普通高等院校数学类专业基础课规划教材

数学分析选讲

陈守信 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等院校数学类专业基础课规划教材

数学分析选讲

陈守信　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书共分八讲。第一讲介绍极限的思想、各种求解方法和证明极限存在的各种技巧；第二讲介绍函数一致连续性的思想和证明方法及技巧；第三讲介绍与微分中值定理（包括泰勒公式）有关的思想和解决问题的方法；第四讲介绍定积分的重要计算技巧和证明函数可积性的方法；第五讲介绍各类级数收敛性的判别方法和技巧，并对函数项级数和函数性质进行了详尽的讨论；第六讲介绍多元函数的各种性质及应用；第七讲介绍各类积分（特别是第二类曲面积分）的计算方法和技巧；第八讲介绍证明不等式的常用方法和技巧。

本书是“数学分析选讲”课程的课本、也可作为考研复习资料、一年级学生的参考书，还可作为教师的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析选讲/陈守信编著. —北京：机械工业出版社，2009. 8
普通高等院校数学类专业基础课规划教材
ISBN 978-7-111-27619-7

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材　Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 117757 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：韩效杰　版式设计：张世琴　责任校对：申春香
封面设计：马精明　责任印制：洪汉军
北京市朝阳展望印刷厂印刷
2009 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm・23 印张・445 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-27619-7
定价：32.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379408

序

作者在多年为大学数学系本科一年级学生讲授《数学分析》课以及为大学数学系四年级学生考研班讲授《数学分析》课后，积累了大量的教学经验；明白了一年级学生在接受数学分析的基本概念和基础理论时，碰到的困难；懂得了如何引导学生牢固地掌握这部分基础理论．凭借娴熟的讲授技巧，他在2003年获河南省教育系统职业技能大赛一等奖；在2007年获河南大学“本科教学十佳”称号．在这些基础上，作者编著了这本书．

我个人多年在大学数学系讲授一年级基础课，知道学生在中学的应试教育下，学会了各种各样为了高考需要掌握的技巧．但是他们忽略了如何来通过理论学习，提高自身分析问题和解决问题的能力．如何用数学的逻辑语言来清晰地表达每道题目．如何去切入，如何去展开，从而如何得到结论．这本书特别注意这方面的训练，我相信它对学生学习《数学分析》会有很大的帮助．

这本书的主要目的，是为大学数学系四年级学生考研编写的．当然这本书，也可作为大学数学系一年级学生学习《数学分析》课的参考书以及主讲此课老师的教学参考书．由于本书编写简明清晰，内容涉及面广，所以我乐意郑重推荐此书．

许以超

中国科学院数学研究院研究员

前　言

“数学分析”是数学系最重要的基础课之一，因此也是数学系各专业考研的必考科目．近年来，越来越多的学生希望继续深造，而三个学期的学习课时对于这门重要的基础课而言明显不够．为了帮助学生加强分析方面的训练，让他们为继续从事研究工作打下坚实基础，许多院校相继开设了“数学分析选讲”课，本书就是在这种背景下结合作者多年来的教学经验编写而成的．

“数学分析选讲”是“数学分析”的深化与补充．在编写的过程中，笔者始终遵循如下指导思想：不受知识体系的约束，坚持体系由解决问题的方法所决定；不去罗列教材中的基本内容，仅对一些重要的、容易混淆的概念和理论进行深入、透彻的讲解；不追求大而全，艰而难，而是注重数学思想的代表性和解决问题方法和一些技巧的普遍适用性．

基于上述思想和编写本书的目的，笔者在题目的筛选上颇费心思，既照顾到思想和方法的介绍，又在训练上有一定难度，特别是选取了大量考研题目．为了激发学生的学习兴趣和探索欲望，领会问题背后所考察的数学能力，本书对于有代表性的问题，特别进行了重点讲解．希望读本书的同学们认真领会，做到触类旁通．

