QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材

一本全®

新课标解题方法

主编：李永哲

高中数学

一册在手◆胜券在握

选修 1—2

XINKEBIAOJIETIFANGFAGAOZHONGSHUXUEXUANXIU1—2

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材

一本全®

新课标解题方法

高中数学

选修1—2

主　　编：李永哲

本册主编：赵传娟

编　　委：王雪晶　刘德广　兰俊义　杨秀杰　徐　嵘　张　欣　郭泗强　李玉珍　王春花　徐丽瑗　毕淑玲　郑　琳　张玉梅　张克敏

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标解题方法·高中数学(选修1-2)/李永哲主编.
—延吉:延边大学出版社,2008.5
ISBN 978-7-5634-2442-9

Ⅰ.新… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第027925号

新课标解题方法·高中数学(选修1-2)

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路977号　　**邮编**:133002

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2133001　　**传真**:0433-2733266

印刷:北京集惠印刷有限责任公司

开本:880×1230　　1/32

印张:63.5　　**字数**:1319千字

印数:1—10000

版次:2008年5月第1版

印次:2008年5月第1次印刷

ISBN 978-7-5634-2442-9

定价:90.00元(共5册)

前　言

《高中数学解题方法》是按照《新课标》体系编写出的一套解题方法丛书.这套丛书重视对数学思想方法的考查,在解答过程中都蕴含着重要的数学思维方式及解题技巧,教给学生解决问题的方法和技巧.

知识是基础,思想是深化,方法是手段.提高学生对数学思想方法的认识和应用,综合提高学生的数学解题能力是本书的宗旨.

本书的作者都是具有多年教学经验的一线特、高级教师,通过对具有代表性的例题、习题,以及历年来高考中出现的经典试题,进行全面细致的分析和讲解,帮助学生探索解题规律,掌握解题技巧,提高解题能力.

下面介绍本书各栏目及其特点.

一、高考点拨

通过对考点的分析、解读,使学生掌握学习重点,明确学习目标,做到有的放矢,力求使学生通过学习和思考逐步提高独立解题的能力,使解题更加迅速、准确.

二、经典及拓展例题详解

通过对经典例题的分析,帮助学生理解高中物理常用的解题方法(如:换元法、参数法、分析法、数形结合法等),认识和构建数学知识间的联系;通过对经典例题的点评,帮助学生找准解数学题的关键,避免思维误区,让学生亲身体验数学解题、发展、深化的过程,并学会建立物理模型的全过程,追求用最短的时间、最有效的方法来迅速提高学生分析问题和解决问题的能力;遵循举一反三、一通百通的原则,注重解题思路、方法、技巧的培

养,更好地领悟、归纳、概括和运用所学知识,激发学生主动学习、主动探讨、主动解题,学中求乐的积极性.

三、经典及拓展题训练

习题的编选由浅入深,涵盖内容广泛,题量充足,题型新颖、灵活、开放,体现了方法与能力训练的完美结合,使学生边学边练,夯实基础,获得能力,轻松迎考.此外,书中精选2007年各地高考真题,并分析命题思想.

由于编者水平所限,编写过程中疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评指正,以期在今后的修订中进一步完善提高.

目　　录

第一章　统计案例 …… 1
1.1　回归分析的基本思想及其初步应用 …… 1
1.2　独立性检验的基本思想及其初步应用 …… 27
第二章　推理与证明 …… 43
2.1　合情推理与演绎推理 …… 44
2.1.1　合情推理 …… 44
2.1.2　演绎推理 …… 70
2.2　直接证明与间接证明 …… 99
2.2.1　综合法与分析法 …… 99
2.2.2　反证法 …… 115
2.3　数学归纳法 …… 128
第三章　数系的扩充与复数 …… 168
3.1　数系的扩充 …… 169
3.2　复数的四则运算 …… 182
3.3　复数的几何意义 …… 196
第四章　框　图 …… 214
4.1　流程图 …… 214
4.2　结构图 …… 235

第一章　统计案例

一、知识结构

统计案例—回归分析
　　　　　—独立性检验

二、内容与要求

通过典型案例,学习下列一些常见的统计方法,并能初步应用这些方法解决一些实际问题.

