普通高校基础数学教材系列

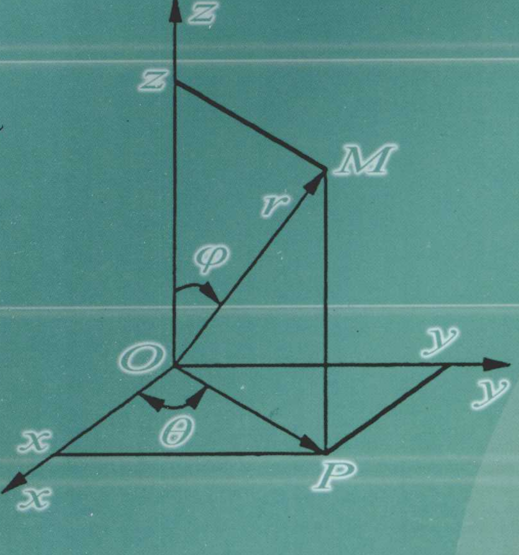
高等数学

典型题解题方法与分析

主编　殷锡鸣

编著　江志松　李红英

方　民　宋　洁



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高校基础数学教材系列

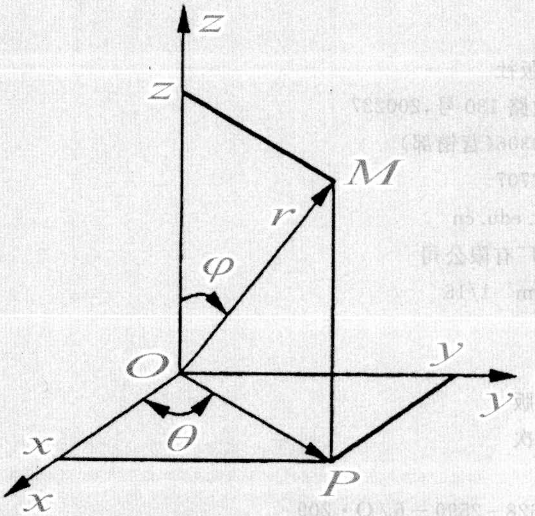
高等数学

典型题解题方法与分析

主编 殷锡鸣

编著 江志松 李红英

方 民 宋 洁



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解题方法与分析/殷锡鸣主编. —上海：华东理工大学出版社，2009.9

ISBN 978-7-5628-2590-6

Ⅰ.高… Ⅱ.殷… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 129563 号

高等数学典型题解题方法与分析

主　　编 / 殷锡鸣
责任编辑 / 徐知今
责任校对 / 张　波

出版发行 / 华东理工大学出版社
社　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　话：(021)64250306(营销部)
传　真：(021)64252707
网　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 江苏南通印刷总厂有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 22
字　　数 / 602 千字
版　　次 / 2009 年 9 月第 1 版
印　　次 / 2009 年 9 月第 1 次
印　　数 / 1—4000 册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2590-6/O·209
定　　价 / 36.00 元

前言

高等数学课程是高等院校理工科、商学院各专业的一门重要的基础课，它主要为学生学习后继课程，进一步从事工程技术和科学研究提供必要的数学基础．长期以来，高等数学课程以它所具有的概念抽象、内容多、范围广、习题量大、技巧性强等特点成为大学学习的一道坎．所以，如何让学生顺利地跨过这道坎，帮助他们学好高等数学，使其成为未来成功之路上的助推器就成为广大从事高等数学教学的教师必须思考和解决的问题．本书正是在这一目标的指引下组织编写的一本高等数学学习辅导书．

本书以殷锡鸣等主编的《高等数学(上册)、(下册)》中的习题为蓝本，并在教材习题的基础上进行了适当的补充．全书的编写具有以下特点：

(1) 以问题为主线，形成了将概念、定理、公式融入问题求解方法的辅导书编写新模式．高等数学的一大特点是“三多”，即“概念多，定理多，公式多”，许多初学者在遇到问题时，普遍感到的困难是无法确定这些概念、定理、公式应该在什么场合运用，如何运用以及为什么要运用．所以本书在内容安排的体系上选择了更贴近学生的方式．以章为单元，以每章中的主要问题求解方法来串联该章中的概念、定理、公式，从而把每章的主要概念、定理、公式融入到解决问题的方法中．这样处理的好处能使学生更深刻地理解各章节的主要问题是什么，章节中的各个数学概念、定理、公式是怎么使用的，它们通常用来解决什么问题，从而使学生掌握住每一章的核心内容与解题方法．

