

☆ 21 世纪高等院校规划教材 ☆

# 高等数学

(第3版)

（下册）



徐玉民 宋向东 编

HIGHER  
MATHEMATICS



国防工业出版社

National Defense Industry Press

21 世纪高等院校规划教材

# 高等数学(第 3 版)

下 册

徐玉民 宋向东 编

唐宗贤 审

樊剑武 张波 张洁 参编

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本版《高等数学》上、下册系根据编者多年的教学经验,结合《高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书上册包括函数、极限、连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用及微分方程等7章;下册包括空间解析几何与向量代数,多元函数及其微分法,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数等5章。每章后都配有习题,书后有习题答案。附录中给出了积分表和常用曲线图形。

本书具有理论严谨、语言通俗、说理浅显、叙述详尽等特点,书中习题分为概念理解题、基本要求题和提高题3种类型,以适合不同层次学生的要求,便于自学。

本书可供高等理工科院校作为教材使用,也可供报考研究生的读者备考复习时使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/徐玉民,宋向东编. —3版. —北京:

国防工业出版社,2009.8

ISBN 978-7-118-06357-8

I. 高... II. ①徐...②宋... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 100584 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

\*

开本 787×960 1/16 印张 23 $\frac{3}{4}$  字数 495 千字

2009 年 8 月第 3 版第 1 次印刷 印数 1—5000 册 总定价 70.00 元 上册 35.00 元  
下册 35.00 元

---

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

# 目 录

## 下 册

|                        |    |
|------------------------|----|
| 第八章 空间解析几何与向量代数 .....  | 1  |
| 第一节 空间直角坐标系 .....      | 1  |
| 一、空间直角坐标系 .....        | 1  |
| 二、两点间的距离公式 .....       | 2  |
| 第二节 向量及其线性运算 .....     | 3  |
| 一、向量概念 .....           | 3  |
| 二、向量的加减法 .....         | 3  |
| 三、向量与数的乘法 .....        | 4  |
| 第三节 向量的坐标 .....        | 6  |
| 一、向量在轴上的投影 .....       | 6  |
| 二、向量的坐标 .....          | 7  |
| 三、向量的模、方向余弦的坐标表示 ..... | 9  |
| 第四节 向量的乘积 .....        | 10 |
| 一、两向量的数量积 .....        | 10 |
| 二、两向量的向量积 .....        | 12 |
| * 三、向量的混合积 .....       | 15 |
| 第五节 空间曲面的方程 .....      | 16 |
| 一、曲面方程的概念 .....        | 16 |
| 二、平行于坐标面的平面方程 .....    | 17 |
| 三、球面方程 .....           | 17 |
| 四、母线平行于坐标轴的柱面方程 .....  | 18 |
| 五、旋转曲面方程 .....         | 18 |
| 第六节 平面及其方程 .....       | 20 |
| 一、平面的点法式方程 .....       | 20 |
| 二、平面的一般式方程 .....       | 21 |