①通过对典型案例(如“肺癌与吸烟有关吗”等)的探究,了解独立性检验(只要求 2×2 列联表)的基本思想、方法及初步应用.

②通过对典型案例(如“质量控制”“新药是否有效”等)的探究,了解实际推断原理和假设检验的基本思想、方法及初步应用(参见例 1).

③通过对典型案例(如“昆虫分类”等)的探究,了解聚类分析的基本思想、方法及初步应用.

④通过对典型案例(如“人的体重与身高的关系”等)的探究,进一步了解回归的基本思想、方法及初步应用.

1.1　回归分析的基本思想及其初步应用

一、知识梳理

1. 线性回归模型

(1)线性回归模型 $y=a+bx+e$ 中 a 和 b 为模型的未知参数,e 称为随机误差.

(2)随机误差产生的原因主要有

①用线性回归模型近似真实模型(真实模型是客观存在的,通常我们并不知道真实模型是什么)所引起的误差.

②忽略了某些因素的影响.

③观测误差.

(3)在回归直线方程 $y=\hat{a}+\hat{b}x$ 中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}$ 其中 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，$(\bar{x},\bar{y})$ 称为样本点的中心.

2. 线性回归与线性相关

(1)回归分析是对具有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法.

(2)相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$

(3)用 r 来描述线性相关关系的强弱.

①当 $r>0$ 时，两个变量正相关.

②当 $r<0$ 时，两个变量负相关.

③当 $|r|$ 越接近 1 相关性越强，$|r|$ 越接近 0 时，几乎不存在线性相关关系.

④当 $|r|>0.75$ 时，认为两个变量有很强的线性相关关系，因而求回归直线方程才有意义.

3. 残差平方和残差分析

(1)总偏差平方和：$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$

(2)残差：数据点和它在回归直线上相应位置的差异 $(y_i-\hat{y}_i)$，称 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$ 为残差.

(3)残差平方和：$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$

(4)回归平方和：总偏差平方和－残差平方和.

(5)$k^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，$k^2$ 的值越大，说明残差平方和越小，模型的拟合效果越好(即 k^2 越接近于 1，回归效果越好)

(6)通过残差 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$，…，$\hat{e}_n$ 来判断模型拟合效果的分析工作称为残差分析.

4. 线性回归分析的一般步骤

回归分析的一般步骤为：

(1)从一组数据出发，求出两个变量的相关系数 r，确定二者之间是否具有线性相关关系.

(2)如果具有线性相关关系，求出回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$. 其中 $\hat{a}$ 是常数项，$\hat{b}$ 是回

归系数.

(3)根据回归方程,由一个变量的值预测或控制另一个变量的值.

5. 非线性回归问题

两个变量不呈线性关系,不能直接利用线性回归方程建立两个变量的关系,可以通过变换的方法转化为线性回归模型,如 $y=c_1e^{c_2x}$,我们可以通过对数变换把指数关系变为线性关系. 令 $z=\ln y$,则变换后样本点应该分布在直线 $z=bx+a$($a=\ln c_1$,$b=c_2$)的周围.

一般地,建立回归模型的基本步骤为:

(1)确定研究对象,明确哪个变量是解释变量,哪个变量是预报变量.

(2)画出确定好的解释变量和预报变量的散点图,观察它们之间的关系(如是否存在线性关系等).

(3)由经验确定回归方程的类型(如观察到数据呈线性关系,则选用线性回归方程 $y=bx+a$).

(4)按一定规则估计回归方程中的参数(如最小平方法).

(5)得出结果后分析残差图是否有异常(个别数据对应残差过大,或残差呈现不随机的规律性等等),若存在异常,则检查数据是否有误,或模型是否合适等.

二、典型例题

例1 有下列说法:

①线性回归分析就是由样本点去寻找一条直线,贴近这些样本点的数学方法;

②利用样本点的散点图可以直观判断两个变量的关系是否可以用线性关系表示;

③通过回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 及其回归系数 b,可以估计和观测变量的取值和变化趋势;

④因为由任何一组观测值都可以求得一个回归直线方程,所以没有必要进行相关性检验.