(2) 围绕主要问题，归纳解题方法，重点突出解题思想与方法的分析．高等数学的另一大特点是习题量大，涉及面广，所以归纳出每一章的主要问题对高等数学学习是极其重要的．同时，我们认为对解题方法、思路的分析可能比实际的解题过程更为重要，所以本书在每一章的内容安排上采用了以下形式：首先给出这一章的主要问题；第二，对每一个主要问题，介绍求解这一问题的基本方法；第三，在“方法运用注意点”中给出这一基本方法的特点、运用时的注意点以及对一些基本概念的理解等内容；第四，运用基本方法求解典型问题的举例，我们对每一例题都给出了求解问题的详尽的方法分析；第五，给出运用这一基本方法的小结．全书具有每章中的主要问题典型，基本方法清晰完整，解题思路分析透彻，归纳总结全面的编写特色．

(3) 全书共列举了550个例题，220个习题的选解，题目量大面广．其中有“*”的例题为补充例题，其余的例题都为教材中的习题、阶段练习和模拟试卷中的题目．由于解题的关键在于对方法的掌握和理解，与例题是什么教材中的题目关系不大，所以本书适合于各层次的使用其他高等数学教材的学生学习．

本书由华东理工大学继续教育学院组织编写．全书共分13章，其中第2～7，9～11章由殷锡鸣教授编写；第1章由方民副教授编写；第8章由李红英副教授编写；第12章由江志松副教授编写；第13章由宋洁副教授编写．全书由殷锡鸣统稿定稿．在编写过程中，得到了华东理工大学继续教育学院郑建荣院长、欧伶副院长、许学敏主任以及理学院院长鲁习文教授，数学系主任李建奎教授的大力关心和支持，在此表示衷心的感谢．同时我们还要感谢长期从事高等数学教学的许树声、王

刚、赵建丛、曹宵临、苏纯洁、邵方明、李继根、陆履亨、李义龙、吕雪芹、胡海燕、贺秀霞、卢俊杰、黄秋深等老师，他们在本书的编写过程中提出了许多宝贵的建议.

由于编者水平有限，书中难免留存错、漏和不妥之处，敬请专家、读者予以指正.

编　者

2009.3

目录

第1章 函数

第2章 极限与连续

第3章 导数与微分

第 4 章　微分中值定理与导数的应用

第 5 章　积分

第 6 章　积分法

第 7 章　定积分的应用与广义积分

第8章 向量代数与空间解析几何

第9章 多元函数微分学

第10章 重积分

第11章 曲线积分与曲面积分

第1章 函 数

函数是高等数学研究的主要对象，也是高等数学最重要的基本概念之一. 掌握函数的基本概念和基本运算，了解函数的基本性质，对高等数学的学习非常重要.

1.1 本章的主要问题

(1) 确定函数的定义域；

(2) 函数的运算及其表达式的计算；

(3) 函数的性质及其应用.

1.2 典型问题方法与分析

1.2.1 函数定义域的确定方法

基本方法 利用已知函数的定义域求函数的定义域.

重要结论

(1) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$，$y = \sin x$，$y = \cos x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$.

(2) $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$ 的定义域是 $|x| \leqslant 1$.

(3) $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的定义域是 $x > 0$.

(4) 如果函数含分式，则使分母为零的实数不属于函数的定义域.

(5) 如果函数含偶次根式，则使根式中的表达式为负的实数不属于函数的定义域.

(6) 复合函数的定义域：由函数 $y = f(u)$（定义域为 D_1）与 $u = \varphi(x)$（定义域为 D_2，值域为 Z）复合而成的函数 $y = f[\varphi(x)]$，当 $D_1 \cap Z \neq \varnothing$ 才有意义，且复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $D = \{x \mid x \in D_2, \varphi(x) \in D_1 \cap Z\}$.

(7) 反函数的定义域：若 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，则其反函数的定义域为 Z，值域为 D.

方法运用注意点

(1) 求函数的定义域是要寻找使得函数有意义的自变量范围，特别要注意含分式、根式、对数和反三角的函数.