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| 三、两平面的夹角 .....                | 23        |
| 第七节 空间曲线的方程 .....             | 24        |
| 一、空间曲线的一般方程 .....             | 24        |
| 二、空间曲线的参数方程 .....             | 25        |
| 三、空间曲线在坐标面上的投影 .....          | 26        |
| 第八节 空间直线及其方程 .....            | 27        |
| 一、直线的一般式方程 .....              | 27        |
| 二、直线的对称式方程 .....              | 27        |
| 三、有关直线和平面的问题 .....            | 29        |
| 第九节 二次曲面 .....                | 34        |
| 一、椭球面 .....                   | 34        |
| 二、单叶双曲面 .....                 | 35        |
| 三、双叶双曲面 .....                 | 36        |
| 四、椭圆抛物面 .....                 | 37        |
| 五、双曲抛物面 .....                 | 37        |
| 六、二次锥面 .....                  | 38        |
| 习题八 .....                     | 39        |
| 本章学习要点 .....                  | 46        |
| 第五单元(空间解析几何与向量代数)检测题 .....    | 48        |
| <b>第九章 多元函数及其微分法</b> .....    | <b>51</b> |
| 第一节 多元函数的概念 二元函数的极限和连续性 ..... | 51        |
| 一、平面点集 $n$ 维空间 .....          | 51        |
| 二、多元函数的概念 .....               | 52        |
| 三、二元函数的极限 .....               | 54        |
| 四、二元函数的连续性 .....              | 57        |
| 第二节 偏导数 .....                 | 58        |
| 一、偏导数的定义及算法 .....             | 58        |
| 二、高阶偏导数 .....                 | 62        |
| 第三节 全微分及其应用 .....             | 64        |
| 一、全微分的概念 .....                | 64        |
| * 二、全微分在近似计算中的应用 .....        | 68        |
| 第四节 多元函数复合函数的微分法 .....        | 69        |
| 一、复合函数的全导数 .....              | 69        |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 二、复合函数偏导数 .....          | 72  |
| 三、全微分形式的不变性 .....        | 76  |
| 第五节 隐函数的微分法 .....        | 77  |
| 一、一元隐函数求导公式 .....        | 77  |
| 二、二元隐函数求导公式 .....        | 79  |
| 三、方程组的情形 .....           | 80  |
| 第六节 多元函数微分法在几何上的应用 ..... | 85  |
| 一、空间曲线的切线及法平面 .....      | 85  |
| 二、空间曲面的切平面与法线 .....      | 88  |
| 第七节 方向导数与梯度 .....        | 90  |
| 一、方向导数 .....             | 90  |
| * 二、梯度 .....             | 92  |
| 第八节 多元函数极值及其求法 .....     | 94  |
| 一、二元函数的极值概念 .....        | 94  |
| 二、极值的必要条件 .....          | 94  |
| 三、极值的充分条件 .....          | 95  |
| 四、二元函数的最大值和最小值 .....     | 96  |
| 五、条件极值 .....             | 98  |
| * 第九节 最小二乘法 .....        | 102 |
| 习题九 .....                | 105 |
| 本章学习要点 .....             | 114 |
| 第六单元(多元函数微分学)检测题 .....   | 116 |
| <b>第十章 重积分</b> .....     | 121 |
| 第一节 二重积分的概念及性质 .....     | 121 |
| 一、二重积分的概念 .....          | 121 |
| 二、二重积分的性质 .....          | 124 |
| 第二节 二重积分的计算 .....        | 126 |
| 一、二重积分在直角坐标系中的计算 .....   | 126 |
| 二、二重积分在极坐标系下的计算 .....    | 132 |
| * 三、二重积分的换元法 .....       | 139 |
| 第三节 三重积分 .....           | 143 |
| 一、三重积分的概念 .....          | 143 |
| 二、三重积分在直角坐标系中的计算 .....   | 144 |