其中正确命题的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析

①反映的是最小平方法思想,正确.

②反映的是画散点图的作用,正确.

③反映的是回归模型 $y=bx+a+e$,其中 e 为随机误差,正确.

④是不正确的,在求回归方程之前必须进行相关性检验,以体现两变量的关系.

答案:C

点评:确定关系和相关关系并没有一条不可逾越的鸿沟,由于实验误差、测量误差的存在,变量之间的确定关系往往通过相关关系表现出来.反过来,在有些问题上,我们可以通过研究相关关系来深入了解变量内在规律,从而找到它们的确实关系.

例2 根据下列给出的条件,回答它们之间是什么关系.

(1)期中考试数学成绩与复习时间投入量的关系是什么?

(2)目前各家商场都进行促销活动,商品的销售额与广告费的关系是什么?

解:(1)期中考试数学成绩与复习时间投入量是相关关系.这是因为复习时间投入量对考试成绩有一定影响,而当复习时间投入一定时,数学成绩的取值具有一定的随机性,如可能受到当天的身体状况、心情、周边环境的影响.

(2)商品的销售额与广告费的关系是相关关系.广告费对销售额有一定影响,而当广告费一定时,商品的销售额的取值具有一定的随机性.如受到天气的限制、容量的限制、其他商场促销活动的影响等.

点评:要深入寻找两个变量的关系,学会进一步分析.

例3 1993年到2002年中国的国内生产总值(GDP)的数据如下:

年份	GDP
1993	34634.4
1994	46759.4
1995	58478.1
1996	67884.6
1997	74462.6
1998	78345.2
1999	82067.5
2000	89468.1
2001	97314.8
2002	104790.6

(1)作GDP和年份的散点图,根据该图猜想它们之间的关系应是什么.

(2)建立年份为解释变量,GDP为预报变量的回归模型,并计算残差.

(3)根据你得到的模型,预报2003年的GDP,并查阅资料,看看你的预报与实际GDP的误差是多少.

(4)你认为这个模型能较好地刻画GDP和年份的关系吗?请说明理由.

解：(1)由表中数据制作的散点图 1.1－1 如下：

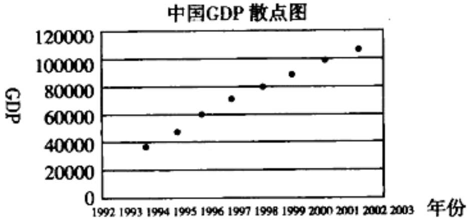

图 1.1－1

从散点图中可以看出 GDP 值与年份近似线性相关关系.

(2)用 y_t 表示 GDP 值，根据已知得 $\hat{a}\approx-14292537.729$，$\hat{b}\approx7191.969$，从而得线性回归方程 $\hat{y}=79191.969t-14292537.729$.

残差计算结果见下表.

GDP 值与年份线性拟合残差表

年份	1993	1994	1995	1996	1997
残差	－6422.269	－1489.238	3037.493	5252.024	4638.055
年份	1998	1999	2000	2001	2002
残差	1328.685	－2140.984	－1932.353	－1277.622	－993.791

(3)2003 年的 GDP 预报值为 112976.360，根据国家统计局 2004 年的统计，2003 年实际 GDP 值为 117251.9，所以预报与实际相差－4275.540.

(4)上面建立的回归方程的 $R^2=0.974$，说明年份能够解释约 97% 的 GDP 值变化，因此所建立的模型能够很好地刻画 GDP 和年份的关系.

点评：两个变量是否相关可以利用图形进行判断，但是图形一定要画的准确.

例 4 一个车间为了规定工时定额，需要确定加工零件所花费的时间，为此进行了 10 次试验. 测得的数据如下：

零件数 x(个)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
加工时间 y(分)	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122

(1)y 与 x 是否具有线性相关关系？

(2)如果 y 与 x 具有线性相关关系，求回归直线方程；

(3)根据求出的回归直线方程，预测加工 200 个零件所用的时间为多少？

解：(1)列出下表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y_i	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122
x_iy_i	620	1360	2250	3240	4450	5700	7140	8640	10350	1200

$\bar{x}=55,\bar{y}=91.7,\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=38500,\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=87777,\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=55950$,

因此 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{10}y_i-10\bar{y}^2)}}$

$=\dfrac{55950-10\times55\times91.7}{\sqrt{(38500-10\times55^2)\times(87777-10\times91.7^2)}}\approx0.9998$,

由于 $r=0.9998>0.75$,因此 x 与 y 之间有很强的线性相关关系,因而可求回归直线方程.