(2) 对于由 $y = f(u)$，$u = g(x)$ 复合而成的复合函数 $y = f[g(x)]$，其定义域中的点一定要使 x 所确定的 $u = g(x)$ 含在 $y = f(u)$ 的定义域内.

例1 求函数 $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域.

分析 函数定义域中的点须满足:二次根式内表达式非负,对数的真数大于零,分母不等于零.

解 解不等式组 $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} x>1 \\ |x|>1 \end{cases}$,所求定义域为 $(1, +\infty)$.

例 2* 求函数 $y=\ln\left[\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$ 的定义域.

分析 寻找使 $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ 的 x 的范围.

解 函数定义域中的点首先须满足:$x^2-1\geqslant 0$,$\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant 1$. 解不等式组

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1}\geqslant 0 \\ \left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant 1 \end{cases},\text{即}\begin{cases} x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1 \\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2} \end{cases},\text{得 } 1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$$

此时,$\frac{1}{2}\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant 1$,$\frac{\pi}{4}\leqslant \arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant \frac{\pi}{2}$,$\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$,所以函数的定义域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

例 3 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$,求函数 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域.

分析 确定 x,使 $x+\frac{1}{3}$,$x-\frac{1}{3}$ 都在区间 $[0, 1]$ 内.

解 函数定义域中的点须满足:$0\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant 1$,$0\leqslant x-\frac{1}{3}\leqslant 1$,即 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}$,$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}$,解不等式组得函数的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -2, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$ 求函数 $f(x+2)$ 的定义域.

分析 分段函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]\cup(1, 2]=[0, 2]$,故 $x+2$ 要求在区间 $[0, 2]$ 内.

解 令 $u=x+2$,要使 $u\in[0, 2]$,即 $0\leqslant x+2\leqslant 2$,$x$ 须满足 $-2\leqslant x\leqslant 0$,故函数 $f(x+2)$ 的定义域为 $[-2, 0]$.

例 5* 求函数 $y=\ln(x-1)$ 的反函数的定义域.

分析 利用函数与其反函数的定义域与值域之间的关系计算,不需要求反函数的表达式.

解 由于 $y=\ln(x-1)$ 的值域为实数域 $\mathbf{R}$,则其反函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

方法小结

(1) 对于初等函数的定义域,由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而成的函数,所以先要求出使函数各部分有意义的自变量范围,再取其公共部分,就可得到初等函数的定义域.

(2) 分段函数的定义域是把不同表达式的自变量范围合并起来.

1.2.2 函数的运算及其表达式的计算方法

基本方法

(1) 利用基本初等函数的性质求函数表达式;

(2) 利用复合函数的定义求复合函数表达式及复合函数的分解；
(3) 利用函数关系求反函数表达式；
(4) 利用变量代换求函数表达式.

1. 利用基本初等函数的性质求函数表达式的方法

重要结论

(1) 幂函数性质：$x^{\alpha}\cdot x^{\beta}=x^{\alpha+\beta}$，$\dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}=x^{\alpha-\beta}$；

(2) 指数函数性质：$(a\cdot b)^{x}=a^{x}\cdot b^{x}$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}=\dfrac{a^{x}}{b^{x}}$；

(3) 对数函数性质：$\log_{a}x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$，$\ln(xy)=\ln x+\ln y$，

$$\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y,\ \ln x^{a}=a\ln x;$$

(4) 三角函数性质

奇偶性质 $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$，

两角互余 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，

两角互补 $\sin(\pi-x)=\sin x$，$\cos(\pi-x)=-\cos x$，

倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\cos 2x=2\cos^{2}x-1=1-2\sin^{2}x$，

半角公式 $\sin^{2}x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^{2}x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，

和差正弦 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$，
$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$，

和差余弦 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$，
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$，

恒等式 $\sin^{2}x+\cos^{2}x=1$，

特殊角的三角函数值

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无定义
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cot x$	无定义	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

方法运用注意点

(1) 将根式写成幂，分母写成负指数，可以方便运算.

(2) 根式 $\sqrt{f^{2}(x)}=|f(x)|$.

例6* 化简函数 $y=\dfrac{(x-1)(2x^{2}+1)}{\sqrt{x}}$ 的表达式.

分析 先将分子展开，再与分母幂函数相除，最后函数化成幂函数的和.

