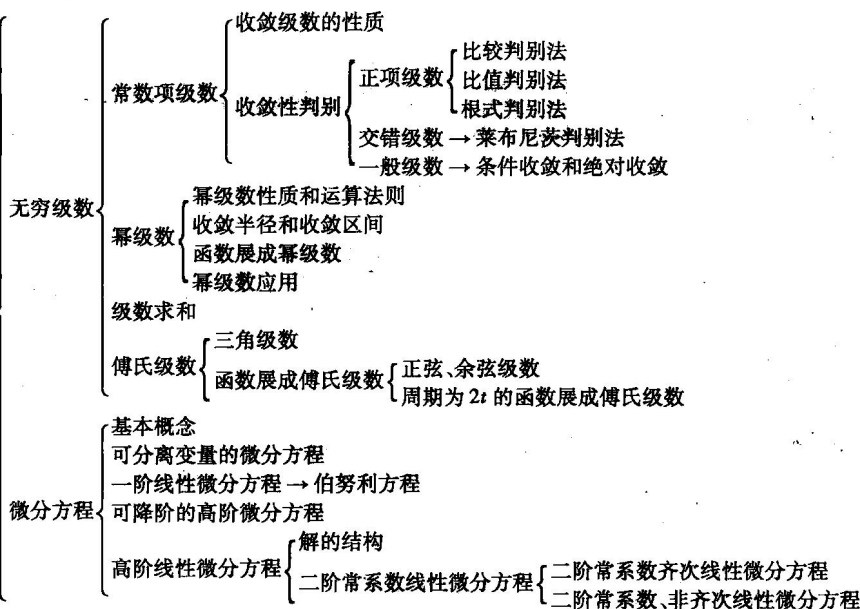
注:带*号内容,数二考生不作要求。

第一部分 重点冲刺题型大串讲

第1讲 高等数学篇

内容逻辑图





重点冲刺题

一、极限与连续中的重点冲刺题

1. 未定式的求解 ($\frac{0}{0}$ 型, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $\infty - \infty$ 型, 1^∞ 型, 0^∞ 型等)

命题规律: 一般出填空题或计算题, “数学一” 最近 10 年考了 6 次, 近 3 年来, 02 年、04 年未考; “数学二” 最近 10 年考了 9 次, 近 3 年来, 02 年、03 年未考。

【例 1】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{x}{2} + \cos 2x)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 属 1^∞ 型. 令 $I = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\sin \frac{x}{2} + \cos 2x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2}}$
 $= e^{\frac{1}{2}}.$
 $(\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 1)$

【例 2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3}.$

【解】 属 $\frac{0}{0}$ 型. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$, 分子中的 $\arcsin x$ 不能用其等价无穷小 x 代换.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}. \quad (\text{因为 } \sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2)
 \end{aligned}$$

2. 无穷小量的比较

命题规律:一般出选择题,“数学一”最近10年考了4次,近3年来,02年、03年未考;“数学二”最近10年考了7次,近3年来,02年未考。

【例】 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α, β, γ .(B) α, γ, β .(C) β, α, γ .(D) β, γ, α .

【 】

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{\cos x^2} = 0,$

可排除(C), (D) 选项,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x \tan x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \infty,$$

可见, γ 是比 β 低阶的无穷小量,故应选(B).

3. 函数(分段函数,复合函数)的连续性或间断点问题

命题规律:一般出填空题或计算题,“数学一”最近10年未考;“数学二”最近10年考了7次,近3年均考。

【例1】 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0, \\ ae^{2x}, & x \leq 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ _____.

【解】 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{2x} = a,$$

由题设得 $a = -2$.

【例2】 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0 \\ 6, & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0 \end{cases}$, 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; a 为何

值时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

【解】 因为

$$\begin{aligned} f(0-0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2} - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\frac{1}{2}(-x^2)} = -6a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0+0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 e^{ax} + 2) = 2a^2 + 4. \end{aligned}$$

$$\text{令 } f(0-0) = f(0+0),$$

$$\text{有 } -6a = 2a^2 + 4$$

解得 $a = -1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

当 $a = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 因而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

【例3】 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 显然当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$;

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})x}{x^2 + \frac{1}{n}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \neq f(0),$$

故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

4. 极限式中常数的确定

命题规律: 一般出填空题, “数学一”最近10年未考; “数学二”最近10年考了2次, 近3年未考.