(2)设所求的回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,则有

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\dfrac{55950-10\times55\times91.7}{38500-10\times55^2}\approx0.668$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=91.7-0.668\times55=54.96$,

因此,所求的回归直线方程为 $\hat{y}=0.668x+54.96$.

(3)这个回归直线方程的意义是当 x 每增大 1 时,y 的值约增加 0.668,而 54.96 是 y 不随 x 增加而变化的部分,因此,当 $x=200$ 时,y 的估计值为 $\hat{y}=0.668\times200+54.96=188.56\approx189$,因此,加工 200 个零件所用的工时约为 189 分.

点评:作相关性检验,有时也用作散点图,并观察所给的数据列成的点是否在一条直线的附近,这样做既直观又方便,因而对解决相关性检验问题比较常用,但在作图中,由于存在误差,有时又很难说这些点是不是分布在一条直线的附近,这时就很难判断两个变量之间是否具有相关关系,这时就必须利用样本相关系数对其进行相关性检验,计算中应特别细心,不能出现计算的错误.

例5 某产品的广告费支出 x 与销售额 y(单位:百万元)之间有如下对应数据:

x	2	4	5	6	8
y	30	40	60	50	70

(1)画出散点图;

(2)求回归直线方程;

(3)估计若产品的广告费支出为11(单位:百万元)时,销售额是多少?

解:(1)散点图(略).

(2)由已知可得 $\bar{x}=5$,$\bar{y}=50$,$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=145$,$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1380$,则 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{1380-5\times5\times50}{145-5\times5^2}=6.5$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=50-6.5\times5=17.5$,于是所求的回归直线方程为 $\hat{y}=6.5x+17.5$.

(3)当 $x=11$ 时,$\hat{y}=6.5\times11+17.5=89$,即销售额是89百万元.

点评:掌握求回归直线方程的一般方法.另外,本题中计算 $\hat{b}$ 的公式和课本上的是一样的,可以 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$.本题中 $\hat{b}$ 的公式在计算上更易于操作.

例6 研究某灌溉渠道水的流速 y 与水深 x 之间的关系,测得一组数据如下:

水深 x(m)	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10
流速 y(m/s)	1.70	1.79	1.88	1.95	2.03	2.10	2.16	2.21

(1)求 y 对 x 的回归直线方程;

(2)预测水深为1.95m时水的流速是多少?

解:(1)散点图如图1.1－2所示.

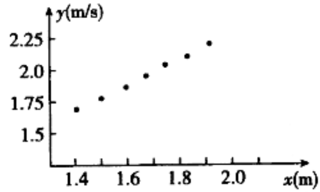

图1.1－2

列表计算 $\hat{a}$ 与回归系数 $\hat{b}$.

序号	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	1.40	1.70	1.96	2.890	2.380
2	1.50	1.79	2.25	3.2041	2.685
3	1.60	1.88	2.56	3.5344	3.008

序号	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
4	1.70	1.95	2.89	3.8025	3.315
5	1.80	2.03	3.24	4.1209	3.654
6	1.90	2.10	3.61	4.4100	3.990
7	2.00	2.16	4.00	4.6656	4.320
8	2.10	2.21	4.41	4.8841	4.641
$\sum$	14.00	15.82	24.92	31.5116	27.993

于是 $\bar{x}=\frac{1}{8}\times 14=1.75$，$\bar{y}=\frac{1}{8}\times 15.82=1.9775$，

$\sum x_i^2=24.92$，$\sum y_i^2=31.5116$，$\sum x_iy_i=27.993$.

