中央人民政府高等教育部推薦

中等技術學校教材試用本

代數學教程

下册

P. A. КАЛНИН 著

趙根榕 張理京譯

商務印書館

下 册 目 錄

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\cdots,\ \frac{1}{n}\cdots。$$

例5 開數2的平方，準確到1，到0.1，到0.01等等，就得到$\sqrt{2}$的弱近似值的敍列：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\cdots。$$

定義 自然數自變量的函數叫做敍列。這個函數的值叫做敍列的項。

對應於每一個自然數，這函數有一個完全確定的值，即敍列的一個完全確定的項。 敍列可以用公式表出來，這個公式按敍列的每一項的號碼確定出來這一項，例如公式

$$S=\frac{n}{n^2+1}$$

確定敍列

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{17},\cdots(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots)。$$

有些情形，敍列不用公式表示出來；在上面所舉的例5，當考察2的平方根的準確度無限增高的近似值的敍列時，就是這種情形。這兒，一個法則代替了公式，依照這個法則再求出這個敍列的項；這個法則是：第一項是$\sqrt{2}$的準確到1的弱近似值，第二項是準確到0.1的，第三項是準確到0.01，其餘依此類推。一般地，敍列的第n項是$\sqrt{2}$的準確到$\frac{1}{10^{n-1}}$的弱近似值。

如果敍列的每次一項都大於前一項，則這個敍列叫做上升敍列；例如，敍列

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\cdots,\ n^2,\cdots;$$

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\cdots;$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\cdots,\ \frac{n}{2n+1}$$

都是上升敍列。

如果敍列的每次一項都小於前一項，則這個敍列叫做下降敍列；例如，敍列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\cdots,\ \frac{1}{n};$$

$$-1,\ -10,\ -100,\ -1000,\cdots,\ -10^{n-1},\cdots$$

就是這種敍列。

註解 敍列的項數假設是無限制的（無限的），就是說，在它每一項的後面都跟隨着有另外的項。

有時在解某些問題時，必須要考察項數爲有限的敍列；例如，假設要求自然數列的前二十個偶數的和，這時就談到了敍列 $2, 4, 6, \cdots, 40$，它的一般項爲 $a_n=2n$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 20)$。

這樣的敍列（爲與無限敍列區別起見）叫做有限敍列。

§90 算術級數

考察下列兩個敍列：

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\cdots;$$

$$8,\ 3,\ -2,\ -7,\ -12,\cdots。$$

它們的組成規律是一樣的：敍列的任一項與緊靠它左邊（前邊）的那一項的差是常量。在第一個例子中，這個差等於 $7-4=10-7=\cdots=3$；在第二個例子中，有 $3-8=-2-3=-7-(-2)=\cdots=-5$。

定義 有下列性質的數的敍列叫做算術級數：每下一項可由前一項加上同一個數而得到，這同一個數叫做級數的公差。級數的公差用字 d 表示；因此，在第一個例子中 $d=3$；在第二個例子中 $d=-5$。算術級數的項用 a_1，a_2，a_3 等等來表示；在第一個例子中 $a_1=4$，$a_2=7$，$a_3=10$。

如 $d>0$，則級數是上升的；當 $d<0$ 時，則是下降的。爲說明某個

敍列是算術級數，在它前面加上一個記號 $\div$，例如 $\div 7, 9, 11, 13, \cdots$。

如 $d=0$，則級數的各項都相等。這種級數沒有研究的價值。

§91 算術級數任意項的公式

按級數的定義有

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d \text{ 等等。}$$

一般地

$$a_n=a_1+(n-1)d。$$

算術級數的任意項等於首項加上乘以所求的那一項之前的各項項數後的公差。

例 $18, 14, 10, 6, \cdots$； $d=-4$。

試求 $a_{16}=?$

$$a_{16}=a_1+15d; \quad a_{16}=18+15\cdot(-4)=-42。$$

§92 算術均值

假設 a_{k-1}, a_k, a_{k+1} 是算術級數的連接的三項，則由級數的性質，有

$$a_k-a_{k-1}=a_{k+1}-a_k,$$
$$2a_k=a_{k-1}+a_{k+1},$$
$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}。$$