【例1】 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} [2x - \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b)] = 0$, 试确定常数 a, b .

【解】 $I = \lim_{x \rightarrow \infty} [x - \sqrt{x^2 - 1} - (a-1)x - b]$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{分子有理化}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} - (a-1)x - b \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x(x + \sqrt{x^2 - 1})} - (a-1) - \frac{b}{x} \right] = 0. \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{1}{x(x + \sqrt{x^2 - 1})} - (a - 1) - \frac{b}{x}] = 0$, 由此可得 $a = 1$.

于是, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} [x - \sqrt{x^2 - 1} - b] = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} - b) = 0$, 则有 $b = 0$.

【例 2】 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{1 + x^{2n}}$ 连续, 试确定 a, b .

【解】 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{1 + x^{2n}}$

$$= \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1, \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}(1 + a + b), & x = 1, \\ \frac{1}{2}(-1 + a - b), & x = -1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ax^2 + bx, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \text{ 或 } x < -1, \\ \frac{1}{2}(1 + a + b), & x = 1, \\ \frac{1}{2}(-1 + a - b), & x = -1. \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 连续, 则 $f_-(-1) = f_+(-1) = f(-1)$, $f_-(1) = f_+(1) = f(1)$,

$$f_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1, f_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + bx) = a - b.$$

$$\text{于是 } a - b = -1 = \frac{1}{2}(-1 + a - b), \quad \text{①}$$

$$\text{又 } f_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b, f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1,$$

$$\text{则 } a + b = 1 = \frac{1}{2}(1 + a + b). \quad \text{②}$$

由 ①, ②, 得 $a = 0, b = 1$.

二、导数与微分中的重点冲刺题

1. 求复合函数、隐函数或参数方程的导数

命题规律: 一般出计算题或填空题, “数学一” 最近 10 年考了 8 次, 近 3 年来, 03 年、04 年未考; “数学二” 最近 10 年只 98 年未考.

【例 1】 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为_____.

【解】 在等式 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 两边对 x 求导, 得

$$e^{2x+y} \cdot (2+y') + \sin(xy) \cdot (y+xy') = 0$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式, 得 $y'(0) = -2$. 故所求法线方程为

$$y-1 = \frac{1}{2}x, \text{ 即 } x-2y+2=0.$$

【例2】 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

【解】 方法一:

由麦克劳林公式 ($x=0$ 处的泰勒展开式)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\text{及 } x^2 \ln(1+x) = x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + \cdots \right]$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-2} + \cdots,$$

比较 x^n 的系数得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2},$$

$$\text{所以 } f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}.$$

方法二:

由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}$$

$$\text{及 } [\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \text{ 为正整数})$$

$$\begin{aligned} \text{得 } f^{(n)}(x) &= x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \\ &\quad + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}} \end{aligned}$$

于是可得

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}.$$

【例3】 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x[f''_{11} \cdot (-2y) + f''_{12} \cdot xe^{xy}] + e^{xy}f'_2 + xye^{xy}f'_2 + ye^{xy}[f''_{21} \cdot (-2y) \\ &\quad + f''_{22} \cdot xe^{xy}] \\ &= -4xyf''_{11} + 2(x^2 - y^2)e^{xy}f''_{12} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}(1 + xy)f'_2. \end{aligned}$$

【例4】 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=9}$.

【解】 由 $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t} = \frac{2et}{1+2\ln t}, \frac{dx}{dt} = 4t$ 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)}$$

所以 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e}{2} \cdot \frac{(-1)}{(1+2\ln t)^2} \cdot \frac{2}{t} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$

当 $x = 9$ 时, 由 $z = 1 + 2t^2$ 及 $t > 1$ 得 $t = 2$, 故

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=9} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2} \Big|_{t=2} = -\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$$

2. 分段函数微分法 (注意左导数和右导数是否相等)

命题规律: 一般出计算题或填空题, “数学一”最近10年考了1次, 近3年未考; “数学二”最近10年考了3次, 近3年未考.