全书共分八讲．第一讲介绍极限的思想、各种求解方法和证明极限存在的各种技巧；第二讲着重介绍函数一致连续性的思想和证明方法及技巧；第三讲着重介绍与微分中值定理（包括泰勒公式）有关的思想和解决问题的方法；第四讲着重介绍定积分的重要计算技巧和证明函数可积性的方法；第五讲介绍各类级数收敛性的判别方法和技巧，并对函数项级数和函数性质给予了详尽的讨论；第六讲介绍多元函数的各种性质及应用；第七讲介绍各类积分的计算方法和技巧，特别是第二类曲面积分；第八讲介绍证明不等式的常用方法和技巧．书中例题丰富，代表性强，讲解由浅入深，易于接受．多数例题的后面都配有类题，并给出了详略不同的提示，这有利于学生掌握和巩固例题中所介绍的思想、方法和技巧．许多理论上的讲解和题后的注记，都体现了笔者二十多年的教学经验和教学心得，凝聚了笔者的心血．如果读者能从中汲取一二，那将是笔者最欣慰的事情．

本书作为讲义，已在河南大学数学学院讲授过五遍．其间，一些兄弟院校也曾经使用过该讲义，并提出了很多建设性的修改意见．希望阅读和使用本书的老师和同学们多提宝贵建议，不管多么短小都可以．

本书可作为综合性大学、理工科大学、师范大学数学系学生考研复习指导书和正在学习“数学分析”课程的学生的学习参考书. 同时，也可供数学系教师和有关读者参考.

在本书出版之际，我衷心地感谢河南大学数学学院的领导和同事们的大力支持和热情鼓励；感谢河南大学学术著作和教材出版基金对本书的资助；感谢周口师范学院数学系的任立顺教授，黄淮学院数学系的李东亚教授，师建国、周厚勇、吴中林三位副教授，以及河南工业大学的张宏伟教授. 他们对本书初稿提出的宝贵意见和建议，使本书增色不少. 同时，还要感谢机械工业出版社的编辑同志们和相关人员为本书的出版所付出的艰辛劳动.

由于水平有限，书中错误和不妥之处在所难免. 如果读者发现任何问题和错误，请联系笔者或者韩效杰编辑（xiaojie. han@ gmail. com），我们将不胜感激！

陈守信
于河南大学

目　录

第一讲　极　　限

在这一讲中,我们将涉及到数列极限和函数极限. 用于论证极限存在性的概念和定理很多,像极限的定义、单调有界定理、柯西收敛准则、追敛性定理、施图兹定理、泰勒展开、中值定理(包括微分中值定理和积分中值定理)、两个重要极限以及罗比塔法则等.

一、用极限的定义验证极限

例 1.1　(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab.$$

证明　(1)由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$ 知, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定 N_0,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0-1} + a_{N_0} + \cdots + a_n}{n} - a\right|\\ \leqslant\ &\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0-1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_0} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}\\ <\ &\frac{M}{n} + \frac{n - N_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

其中 $M = |a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0-1} - a|$,对固定的 N_0 而言,它是一个确定的常数. 故对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists N \geqslant N_0$, 当 $n \geqslant N$ 时,有 $\dfrac{M}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2)令 $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, 则当 $n \to \infty$ 时, $\alpha_n, \beta_n \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}\\ =\ &\frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + (a + \alpha_2)(b + \beta_{n-1}) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n}\end{aligned}$$

$$=ab+a\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}+b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}+$$

$$\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}.$$

由(1)知,上式的第二、三项趋向于零.下证第四项极限也是零.

事实上,由 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$ 知,α_n 有界,即存在 $M>0$,使 $|\alpha_n|\leqslant M$. 故

$$0<\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\leqslant M\frac{|\beta_n|+|\beta_{n-1}|+\cdots+|\beta_1|}{n}\to 0,$$

从而(2)的极限是 ab.

注 1.1 (2)的极限亦可用(1)的方法来证明. 此时需要将所考察的差分三段来估计,请同学们试一下.

(1)的结果是十分有用的,利用它可迅速求出一些极限.