兩個數的半和叫做它們的算術均值(數)；因此，算術級數的任意項(首項除外)爲其相鄰兩項的算術均值。

例 試在數 8 與 20 之間加入 7 個算術均數。這就是說，必須求 7 個這樣的數，它們與已知數 8 及 20 一塊兒作成首項爲數 8，第九項爲數

20 的算術級數。

有

$$a_9=a_1+8d,\quad 20=8+8d,\quad d=1.5。$$

所求的級數為

$$\div 8,\ 9.5,\ 11,\ 12.5,\ 14,\ 15.5,\ 17,\ 18.5,\ 20。$$

這個例子可以推廣：如果要在數 a 與 b 之間加入 k 個算術均數，則有

$$b=a+(k+1)d,$$

$$d=\frac{b-a}{k+1}。$$

由首項與公差 d 卽可寫出其餘各項。

§93 算術級數前 n 項和的公式

先指出有限個項的算術級數的一個性質。

假設有

$$\div 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37。$$

加與級數首尾等距的項：$2+37=39$，$7+32=39$，$17+22=39$，我們看出來：算術級數的與兩端等距的兩項之和等於首末兩項之和。

應當如此，因為這些和的首項（卽 2，7，12，17）增加 5，而第二項（37，32，27，22）却減少 5；由此，每兩項的和保持不變。

現在來推求算術級數前 n 項和的公式。用 S_n 表示這個和：

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n。\qquad (1)$$

將等式右邊的項顛倒次序來寫，和 S_n 並不因此而改變：

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1。\qquad (2)$$

逐項加等式(1)與(2)，則得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+$$
$$+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)。$$

在每個括號裏都是級數的與兩端等距的兩項之和；因此，在括號裏的這些和都相等而且各等於首末兩項之和 a_1+a_n；這些括號一共有 n 個，卽有級數的項數那麼多個。所以有

$$2S_n=(a_1+a_n)\cdot n,$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}。$$

算術級數的前 n 項之和等於首末兩項的半和乘上項數。

如利用算術級數一般項的式子：$a_n=a_1+(n-1)d$，則和的公式可以寫為另外的形式：

$$S_n=\frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}n,$$

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n。$$

如已知 a_1，d 與 S_n，要求級數的項數，利用這個公式方便。

§94 和 S_n 的幾何解釋

茲用幾何方法推求算術級數前 n 項和的公式。

首先指出：如果矩形的底等於1，則矩形的面積用與表達它的高的數相同的數來表達。

作高各等於算術級數的項的 n 個矩形（第41圖），每個矩形的底都等於一，所有的矩形都彼此緊緊地挨着，得階梯圖形（在圖上用陰影標誌出來的），它面積的數值等於 S_n。如在陰影的圖形上作一個同樣的圖形但已經"翻轉過來"，

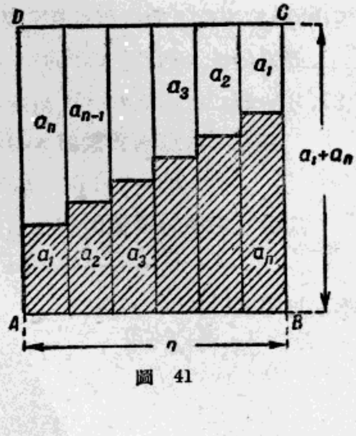

圖 41

則得底 $AB=n$ 而高 $AD=a_1+a_n$ 的矩形 $ABCD$；階梯圖形的面積等於矩形面積的一半，即 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$。

§95　應用和 S_n 的公式的例子

例 1　試求自然數列之前 n 個數的和。有 $a_1=1$，$a_n=n$；項數也等於 n；由和的第一個公式可以寫出

$$S_n=\frac{(1+n)n}{2}。$$

例 2　試求級數

$$\div 18,\ 14,\ 10,\ 6,\ \cdots$$

的前十項的和。這時 $d=14-8=-4$，$a_1=18$，$n=10$。由和的第二公式，有

$$S_{10}=\frac{2\times 18+9\times(-4)}{2}\times 10;\quad S_{10}=0。$$

例 3　級數的第四項等於 9，第九項等於 -6。必須取幾項，才能使它們的和等於 54？

$$\begin{array}{lll} a_9=-6 & 或 & a_1+8d=-6, \\ a_4=9 & 或 & \underline{a_1+3d=9} \\ & & \quad 5d=-15; \end{array}$$