|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| 三、三重积分在柱坐标系中的计算 .....          | 149        |
| 四、三重积分在球面坐标系中的计算 .....         | 151        |
| *五、三重积分的换元积分 .....             | 157        |
| 第四节 重积分的应用 .....               | 159        |
| 一、在几何上的应用 .....                | 159        |
| 二、在物理上的应用 .....                | 165        |
| 习题十 .....                      | 170        |
| 本章学习要点 .....                   | 181        |
| <b>第十一章 曲线积分与曲面积分 .....</b>    | <b>183</b> |
| 第一节 对弧长的曲线积分 .....             | 183        |
| 一、对弧长曲线积分的概念及性质 .....          | 183        |
| 二、对弧长曲线积分的计算法 .....            | 185        |
| 第二节 对坐标的曲线积分 .....             | 187        |
| 一、对坐标的曲线积分的概念及性质 .....         | 187        |
| 二、对坐标的曲线积分的计算法 .....           | 189        |
| 三、两类曲线积分的关系 .....              | 193        |
| 第三节 格林公式 平面上曲线积分与路径无关的条件 ..... | 193        |
| 一、格林(Green)公式 .....            | 193        |
| 二、平面上曲线积分与路径无关的条件 .....        | 199        |
| 第四节 全微分方程 .....                | 202        |
| 一、全微分方程及其解的概念 .....            | 202        |
| 二、二元函数全微分求积 .....              | 203        |
| 三、全微分方程求解 .....                | 207        |
| *四、积分因子 .....                  | 209        |
| 第五节 对面积的曲面积分 .....             | 210        |
| 一、对面积的曲面积分的概念及性质 .....         | 210        |
| 二、对面积的曲面积分的计算法 .....           | 212        |
| 第六节 对坐标的曲面积分 .....             | 214        |
| 一、对坐标的曲面积分的概念及性质 .....         | 214        |
| 二、对坐标的曲面积分的计算法 .....           | 218        |
| 第七节 高斯公式 通量与散度 .....           | 222        |
| 一、高斯(Gauss)公式 .....            | 222        |
| *二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 .....      | 225        |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| * 三、散度与通量 .....           | 226 |
| * 第八节 斯托克斯公式 环流量与旋度 ..... | 227 |
| 一、斯托克斯(Stokes)公式 .....    | 227 |
| 二、空间曲线积分与路径无关的条件 .....    | 230 |
| 三、环流量与旋度 .....            | 231 |
| 习题十一 .....                | 232 |
| 本章学习要点 .....              | 244 |
| 第七单元(多元函数积分学)检测题 .....    | 245 |
| <b>第十二章 无穷级数</b> .....    | 251 |
| 第一节 常数项级数概念和基本性质 .....    | 251 |
| 一、常数项级数的基本概念 .....        | 251 |
| 二、级数的基本性质 .....           | 253 |
| 三、级数收敛的必要条件 .....         | 255 |
| 第二节 正项级数收敛性的判别法 .....     | 257 |
| 一、正项级数的概念及判别收敛的基本法则 ..... | 257 |
| 二、正项级数的比较判别法 .....        | 257 |
| 三、正项级数的比值判别法 .....        | 262 |
| 四、正项级数的根值判别法 .....        | 264 |
| 第三节 任意项级数收敛性的判别法 .....    | 265 |
| 一、交错级数及其收敛性判别法 .....      | 265 |
| 二、任意项级数的绝对收敛与条件收敛 .....   | 267 |
| 第四节 幂级数 .....             | 269 |
| 一、函数项级数概念及其收敛域 .....      | 269 |
| 二、幂级数及其收敛域 .....          | 270 |
| 三、幂级数的性质 .....            | 274 |
| 第五节 函数的幂级数展开 .....        | 277 |
| 一、泰勒(Taylor)公式 .....      | 277 |
| 二、泰勒级数定理 .....            | 282 |
| 三、初等函数的泰勒级数展开式 .....      | 284 |
| 第六节 幂级数应用举例 .....         | 291 |
| 一、欧拉(Euler)公式 .....       | 291 |
| * 二、近似计算 .....            | 292 |
| * 三、微分方程的幂级数解法 .....      | 296 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 第七节 傅里叶(Fourier)级数 ..... | 298 |
| 一、三角级数 三角函数系的正交性 .....   | 298 |
| 二、函数展开成傅里叶级数 .....       | 299 |
| 三、正弦级数和余弦级数 .....        | 305 |
| 四、函数在任意区间上的傅里叶级数 .....   | 309 |
| 习题十二 .....               | 313 |
| 本章学习要点 .....             | 325 |
| 第八单元(无穷级数)检测题 .....      | 327 |
| 习题答案与提示 .....            | 332 |
| 单元检测题答案与提示 .....         | 364 |
| 高等数学期末参考试题(第二学期) .....   | 368 |

## 第八章 空间解析几何与向量代数

在中学数学中,我们已经学过平面解析几何。平面解析几何是建立在平面直角坐标系的基础上,使平面上的点与一对有序数组构成的一一对应关系,把平面上的曲线与方程对应起来,从而用代数方法研究几何问题。平面解析几何是学习一元微积分必不可少的知识。要学习多元函数微积分,则必须掌握空间解析几何。为此,我们应首先掌握工程技术中广泛应用的向量代数。它也是学习空间解析几何的重要工具。

### 第一节 空间直角坐标系

#### 一、空间直角坐标系

在空间一定点  $O$  引出三条互相垂直的数轴,它们有相同的坐标原点  $O$  和相同的长度单位,三个轴分别称为  $Ox$  轴(横轴)、 $Oy$  轴(纵轴)、 $Oz$  轴(竖轴),简称  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴,统称为坐标轴, $O$  称为坐标原点。三个轴的位置符合右手法则,即右手的大拇指、食指和中指互相垂直,若大拇指指向  $Ox$  轴正向,食指指向  $Oy$  轴正向,那么中指就指向  $Oz$  轴的正向,这样便建立了一个空间直角坐标系(见图 8-1)。