解 $y=\dfrac{2x^{3}+x-2x^{2}-1}{\sqrt{x}}=2x^{3-\frac{1}{2}}-2x^{2-\frac{1}{2}}+x^{1-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

$=2x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$.

例 7* 将函数 $y=\dfrac{4^x-9^x}{6^x}$ 化简.

分析 利用指数函数性质 $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

解 $y=\dfrac{4^x-9^x}{6^x}=\dfrac{2^{2x}-3^{2x}}{2^x\cdot 3^x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$.

例 8* 已知 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(3x-1)^2(2x+1)}{(x-2)^3}}$,求 $\ln|y|$.

分析 利用对数性质,变乘除为加减.

解
$$
\begin{aligned}
\ln|y|&=\ln\left(\frac{|3x-1|^2|2x+1|}{|x-2|^3}\right)^{1/3}\\
&=\frac{1}{3}[\ln|3x-1|^2+\ln|2x+1|-\ln|x-2|^3]\\
&=\frac{2}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{3}\ln|2x+1|-\ln|x-2|.
\end{aligned}
$$

例 9* 已知 $\sin x=a$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,求 $\cos 3x$.

分析 将 $3x$ 拆成 $x+2x$,利用和的余弦公式、倍角公式将 $\cos 3x$ 化为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的表达式.

解
$$
\begin{aligned}
\cos 3x&=\cos(x+2x)=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x\\
&=\cos x(1-2\sin^2 x)-2\sin^2 x\cos x=\cos x(1-4\sin^2 x)\\
&=\sqrt{1-\sin^2 x}(1-4\sin^2 x)=(1-4a^2)\sqrt{1-a^2}.
\end{aligned}
$$

方法小结

运用基本初等函数的性质可以简化函数的表达式,方便运算.特别是对数函数可以变乘除运算为加减运算,变幂运算为乘法运算.

2. 利用复合函数的定义求复合函数的表达式以及复合函数的分解方法

复合函数的定义 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2, $D\subseteq D_2$. 若对任意的 $x\in D$,有确定的值 $u=\varphi(x)\in D_1$ 与之对应,并通过 $y=f(u)$,也有确定的值 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 对应,即 x 通过 u 唯一确定一 y 值与之对应,则称此函数为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$, $x\in D$,其中 $D=\{x\mid x\in D_2,\ \varphi(x)\in D_1\}$, x 是自变量,y 是因变量,u 称为中间变量.

重要结论 幂指函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 可以由 $y=e^u$, $u=g(x)\ln f(x)$ 复合而成.

方法运用注意点

(1) 只有当 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集非空时,才能形成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

(2) 复合函数的分解,是指将复合函数分解成若干简单函数的复合(这里的简单函数是指基本初等函数或其四则运算).

(3) 幂指函数可以利用对数函数与指数函数互为反函数来分解.

例 10 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{2}$,求 $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

分析 分别以 $f(x)$, $\dfrac{1}{f(x)}$ 代替 $f(x)$ 中的 x,注意复合的条件.

解 $f[f(x)]=\dfrac{f(x)+2}{2}=\dfrac{\dfrac{x+2}{2}+2}{2}=\dfrac{x+6}{4},\ x\in(-\infty,+\infty)$

当 $x\neq-2$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{2}{x+2}$，所以

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{\dfrac{1}{f(x)}+2}{2}=\frac{\dfrac{2}{x+2}+2}{2}=\frac{x+3}{x+2},(x\neq-2).$$

例 11* 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x-1)$.

分析 $f(x-1)$ 由 $y=f(u)$，$u=x-1$ 复合而成.

解 令 $u=x-1$，则 $f(u)=\begin{cases}u, & u<0,\\ u+1, & u\geqslant 0.\end{cases}$ 所以

$$f(x-1)=\begin{cases}x-1, & x-1<0,\\ x-1+1, & x-1\geqslant 0.\end{cases}\text{即 } f(x-1)=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

例 12 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$；(2) $y=\sec^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

分析 利用基本初等函数及其四则运算，将函数由外到内一层一层地拆开.

解 (1) 因为 $y=\ln\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$，令 $u=1+x^2$，则 $y=\dfrac{1}{2}\ln u$，所以函数由 $y=\dfrac{1}{2}\ln u,\ u=1+x^2$ 复合而成.