$$d=-3,$$

$$9=a_1+3\times(-3),$$

$$a_1=18。$$

由和的第二個公式，有

$$54=\frac{2\cdot(18)+(n-1)\cdot(-3)}{2}n;$$

$$108=(36-3n+3)\cdot n;$$

$$36=(13-n)n;$$

$$n^2-13n+36=0。$$

解這個二次方程,得

$$n_1=4,\ n_2=9。$$

驗算可知,這兩個答案都滿足題的條件:

$$\div 18,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0,\ -3,\ -6;$$

$$S_4=54,\ S_9=S_4+0=54;$$

因爲最後五項的和等於零。顯然,當級數有正負號相反而絕對值相等的項時,就發生這種情况。

§96 自然數列的前 n 個數的平方和

用 S_1 表示自然數列的前 n 個數的和,而用 S_2 表示它們的平方和,則

$$S_1=1+2+3+4+\cdots+n;$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2。$$

如果在恒等式

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

中連接地給 n 以值 1, 2, 3, 4, …, n, 則得

$$2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1;$$

$$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1;$$

$$4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1;$$

$$5^3-4^3=3\times4^2+3\times4+1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1。$$

逐項相加這些等式:

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+4+\cdots+n)+n$$

或 $$(n+1)^3-1^3=3S_2+3S_1+n。\qquad (3)$$

但 $$S_1=\frac{(n+1)n}{2}。$$

將 S_1 的值代入等式 (3) 中,得

$$n^3+3n^2+3n=3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

由此 $$6S_2=2(n^3+3n^2+3n)-3n^2-3n-2n=2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1);$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

同樣,由恒等式

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

出發，可以求得自然數列的前 n 數的立方和；得

$$S_3=\left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2=S_1^2。$$

§97　幾何級數

定義　由下列規律組成的數列叫做幾何級數：每下一項等於前一項乘上相同的一個數。茲舉幾個幾何級數的例子：

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\cdots$$

$$27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\cdots$$

$$12,\ -6,\ 3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\cdots$$

第一個數列的由第二項開始的每一項等於前一項乘上 2；在第二個例子中，下一項可由前一項乘上 $\frac{1}{3}$ 而得到；在第三個例子中可乘上 $-\frac{1}{2}$ 而得到。

要求得下一項，前一項必須乘上的那個數叫做級數的公比。級數的公比用字母 q 來表示。幾何級數的項，與算術級數的項相同，用 a_1，a_2，a_3 等等來表示。幾何級數用記號 $\div\!\div$ 放在它的項的前面來表示。

如果級數的公比 q 大於 1，則級數當 $a_1>0$ 時是上升的，而當 $a_1<1$ 時是下降的。如 $q=1$，則幾何級數的所有各項都相等。這種級數沒有研究價值。

在以上所舉的那些例子中，第一個級數是上升的，第二個是下降的，而第三個既不是上升的，也不是下降的。（這兒下一項有時大於前一項，有時小於前一項）。

§98　幾何級數任意項的公式

按幾何級數的定義，有

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=a_1q^3,\text{ 等等}$$

顯然，

$$a_n=a_1q^{n-1}。$$

幾何級數的任意項等於首項乘上級數公比的冪，冪指數等於所求定的那一項以前各項的項數。

例 1 試求級數

$$\div\!\div 1,\ 3,\ 9,\ 27,\cdots$$

的第八項。

在這個例子中 $a_1=1$, $q=3$, 所以

$$a_8=a_1q^7,$$
$$a_8=1\times3^7=2187。$$

例 2 試求級數

$$2,\ -\sqrt{2},\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\cdots$$

的第 10 項。

公比 $q=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a=2$。

$$a_{10}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9=-2\,\frac{2^4\sqrt{2}}{2^9}=-\frac{\sqrt{2}}{16}。$$

§99 幾何均值

假設 a_{k-1}, a_k, a_{k+1} 是幾何級數的三個鄰項，其中趾標"k"是大於 1 的任意自然數，則有

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{a_{k+1}}{a_k},$$

這每一個比都等於級數公比 q。較按例的性質有

$$a_k^2=a_{k-1}a_{k+1}。$$

平方等於兩個已知數之積的數叫做它們的幾何均值(數)。例如，數 6 是數 4 與 9 的幾何均值，因爲 $6^2=4\times9$。

這樣，幾何級數的任意項是它相鄰兩項的幾何均值。

例 試在數 2 與 1458 之間加入 5 個幾何均值。

題的條件必須這樣來理解：要求 5 個這樣的數，它們與已知數 2 及 1458 一塊兒共同作成首項 $a_1=2$ 而第 7 項 $a_7=1458$ 的幾何級數.