每两个坐标轴决定一个平面,称为坐标平面,显然有三个坐标平面。分别称为  $xOy$  面、 $yOz$  面和  $zOx$  面,简称为  $xy$  面、 $yz$  面和  $zx$  面。

三个坐标面把空间分为八个部分,称为八个卦限,依次用 I、II、III、IV、V、VI、VII 和 VIII 表示(见图 8-1)。

对于空间一点  $M$ ,过  $M$  分别作与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴垂直的平面,与各坐标轴的交点分别为  $P$ 、 $Q$  和  $R$ ,这三点在三轴上的坐标依次为  $x$ 、 $y$  和  $z$ (见图 8-2)。

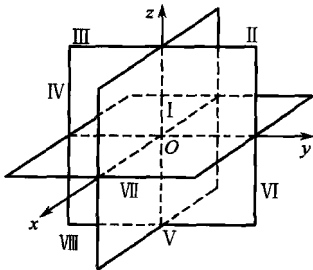


图 8-1

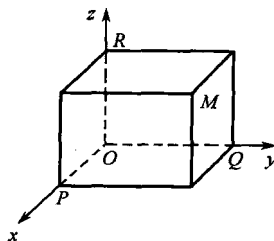


图 8-2

反之,给定一组有序的数  $x$ 、 $y$  和  $z$ ,分别在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上取坐标  $x$ 、 $y$  和  $z$  的点  $P$ 、 $Q$  和  $R$ ,然后过  $P$ 、 $Q$  和  $R$  分别作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的平面,三个平面交于空间的一点  $M$ 。这样我们便建立了空间点  $M$  和一组有序的数  $x$ 、 $y$  和  $z$  之间一一对应关系。称  $x$ 、 $y$  和  $z$  为点  $M$  的坐标,记作  $(x, y, z)$ ,并依次称为横标、纵标和竖标。

坐标面和坐标轴上的点有如下特征:坐标面上的点有一个坐标为零,如  $xy$  面上点有  $z = 0$ ;  $yz$  面上点有  $x = 0$ ;  $zx$  面上点有  $y = 0$ 。坐标轴上的点有两个坐标为零,如  $x$  轴上点有  $y = z = 0$ ;  $y$  轴上点有  $x = z = 0$ ;  $z$  轴上点有  $x = y = 0$ 。

八个卦限中的点的坐标正负号由下表确定:

| 卦限 | I         | II        | III       | IV        |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 符号 | (+, +, +) | (-, +, +) | (-, -, +) | (+, -, +) |
| 卦限 | V         | VI        | VII       | VIII      |
| 符号 | (+, +, -) | (-, +, -) | (-, -, -) | (+, -, -) |

读者不难看出:两点关于坐标面对称,其对应的坐标特征如何;两点关于坐标轴对称,其坐标特征如何;两点关于坐标原点对称,其坐标特征如何。以上问题作为练习留给读者思考。

## 二、两点间的距离公式

已知两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,求两点间的距离  $|M_1M_2|$  (见图 8-3)。

由图 8-3 可见

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 = |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2$$

由于  $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$ ,  $|Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$ ,  $|R_1R_2| = |z_2 - z_1|$ , 于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地,  $O$  到  $M(x, y, z)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**例 8-1-1** 求两点  $M_1(2, 0, -2)$  和  $M_2(-3, -1, 5)$  间的距离。

**解**  $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-0)^2 + (5+2)^2} = 5\sqrt{3}$

**例 8-1-2** 在  $z$  轴上求与两点  $A(-4, 1, 7)$  和  $B(3, 5, -2)$  等距离的点。

**解** 设所求点为  $M(0, 0, z)$ , 由已知条件有

$$|MA| = |MB|$$

$$\text{即 } \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2}$$

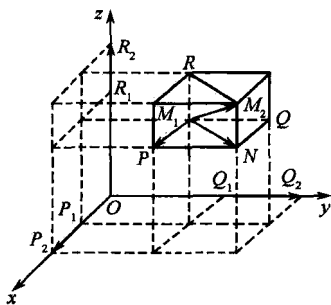


图 8-3

化简后得

$$z = \frac{14}{9}$$

所以  $M$  点的坐标为  $(0, 0, \frac{14}{9})$ 。

习作题 8-1 (见习题八)