(2) 令 $v=2x-\dfrac{\pi}{4},\ u=\sec v,\ y=u^2$，则函数 $y=\sec^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 由 $y=u^2,\ u=\sec v,\ v=2x-\dfrac{\pi}{4}$ 复合而成.

例 13* 函数 $y=x^x$ 是由哪些简单函数复合而成的？

分析 幂指函数可表示为 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

解 由于 $y=x^x=e^{x\ln x}$，令 $u=x\ln x$，则函数 $y=x^x$ 由 $y=e^u,\ u=x\ln x$ 复合而成.

方法小结

求复合函数的表达式和复合函数的分解是互逆的过程，复合的过程是由内到外一层一层地套起来，而分解的过程则是由外到内一层一层地拆开.

3. 利用函数关系求反函数表达式的方法

反函数定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 若对于 Z 中任意的 y，都可以通过 $y=f(x)$ 确定 D 中的唯一 x 值与其对应，从而得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y),\ x\in Z$，其值域为 D.

重要结论

(1) 若 $x=\varphi(y)(y\in Z)$ 是 $y=f(x)(x\in D)$ 的反函数，则 $f[\varphi(y)]=y,\ y\in Z$；$\varphi[f(x)]=x,\ x\in D$.

(2) 若 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 互为反函数，则 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 的图形在同一直角坐标系

中关于直线 $y=x$ 对称.

方法运用的注意点

(1) 若 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 互为反函数，则在同一直角坐标系中 $y=f(x)$ 的图形就是 $x=\varphi(y)$ 的图形.

(2) 一般用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，由 $y=f(x)$ 得 $x=\varphi(y)$ 后，常常再对换 x 与 y，用 $y=\varphi(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的反函数.

(3) $y=f(x)$ 的反函数的另一种常见记号是 $y=f^{-1}(x)$，这里的 f^{-1} 是一个记号，绝对不可以将其当作"f 的负 1 次，即 $\frac{1}{f}$".

例 14 求函数 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的反函数.

分析 从函数 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 关系式中解出 x，再将 x 与 y 对换.

解 从 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 解得 $2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，取对数得 $x=\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$，对换 x 与 y，得所求反函数为 $y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

方法小结 求反函数的步骤：

(1) 从函数关系式 $y=f(x)$ 解得 $x=\varphi(y)$；

(2) 对换 x 与 y，得反函数 $y=\varphi(x)$.

4. 利用变量代换求函数表达式的方法

方法运用的注意点

(1) 由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式求 $f(x)$，相当于求复合函数的外层函数，可以令 $\varphi(x)=u$，先求出 $f(u)$ 的表达式，再以 x 代替 u 即可.

(2) 若已知条件里出现多个复合函数，通常要找到中间变量间的关系，通过解方程来求解.

例 15 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$.

分析 此函数由 $y=f(u)$，$u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

解 令 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{u}$，代入函数表达式得

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}=\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u},$$

以 x 代替 u 求得
$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

例 16* 求函数 $f(x)$，使其对任意 x 总能使 $f(2+x)+2f(1-x)=x^2$ 成立.

分析 当两个中间变量之和是常数时，即含 $f(a+x)$ 和 $f(b-x)$ 时，可作变换 $a+x=b-u$，此时 $b-x=a+u$，从而获得所求函数满足的方程组.

解 令 $2+x=1-u$，则 $1-x=2+u$，$x=-1-u$，代入原方程

$$2f(2+u)+f(1-u)=(-1-u)^2,$$

以 x 代替 u 得
$$2f(2+x)+f(1-x)=(-1-x)^2.$$

所以所求函数$f(x)$满足的方程组$\begin{cases}f(2+x)+2f(1-x)=x^2,\\2f(2+x)+f(1-x)=(-1-x)^2.\end{cases}$

消去$f(2+x)$,得 $f(1-x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}(x+1)^2.$

令$1-x=v$,则 $f(v)=\frac{2}{3}(1-v)^2-\frac{1}{3}(2-v)^2=\frac{1}{3}(v^2-2),$

以x代替v得 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2-2).$

例17* 当$x\neq 0$时,$f(x)$满足$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=mx+\frac{n}{x}$, $|a|\neq|b|$,求$f(x)$.