有
$$a_7=a_1\times q^6,$$
$$1458=2\times q^6.\ 729=q^6,$$
$$q=\sqrt[6]{729}=\pm3。$$

可能有兩個級數:

$$\div\!\!\div\ 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458;$$

或
$$\div\!\!\div\ 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ -486,\ 1458。$$

§ 100 幾何級數前 n 項的和

用 S_n 表示幾何級數前 n 項的和:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n。\qquad(4)$$

等式(4)兩邊同乘上 q，則得

$$S_nq=a_1q+a_2q+a_3q+\cdots+a_{n-1}q+a_nq;\qquad(5)$$

因爲
$$a_1q=a_2,\ a_2q=a_3,\cdots,\ a_{n-1}q=a_n,$$

故等式(5)取形式

$$S_nq=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+a_nq。\qquad(6)$$

由等式(6)減去等式(4):

$$S_nq-S_n=a_nq-a_1,$$
$$S_n(q-1)=a_nq-a_1,$$

由此
$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}。$$

如果用 a_1q^{n-1} 代替 a_n，則和的公式可以化爲另外的形式；得

$$S_n=\frac{a_1q^{n-1}q-a_1}{q-1}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1};$$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}。\tag{7}$$

如果要求下降級數的 n 項和，則爲了使分式的分子與分母當 $a_1>0$ 時都爲正的，將公式寫爲

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

較爲方便。現在來解十八世紀的一個老問題。

問題 某人賣馬，條件如下：第一個馬蹄鐵釘賣 1 個錢，第二個賣兩個錢，第三個賣 4 個錢，其餘類推。馬總共有 32 個蹄鐵釘。試問，他想把這馬賣多少錢？

顯然，必須要求首項 $a_1=1$，公比 $q=2$ 的幾何級數的 32 項的和。

$$a_{32}=1\times2^{31},$$

$$S_{32}=\frac{2\times2^{31}-1}{2-1}=2^{32}-1=4294967295\text{（個錢）}。$$

這眞是妄想的價格！

例 級數的前三項的和等於 6，而第二、三、四項的和等於 -3。試求此級數。

$$a_1+a_2+a_3=6;$$

$$a_2+a_3+a_4=-3。$$

用首項表示級數的項，就得到

$$a_1+a_1q+a_1q^2=6 \quad 或 \quad a_1(1+q+q^2)=6,\tag{8}$$

$$a_1q+a_1q^2+a_1q^3=-3, \quad a_1q(1+q+q^2)=-3。\tag{9}$$

等式(9)除上等式(8)，則得 $q=-\frac{1}{2}$，一除就得首項

$$a_1=\frac{6}{1+q+q^2}=\frac{6}{\frac{3}{4}}=8。$$

所求的級數爲 $\div 8, -4, 2, -1, \cdots$。

§ 101 收歛幾何級數

定義 幾何級數 $a, aq, aq^2, aq^3, \cdots$，當它的公比的絕對值小於單位($|q|<1$)時，叫做收歛的。

下例級數是這種級數的例子:

$$\div 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$$

$$\div 3,\ -1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ -\frac{1}{81},\ \cdots$$

收歛級數的和的概念需要特別的定義，因爲，由於直到現在和的概念都是只就着有限個項來說的，但此級數的項數却是無限的，故不能直接加這種級數的項。

在定義收歛級數的和之前，先考察下列具體的例子。

已知級數 $\div 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\cdots$。

求它的前 n 項的和 S_n。因此，如假設 $n=1, 2, 3, \cdots, n$，則有

$$S_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2},$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2^3},$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=1-\frac{1}{2^4},$$

....

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}。$$