(二)2。

## 第二节 向量及其线性运算

### 一、向量概念

在实际问题中,我们所研究的量有两类:一类是数量,它仅用数值大小就可以表示,如面积、体积、质量、温度等;另一类量,仅用数值大小表示还不够,还需要说明它们的方向,如力、速度、加速度等。

我们称既有大小又有方向的量为向量或矢量,向量用有向线段来表示。以  $M_1$  为起点  $M_2$  为终点的有向线段所表示的向量记作  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , 也可以用一个字母表示,如  $a$  (见图 8-4)。有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向为向量的方向。向量的大小称为向量的模,用  $|\overrightarrow{M_1M_2}|$  或  $|a|$  表示。模为 1 的向量称为单位向量,记作  $\overrightarrow{M_1M_2}^0$  或  $a^0$ 。模为零的向量称为零向量,记作  $0$ , 零向量的方向是不确定的。

在实际问题中,有些向量与起点有关,有些向量与起点无关。我们在数学上仅研究与起点无关的向量,这类向量称为自由向量。下面如无特殊说明,所研究的向量就是自由向量。

由上面的规定,我们认为两个向量  $a$  与  $b$  如果大小相等方向相同,那么它们就是两个相等的向量,记作  $a = b$ ,也就是说向量在空间可以任意进行平行移动。

### 二、向量的加减法

由力学上两个力的合力的平行四边形法则,我们来定义两个向量的加法。

#### 1. 向量的加法

设两个向量  $a$  和  $b$  有共同的起点  $O$ , 作  $\overrightarrow{OA} = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = b$ , 以  $\overrightarrow{OA}$  和  $\overrightarrow{OB}$  为邻边作平行四边形  $OACB$  (见图 8-5), 则称对角线向量  $\overrightarrow{OC}$  (记  $\overrightarrow{OC} = c$ ) 为  $\overrightarrow{OA}$  和  $\overrightarrow{OB}$  的和, 记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ 或 } c = a + b$$

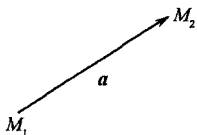


图 8-4

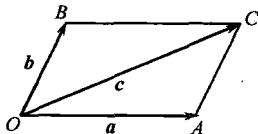


图 8-5

这种求和向量的方法称为平行四边形法则。

由图 8-5 可见  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = b$ , 这又说明把  $b$  的起点放在  $a$  的终点上, 则以  $a$  的起点为起点,  $b$  的终点为终点的向量  $c$  就是  $a$  与  $b$  的和, 这种求向量和的方法称为三角形法则。

向量的加法满足如下运算规则:

$$(1) a + b = b + a \text{ (交换律)}$$

$$(2) (a + b) + c = a + (b + c) \text{ (结合律)}$$

交换律成立可用三角形法则说明, 由图 8-5 可见

$$b + a = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = a + b$$

结合律成立可用图 8-6 说明:

$$\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b$$

$$\overrightarrow{OB} = a + b, \overrightarrow{BC} = c, \text{ 所以}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (a + b) + c$$

$$\text{另一方面, } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = b + c, \text{ 所以 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = a + (b + c)$$

故

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

## 2. 向量的减法

我们定义向量的减法为向量加法的逆运算。若  $b + c = a$ , 则称  $c$  为  $a$  与  $b$  的差, 记作  $c = a - b$ 。

由图 8-7 可见, 将  $a$  与  $b$  的起点放在一起, 则以  $b$  的终点为起点,  $a$  的终点为终点的向量就是  $a - b$ 。

我们把与向量  $b$  的模相等方向相反的向量称为  $b$  的负向量, 记作  $-b$ 。由图 8-7 可见

$$a - b = a + (-b) = c$$

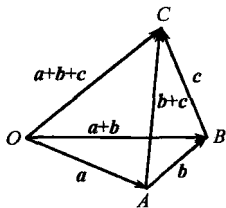


图 8-6

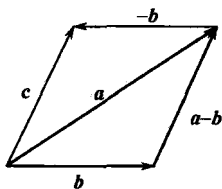


图 8-7

## 三、向量与数的乘法

设  $\lambda$  为一实数,  $a$  为一向量, 我们定义  $\lambda a$  为一向量: 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  同向, 且有  $|\lambda a| = |\lambda| |a| = \lambda |a|$ ; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  反向, 且有  $|\lambda a| = |\lambda| |a| = -\lambda |a|$ ; 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a = 0$ 。