例如:1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}{n}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

类题 1 用定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

提示 (1) $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$;

(2)对固定 a,存在 $N_0>0$,当 $n>N_0$ 时,有 $n>|a|$,即$\dfrac{|a|}{n}<1$. 考察

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}<\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{M}{n}\quad\left(\text{其中 } M=\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\right);$$

(3) $\forall\varepsilon>0$,取 $a=\dfrac{1}{\varepsilon}$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ 知,$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $0<\dfrac{a^n}{n!}<1$,即 $0<\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon$.

类题 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$,用定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$$ （清华大学,2001）.

类题3 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=\infty$，用定义证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(g(x))=\infty$（南京航空航天大学,2002）.

提示 由 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=\infty$，$\forall G>0$ 充分大，存在充分大的 $Y_0>0$，当 $y>Y_0$ 时，有 $|f(y)|>G$.

又由 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$，对上述 $Y_0>0$，存在充分大 $X_0>0$，当 $x<-X_0$ 时，有 $g(x)>Y_0$.

综上知，$\forall G>0$，$\exists X_0>0$，当 $x<-X_0$ 时，有 $|f(g(x))|>G$.

例1.2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在（武大,1983）.

证明 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$，有

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=2\lim_{n\to\infty}\sin 1\cdot\cos(n+1)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)=\lim_{n\to\infty}\cos n=0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n=2\lim_{n\to\infty}(\sin n\cdot\cos n)=0,$$

即 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$，但是 $1=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n+\sin^2 n)=0$，矛盾. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

类题 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$（上海大学,1998）.

提示 $\{x_n\}$ 显然↑，只须证明 $\{x_n\}$ 没有上界即可. $\forall n\in\mathbf{N}^+$，有

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

由此，用数学归纳法可证：$x_{2^k}\geqslant 1+\frac{k}{2}$ $(k=0,1,2,\cdots)$，因此 $\{x_n\}$ 没有上界.

例1.3 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$（川大,1981）.

证明 当 $n>N_0\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}=&[(x_n-x_{n-2})+(x_{n-2}-x_{n-4})+\cdots+x_{N_0-2}\text{或}x_{N_0-1}]-\\&[(x_{n-1}-x_{n-3})+(x_{n-3}-x_{n-5})+\cdots+x_{N_0-2}\text{或}x_{N_0-1}],\end{aligned}$$

共有 $n-N_0+1$ 项 (x_k-x_{k-2}) 及 $\pm(x_{N_0-1}-x_{N_0-2})$.

由题设，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0>0$，当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是有

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| < \frac{n - N_0 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_{N_0-1}| + |x_{N_0-2}|}{n},$$

取 n 适当大,可使 $\frac{|x_{N_0-1}| + |x_{N_0-2}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而,当 n 适当大时,就有 $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| < \varepsilon$.

二、用单调有界定理证明极限的存在性

例 1.4 证明数列 $a_1 = \sqrt{c} > 0, a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ 的极限存在,并求其值.

证明 $\{a_n\}\uparrow$ 显然,下证 $\{a_n\}$ 有上界.

$$a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1,$$

设 $a_n < \sqrt{c} + 1$,则

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1,$$

即 $\{a_n\}$ 有上界 $\sqrt{c} + 1$.

由单调有界定理,$\{a_n\}$ 的极限存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 在 $a_{n+1}^2 = c + a_n$ 中,令 $n \to \infty$ 得 $a^2 = c + a$, 解之,得

$$a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c}).$$

例 1.5 若 $\{a_n\}\uparrow, \{b_n\}\downarrow$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在,并且相等(南京航空航天大学,2002).

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 知,$\exists N_0 > 0$,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$-1 < a_n - b_n < 1.$$

由此知,$a_n < b_n + 1 \leqslant b_{n-1} + 1 \leqslant \cdots \leqslant b_{N_0} + 1$,即 $\{a_n\}$ 有上界;

$$b_n > a_n - 1 \geqslant a_{n-1} - 1 \geqslant \cdots \geqslant a_{N_0} - 1,$$ 即 $\{b_n\}$ 有下界.