【例1】 设 $F(x) = \begin{cases} \int_0^1 f(xt) dt, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\ln(1+x^2)}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 求 $F'(0)$.

【解】 设 $u = xt$, 则 $\int_0^1 f(xt) dt = \int_0^x f(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$.

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{2x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

故 $F'(0) = 1$.

【例2】 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}}$ 可导, 试求常数 a, b .

【解】 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}} = \begin{cases} x^2, & x > 1, \\ \frac{1}{2}(1 + a + b), & x = 1, \\ ax + b, & x < 1. \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right)$

由于 $f(x)$ 可导, 则 $f(x)$ 连续, 于是有 $f_+(1) = f_-(1) = f(1)$. 又

$$f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1, \quad f_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b,$$

则 $a + b = 1 = \frac{1}{2}(1 + a + b)$.

又 $f(x)$ 可导, 则 $f'(1) = f'_-(1) = f'_+(1)$. 而

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

因此 $a = 2, b = -1$.

3. 求曲线的切线方程或法线方程

命题规律: 一般出填空题或计算题, “数学一”最近10年考了3次, 近3年来, 02年未考; “数学二”最近10年考了6次, 近3年来, 04年未考.

【例1】 设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s .

【解】 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 (X, Y) 为法线上任意一点的坐标. 令 $X = 0$, 则

$$Y = y + \frac{x}{y'}$$

故 Q 点的坐标为 $(0, y + \frac{x}{y'})$.

由题设知 $y + y + \frac{x}{y'} = 0$, 即 $2ydy + xdx = 0$.

积分得 $x^2 + 2y^2 = C$ (C 为任意常数).

由 $y|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$ 知 $C = 1$, 故曲线 $y = f(x)$ 的方程为

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

(2) 曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

曲线 $y = f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{故 } s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 \theta} d\theta,$$

令 $\theta = \frac{\pi}{2} - u$, 则

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 + \cos^2 t} (-dt) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} l.$$

【例2】 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的

直角坐标方程.

【解】 此曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos\theta) \cos\theta, \\ y = (1 - \cos\theta) \sin\theta, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x = \cos\theta - \cos^2\theta, \\ y = \sin\theta - \sin\theta \cos\theta. \end{cases}$$

由 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 得到切点的坐标 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})$. 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1.$$

于是所求切线方程为

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}, \text{即 } x - y - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4} = 0.$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = -(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}), \text{即 } x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

三、不定积分中的重点冲刺题

1. 求不定积分(凑微分法、分部积分法或换元法)

命题规律:一般出计算题或填空题,“数学一”最近10年考了1次,近3年未考;“数学二”最近10年考了8次,近3年来,02年、04年未考.

【例1】 求下列不定积分:

$$(1) \int x^2(3\ln x + 1) / \sqrt{x^3 \ln x + 2} dx; \quad (2) \int x^x (\ln x + 1) dx.$$

【解】 (1) $I = \int \frac{x^2(3\ln x + 1)}{\sqrt{x^3 \ln x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^3 \ln x + 2}} d(x^3 \ln x + 2)$ (凑微分法)

$$= 2 \sqrt{x^3 \ln x + 2} + C;$$

$$(2) I = \int e^{x \ln x} (\ln x + 1) dx = \int e^{x \ln x} d(x \ln x) \quad (\text{凑微分法})$$

$$= e^{x \ln x} + C = x^x + C.$$

【例2】 计算 $I = \int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)} \right] dx$.

【解】 $I = \int \frac{f(x)f'^2(x) - f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)} dx = \int \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'^2(x) - f''(x)f(x)}{f'^2(x)} dx.$

由 $\left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]' = \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^3(x)}$, 知 $I = \int \frac{f(x)}{f'(x)} d\left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2 + C.$

【例3】 设 $f(x)$ 是单调连续函数, $f^{-1}(x)$ 是其反函数, 又 $\int f(x) dx = F(x) + C$.

计算:

$$I = \int f^{-1}(x) dx.$$