由定义可得如下运算法则:

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \quad (\lambda, \mu \text{ 为实数})$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$(3) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

这些法则可通过向量与数量乘法的定义来说明,这里从略。

由向量与数的乘法,我们可以把单位向量和负向量表示如下:

(1) 设  $a$  为非零向量,与  $a$  方向相同模为 1 的单位向量可表示为

$$a^0 = \frac{1}{|a|}a, \text{ 即 } a = |a|a^0$$

(2)  $a$  的负向量表示为  $-a = (-1)a$

**例 8-2-1** 设有平行四边形  $ABCD$ , 其中  $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, M$  是对角线的交点。试用  $a$  与  $b$  表示向量  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$  和  $\overrightarrow{MD}$  (见图 8-8)。

$$\text{解} \quad \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} (a + b)$$

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (b - a)$$

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2} (a + b)$$

$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} (a - b)$$

**例 8-2-2** 设有等腰梯形  $ABCD$  (见图 8-9), 其中  $\overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AB} = a, \angle A = 60^\circ$ 。试用  $a$  和  $b$  表示  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$  和  $\overrightarrow{BD}$ 。

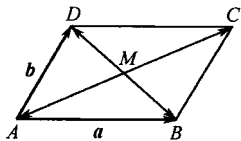


图 8-8

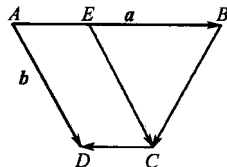


图 8-9

**解** 作  $EC \parallel AD$ ,  $\triangle BEC$  为等边三角形, 因此有  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC} = b, \overrightarrow{EB} = |b|a^0 = \frac{|b|}{|a|}a$ , 于是

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB} = b - \frac{|b|}{|a|}a$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB}) = -\left(a - \frac{|b|}{|a|}a\right) = \frac{|b| - |a|}{|a|}a$$

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{b} + \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$$

习作题 8-2 (见习题八)

(二)6。

### 第三节 向量的坐标

#### 一、向量在轴上的投影

首先给出两向量的夹角概念。设有向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 在空间一点  $O$  作  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ , 称  $\angle AOB = \varphi$  为两向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角, 其中  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , 记作  $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$  或  $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}})$ 。向量与轴的夹角也可类似定义。

所谓空间一点  $M$  在轴  $u$  上的投影, 即过点  $M$  作与轴  $u$  垂直的平面, 该平面与轴  $u$  的交点为  $M'$ , 称点  $M'$  为点  $M$  在轴  $u$  上的投影。

现有一向量  $\overrightarrow{AB}$  和轴  $u$ , 向量的起点  $A$  和终点  $B$  在轴  $u$  上的投影分别为  $A'$  和  $B'$  (见图 8-10), 称有向线段  $\overrightarrow{A'B'}$  的值  $A'B'$  为向量  $\overrightarrow{AB}$  在轴  $u$  上的投影, 记作  $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$ , 轴  $u$  称为投影轴。

**注** 轴上有向线段  $\overrightarrow{A'B'}$  的值是这样的一个数, 该数的绝对值等于  $\overrightarrow{A'B'}$  的长度, 该数的符号由  $\overrightarrow{A'B'}$  的方向是否与轴  $u$  的正向相同或相反决定, 相同取正号, 相反取负号, 由上述规定可得

$$A'B' = x_2 - x_1 \quad (8-1)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  分别为  $A'$  和  $B'$  在轴  $u$  上的坐标。

关于向量在轴上投影有下面两个定理。

**定理 8-3-1** 向量  $\overrightarrow{AB}$  在轴  $u$  上的投影, 等于向量的模乘以轴与向量夹角  $\varphi$  的余弦, 即

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B' = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi \quad (8-2)$$