由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 可得:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 即两者极限相等.

例 1.6 设 $a_1 > 0, a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n}, n = 1,2,\cdots$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛,并求它的极限.

证明 用数学归纳法易证:当 $n \geqslant 2$ 时,$1 < a_n < 2$.

由 $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n}$ 可得

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})}.$$

这说明当 $n \geqslant 2$ 时, $a_{n+1} - a_n$ 具有相同的符号,从而 $\{a_n\}$ 是单调数列. 由单调有界

定理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记为 a. 在已知的等式两边取极限，得 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$，解之得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 由于 $a_n>1$，故舍去负值，从而 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 1.7　设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$，$n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其值.

证法 1　假设 $\{x_n\}$ 的极限存在，并设为 A，则 $A=\dfrac{1}{2+A}$，即 $A^2+2A-1=0$，$A=-1\pm\sqrt{2}$.

因为 $x_n>0$，故 $A=\sqrt{2}-1$.

若 $x_n<A$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}>\dfrac{1}{2+A}=A$；

若 $x_n>A$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}<\dfrac{1}{2+A}=A$.

由 $x_1=\sqrt{2}>A$ 知，$x_{2n+1}>A$，而 $x_{2n}<A$.

下面将证明：$\{x_{2n+1}\}\downarrow A$，$\{x_{2n}\}\uparrow A$. 事实上，

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{2+x_{n+1}}-x_n=\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+x_n}}-x_n$$

$$=\frac{2(1-2x_n-x_n^2)}{5+2x_n},$$

而 $1-2x-x^2=0$ 的根为 $x=-1\pm\sqrt{2}$，故

$$x_{n+2}-x_n=\frac{2(1+\sqrt{2}+x_n)\cdot(\sqrt{2}-1-x_n)}{5+2x_n}\quad\begin{cases}>0, & 若\ x_n<A,\\ <0, & 若\ x_n>A.\end{cases}$$

即 $\{x_{2n}\}\uparrow$ 以 A 为上界，$\{x_{2n+1}\}\downarrow$ 以 A 为下界，故它们的极限都存在，分别设为 α，β. 由

$$x_{2n}=\frac{1}{2+x_{2n-1}}\ 及\ x_{2n+1}=\frac{1}{2+x_{2n}},$$

取极限可得

$$\alpha=\frac{1}{2+\beta}\ 及\ \beta=\frac{1}{2+\alpha},$$

故 $\alpha=\beta=A=\sqrt{2}-1$.

类题　设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$，数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义：$x_0=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.（浙大，2002）.

注 1.2 下面介绍一个有用的命题. 设数列 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件:
$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|,0<k<1,\quad n=2,3,\cdots,$$
则 $\{x_n\}$ 收敛.

这个命题的证明,用柯西收敛准则不难得到.

证法 2 注意到 $x_n>0$,我们有
$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}<\frac{1}{4}|x_n-x_{n-1}|.$$
由命题知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,在已知的等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$ 两边取极限,舍去负值,可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}-1$.

例 1.8 设 $c>0,x_1=a>0,x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n},n=1,2,\cdots$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

证明 由
$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})(c+x_n)}=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+x_n(c+x_{n-1})},$$
利用已知的关系式 $x_n(c+x_{n-1})=c(1+x_{n-1})$ 可得
$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+c(1+x_{n-1})}=\frac{(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})+(1+x_{n-1})}.$$
注意到 $x_n\geqslant 0$, 由上式得
$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{|1-c|}{1+c}|x_n-x_{n-1}|,\quad n\geqslant 2.$$
易见,$\dfrac{|1-c|}{1+c}<1$, 由命题知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 在已知的关系式两边取极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

简单推论 设 $c>0,x_1=a>0,x_{n+1}=\dfrac{c+x_n}{1+x_n},n=1,2,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

证明 令 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, 则有
$$y_{n+1}=\frac{c^{-1}(1+y_n)}{c^{-1}+y_n},\quad n=1,2,\cdots.$$
由例 1.8 知, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

用这个推论可以重作例 1.7 的类题.