$\therefore \hat{b}=\frac{27.993-8\times 1.75\times 1.9775}{24.92-8\times 1.75^2}\approx 0.733$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=1.9975-0.733\times 1.75=0.6948$，

$\therefore y$ 对 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=0.6948+0.733x$.

(2)回归系数 $\hat{b}=0.733$ 的意思是：在此灌溉渠道中，水深每增加 0.1m，水的流速平均增加 0.733m/s，$\hat{a}=0.6948$，可以解释为水的流速中不受水深影响的部分. 把 $x=1.95$ 代入得到 $\hat{y}=0.6948+0.733\times 1.95\approx 2.12$(m/s). 计算结果表明：当水深为 1.95m 时可以预报渠水的流速约为 2.12 米/秒.

例 3 测得某 10 对父子身高(单位：英寸)如下：

父亲身高(x)	60	62	64	65	66	67	68	70	72	74
儿子身高(y)	63.6	65.2	66	65.5	66.9	67.1	67.4	68.3	70.1	70

(1)对变量 y 与 x 进行相关性检验；(2)如果 y 与 x 之间具有线性相关关系，求回归直线方程；(3)如果父亲身高为 73 英寸，估计儿子的身高.

解：$n=10$，$\bar{x}=66.8$，$\bar{y}=67.01$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=44794$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=44941.93$，$\bar{x}^2=4462.24$，$\bar{y}^2=4490.3401$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=44842.4$，于是得 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)}}=$

$$\frac{44842.4-10\times 66.8\times 67.01}{\sqrt{(44794-10\times 4462.24)(44941.93-10\times 4490.3401)}}\approx 0.9804>0.75.$$

所以 y 与 x 具有较强的线性相关关系.

(2)设回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^{\,2}-10\bar{x}^2}\approx 0.4646$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}x\approx$ 35.98，于是回归直线方程为 $\hat{y}=0.4646x+35.98$.

(3)当 $x=73$ 时，$\hat{y}=69.9$，所以父亲身高为 73 英寸时，儿子身高约为 69.9 英寸.

例 8 假定小麦基本苗数 x 与成熟期有效穗 y 之间存在相关关系，今测得 5 组数据如下：

x	15.0	25.8	30.0	36.6	44.4
y	39.4	42.9	42.9	43.1	49.2

(1)以 x 为解释变量，y 为预报变量，作出散点图.

(2)求 y 与 x 之间的回归方程，对于基本苗数 56.7 预报有效穗.

(3)计算各组残差，并计算残差平方和.

(4)求 R^2，并说明残差变量对有效穗的影响占百分之几?

解：(1)散点图(略)

(2)由图看出，样本点呈条状分布，有比较好的线性相关关系，因此可以用线性回归方程刻画它们之间的关系.

设回归方程为 $\hat{y}=bx+a$，$\bar{x}=30.36$，$\bar{y}=43.5$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=5101.51$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=9511.43$，$\bar{x}\,\bar{y}=1320.66$，$\bar{y}^2=1892.25$，$\bar{x}^2=921.7296$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=6746.76$.

则 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}\approx 0.2911$，$a=\bar{y}-\bar{b}x=34.32$.

故所求的回归直线方程为 $\hat{y}=34.32+0.29x$.

当 $x=56.7$ 时，$\hat{y}=34.32+0.29\times 56.7=50.763$，估计成熟期有效穗 50.763.

(3)由于 $y=bx+a+e$，可以算得 $e_i=y_i-\hat{y}_i$ 分别为 $e_1=0.73$，$e_2=1.098$，$e_3=-0.12$，$e_4=-1.83$，$e_5=2.004$. 残差平方和：$\sum\limits_{i=1}^{5}e_i^2=9.11782$.

(4)总偏差平方和：$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=50.18$，回归平方和：$50.18-9.11782=41.06218$，$R^2=\dfrac{41.06218}{50.18}\approx 0.818$. ∴ 解释变量、小麦基本苗数对总效应约贡献了 81.8%. 残差变量贡献了约 $1-81.8\%=18.2\%$.

点评：①在求回归方程时，先画散点图，看样本是否能很好地符合线性相关关系或进行相关性检验.