**证** 如图 8-11 所示, 过  $A$  引轴  $u'$  与轴  $u$  平行且有相同的正方向, 那么  $\overrightarrow{AB}$  与轴  $u'$  的夹角也等于  $\varphi$ , 且有

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}$$

但是

$$\text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$$

所以

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$$

向量在轴上的投影是一个数, 当向量和轴的夹角为锐角时投影为正, 成钝角时投影为负, 成直角时投影为零。

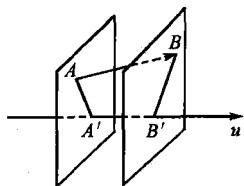


图 8-10

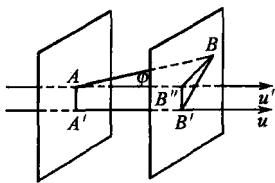


图 8-11

由定理 8-3-1 可知,两向量相等,它们在轴的投影也是相等的。

**定理 8-3-2** 有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在轴上的投影之和,即

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2 + \cdots + \text{Prj}_u \mathbf{a}_n \quad (8-3)$$

证明从略。

## 二、向量的坐标

下面我们建立向量和一组有序数之间的对应关系。

设向量  $\mathbf{a}$  的起点为  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , 终点为  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , 即  $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{a}$ ,  $M_1$  在三个轴上的投影分别为  $P_1, Q_1, R_1$ ,  $M_2$  在三个轴上的投影分别为  $P_2, Q_2, R_2$ , 设  $a_x, a_y, a_z$  分别为  $\mathbf{a}$  在三个坐标轴上的投影, 即  $a_x$  为有向线段  $\overrightarrow{P_1P_2}$  的值,  $a_y$  为有向线段  $\overrightarrow{Q_1Q_2}$  的值,  $a_z$  为有向线段  $\overrightarrow{R_1R_2}$  的值, 由式(8-1) 可知

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$$

由图 8-3 可见

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{R_1R_2} \quad (8-4)$$

称  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{Q_1Q_2}, \overrightarrow{R_1R_2}$  为向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  在  $x, y, z$  轴上的分向量。

若以  $i, j, k$  分别表示  $x, y, z$  轴正向的单位向量, 并称它们为基本单位向量, 则有

$$\overrightarrow{P_1P_2} = a_x i = (x_2 - x_1) i$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = a_y j = (y_2 - y_1) j$$

$$\overrightarrow{R_1R_2} = a_z k = (z_2 - z_1) k$$

$$\text{所以} \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j + (z_2 - z_1) k \quad (8-5)$$

$$\mathbf{a} = a_x i + a_y j + a_z k \quad (8-6)$$

称式(8-5) 或式(8-6) 为向量  $\mathbf{a}$  按基本单位向量的分解式。 $a_x, a_y, a_z$  称为  $\mathbf{a}$  的坐标, 把表达式

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

称为  $\mathbf{a}$  的坐标表达式, 即

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

由式(8-6)可见,向量 $\mathbf{a}$ 的坐标即为向量 $\mathbf{a}$ 在三个坐标轴上的投影。由式(8-5)可知,如果向量的起点和终点的坐标已知,则向量的坐标等于终点的坐标减去起点的坐标。另外,若两向量相等,当且仅当它们的坐标对应相等。

特殊地,若向量的起点为 $O$ ,终点为 $M(x, y, z)$ ,则向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式为 $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ ,这说明,如果向量的起点在原点,则终点的坐标就是向量的坐标。 $\overrightarrow{OM}$ 又称为 $M$ 点关于 $O$ 点的向径,记作 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ 。

利用向量的坐标表示式,可得向量的加法、减法和数乘运算如下:

设 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ,  $\lambda$ 为数,则有

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \pm (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) =$$

$$(a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k}$$

$$\text{即} \quad \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\} \quad (8-7)$$

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \quad (8-8)$$

**例 8-3-1** 已知 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M$ 分 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 为定比 $\lambda$ ,即

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda \quad (\lambda \neq -1)$$

求 $M(x, y, z)$ 的坐标。

**解** 因为 $\overrightarrow{M_1 M} = \lambda \overrightarrow{M M_2}$ , 而

$$\overrightarrow{M_1 M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M M_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$$

于是

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

$$\text{最后求得} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (8-9)$$

特殊地,当 $\lambda = 1$ 时,得中点坐标公式

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

**例 8-3-2** 已知 $M_1(2, -2, 5)$ ,  $M_2(-1, 6, 7)$ , 求 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在三个轴上的投影, 分向量和坐标表示式。

**解**  $\overrightarrow{M_1 M_2} = \{-3, 8, 2\} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , 故 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在三个轴上的投影依次为 $-3$ 、