类题 1 设 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ ($x_1>0$ 为已知),求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ (南大,2000).

类题 2 设 $a_1=0, a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}\ (n\geqslant 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（南大，2001）.

类题 3 （斐波那契（Fibonacci）数列）设 $a_0=a_1>0, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n=0,1,2,\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

提示 令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则有

$$b_0=1, b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}, n=1,2,\cdots.$$

由 $|b_{n+1}-b_n|=\dfrac{|b_n-b_{n-1}|}{b_nb_{n-1}}$，利用 $b_nb_{n-1}=b_{n-1}+1$ 可得

$$|b_{n+1}-b_n|=\frac{|b_n-b_{n-1}|}{b_{n-1}+1}.$$

又由 $b_n>1$ 可得

$$|b_{n+1}-b_n|<\frac{1}{2}|b_n-b_{n-1}|,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

下面看一个与欧拉常数有关的数列.

例 1.9 设 $b_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，则数列 $\{b_n\}$ 收敛（北师大，1999）.

证明 因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad（请同学们自证），$$

所以

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

于是 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\dfrac{n+1}{n}<0$，即 $\{b_n\}$ 单调递减.

又

$$\begin{aligned}b_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

即 $\{b_n\}$ 有下界 0.

由单调有界定理，$\{b_n\}$ 的极限存在，记为 C（通常称为欧拉常数）.

类题 1 设 $s_1=\ln a, a>0, s_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(a-s_k), n=2,3,\cdots$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a - 1$.

提示 利用不等式 $\ln x \leqslant x - 1 \quad (x > 0)$，证明 $\ln(a - s_k)$ 有意义.

当 $k = 1$ 时，$a - s_1 = a - \ln a > 0$.

设 $k \leqslant n$ 时,有 $a - s_k > 0$ 即 $\ln(a - s_k)$ 有意义,于是,

$$s_{n+1} - s_n = \ln(a - s_n) \leqslant a - s_n - 1,$$

所以 $s_{n+1} \leqslant a - 1$，即 $\ln(a - s_{n+1})$ 有意义且 $\{s_n\}$ 有上界.

由 $s_{n+1} - s_n = \ln(a - s_n) \geqslant \ln[a - (a - 1)] = 0$ 可知，$\{s_n\}\uparrow$. 由单调有界定理，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在. 易见 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a - 1$.

类题 2 设 $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, n = 1,2,\cdots$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛.

提示 由
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

知 $\{x_n\}\downarrow$.

又由 $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 可得

$$\begin{aligned} x_n &> 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] - 2\sqrt{n} \\ &= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 > -2, \end{aligned}$$

这表明 $\{x_n\}$ 有下界.

三、用迫敛性定理求极限

例 1.10 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证明
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) \cdot \cdots \cdot n$$

$$\geqslant \begin{cases} \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数}, \\ \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \geqslant \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

故
$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

例 1.11　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$（复旦大学,1999）.

解　记 $A=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$，则

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

所以　$0\leqslant A^2<\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2n+1}$,

即
$$0\leqslant A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

故
$$0\leqslant A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to0\quad(n\to\infty).$$

例 1.12　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$（数学Ⅲ，1995）.

解　记 $G=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<G<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即
$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}<G<\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}G=\frac{1}{2}.$$

类题 1　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$，$(0<\alpha<1)$.

提示　(1) $0<\dfrac{n^5}{e^n}<\dfrac{n^5}{2^n}=\dfrac{n^5}{(1+1)^n}$

$$=\frac{n^5}{1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^6+\cdots+C_n^n}<\frac{n^5}{C_n^6}\to0;$$

(2)因为 $n!<\sum\limits_{p=1}^{n}p!<(n-1)\cdot(n-2)!+(n-1)!+n!<2\cdot(n-1)!+n!$,