分析 两个中间变量之积是常数时,即含$f\left(\frac{a}{x}\right)$和$f\left(\frac{x}{b}\right)$时,作变换$\frac{a}{x}=\frac{u}{b}$,则$\frac{x}{b}=\frac{a}{u}$.

解 令$\frac{1}{x}=u$,则$x=\frac{1}{u}$,代入方程$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=mx+\frac{n}{x}$得

$$af\left(\frac{1}{u}\right)+bf(u)=\frac{m}{u}+nu,$$

以上方程中以x代替u,再与已知方程联立得方程组:

$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=mx+\frac{n}{x}\\bf(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=nx+\frac{m}{x}\end{cases},$$

解得 $$f(x)=\frac{(am-bn)x+(an-bm)\frac{1}{x}}{a^2-b^2}.$$

方法小结

函数$y=f(x)$反映的是两个变量之间的关系,与表示变量的具体符号没有关系,因此,当我们找到$y=f(u)$后,只需用x代替u就得到$y=f(x)$.

1.2.3 函数的性质及其应用

基本方法 (1) 考察函数的奇偶性; (2) 考察函数的周期性;
(3) 考察函数的单调性; (4) 考察函数的有界性.

1. 函数奇偶性的判别方法

函数奇偶性的定义 设函数$f(x)$在关于原点对称的区间$(-l, l)$(或$[-l, l]$)上有定义(l可为∞):

(1) 若$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数;

(2) 若$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数.

重要结论

(1) 积的性质:两个奇函数的积是偶函数,两个偶函数的积是偶函数,一个奇函数和一个偶函数的积是奇函数.

(2) 和的性质:两个奇函数的和是奇函数,两个偶函数的和是偶函数,一个非零奇函数和一个非零偶函数的和是非奇非偶函数.

(3) 复合函数$F(x)=f[g(x)]$的奇偶性:

① 若$g(x)$是偶函数,则$F(x)$是偶函数;

② 若 $g(x)$是奇函数，$f(x)$是奇函数，则 $F(x)$是奇函数；若 $g(x)$是奇函数，$f(x)$是偶函数，则 $F(x)$是偶函数. 换句话讲，若内层函数和外层函数都有奇偶性，当其中至少有一个偶函数时，复合函数是偶函数；若都是奇函数，复合函数就是奇函数.

(4) 若 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，则其一定可以表示成奇函数$\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$和偶函数$\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$的和.

函数奇偶性的几何意义

若 $y=f(x)$ 是奇函数，其图形关于原点对称；若 $y=f(x)$ 是偶函数，其图形关于 y 轴对称.

方法运用的注意点

(1) 只有函数定义域关于原点对称时才可以讨论其奇偶性；换句话讲，如果函数定义域不是关于原点对称，则可以断定其是非奇非偶函数.

(2) 奇函数图形必过原点，即 $f(0)=0$.

(3) 函数奇偶性的本质，是将研究范围缩小到半个定义域上，另外一半只需在$f(x)$前加上"±"号.

例 18* 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=(2x+1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；(2)$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；(3)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

分析 考察 $f(-x)=\pm f(x)$ 是否成立.

解 (1) 函数中 $\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x<1$，得函数的定义域为$[-1,1)$关于原点不对称，因此 $f(x)=(2x+1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

(2) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，因此$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$是偶函数.

(3) 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

因此 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

例 19* 判断下列定义在实数域 **R** 上函数的奇偶性：
(1)$y=x\sin x+\cos x$；(2)$y=x^3\cos x$；(3)$y=x^2-x+1$.

分析 已知在实数域 **R** 上，函数 x，x^3，$\sin x$ 都是奇函数，x^2，$\cos x$ 都是偶函数，用重要结论(1)、(2)判断即可.

解 (1) x，$\sin x$ 是奇函数，因此 $x\sin x$ 是偶函数，又 $\cos x$ 是偶函数，所以 $y=x\sin x+\cos x$ 是偶函数.

(2) x^3 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数，所以 $y=x^3\cos x$ 是奇函数.

(3) x^2+1 是偶函数，$-x$ 是奇函数，所以 $y=x^2-x+1$ 是非奇非偶函数.

例 20* 下列函数定义在区间$[-a,a]$$(a>0)$上，试判断其奇偶性：

(1)$f(x)=\sin[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$；(2)$f(x)=\cos(x^3-x)$.