②总偏差平方和 = 回归平方和 + 残差平方和，相关系数 R^2 表示解释变量对预极变量的贡献中.

例 9 在英语教学中，为了了解学生的词汇量，设计了一份包含 100 个单词的试卷，现抽取 15 名学生进行测试，得到学生掌握试卷中单词个数 x 与该生实际掌握单词量 y 的对应数据如下：

x	61	65	70	69	83	75	58	73
y	2030	2140	2270	2250	2240	2220	1970	2330
x	63	72	71	68	65	67	74	
y	2100	2300	2300	2200	2200	2200	2370	

(1) 对变量 y 与 x 进行相关性检验；

(2) 如果 y 与 x 之间具有线性相关关系，则①求 y 对 x 的回归直线方程；②求 x 对 y 的回归直线方程.

解：(1) 列出下表，并用科学计算器进行有关计算.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	61	65	70	69	83	75	58	73
y^i	2030	2140	2270	2250	2240	2220	1970	2330
x_iy_i	123830	139100	158900	155250	185920	166500	114260	170090
i	9	10	11	12	13	14	15	
x_i	63	72	71	68	65	67	74	
y_i	2100	2300	2300	2200	2200	2200	2370	
x_iy_i	132300	165600	16300	149600	143000	147400	175380	
$\bar{x}=68.93,\bar{y}=2208,\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2=71822,\sum\limits_{i=1}^{15}y_i^2=73298600,\sum\limits_{i=1}^{15}x_iy_i=2290430$								

于是 $\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2-15\bar{x}^2=74822-15\times68.93^2=551.82$,

$\sum\limits_{i=1}^{15}y_i^2-15\bar{y}^2=73298600-15\times2208^2=169640$,

$\sum\limits_{i=1}^{15}x_iy_i-15\bar{x}\,\bar{y}=2290430-15\times68.93\times2208=7468.4$,

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{15}x_iy_i-15\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2-15\bar{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{15}y_i^2-15\bar{y}^2)}}=\frac{7468.4}{\sqrt{551.82\times169640}}\approx0.772.$$

查相关系数检验的临界值表得 $r_{0.05}(15-2)=0.514$

由于 $|r|>r_{0.05}$，故 y 与 x 有线性相关关系.

(2)①设 y 对 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=bx+a$，则 $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{15}x_iy_i-15\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{15}x_i^2-15\bar{x}^2}=\dfrac{7468.4}{551.82}\approx$ 13.5，$a=\bar{y}-b\,\bar{x}=2208-13.5\times68.93=1277.445$，即所求的回归直线方程为 $\hat{y}=13.5x+1277.445$.

②设 x 对 y 的回归直线方程为 $\hat{x}=dy+c$，则 $d=\dfrac{\sum_{i=1}^{15}x_iy_i-15\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{14}y_i^2-15\bar{y}^2}=\dfrac{7468.4}{169640}\approx$ 0.044，$c=\bar{x}-d\,\bar{y}=68.93-0.044\times2208\approx-28.22$，即所求的 x 对 y 的回归直线方程为 $\hat{x}=0.044y-28.22$.

例 10 在一化学反应过程中某化学物质的反应速度 yg/分与一种催化剂的量 x g有关，现收集了 8 组数据列于表中，试建立 y 与 x 之间的回归方程.

催化剂量(g)	15	18	21	24	27	30	33	36
化学物质反应速度(g/分)	6	8	30	27	70	205	65	350

解：根据收集的数据作散点图 1.1-3：

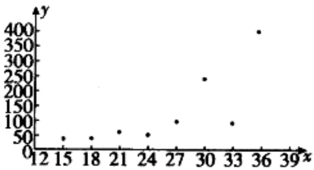

图 1.1-3

根据样本点分布情况，可选用两种曲线模型来拟合.

(1)可认为样本点集中在某二次曲线 $y=c_1x^2+c_2$ 的附近. 令 $t=x^2$，则变换后样本点应该分布在直线 $y=bt+a$ $(b=c_1,a=c_2)$ 的周围.

由题意得变换后 t 与 y 的样本数据表

t	225	324	441	576	729	900	1089	1296
y	6	8	30	27	70	205	65	350