1998
硕士研究生入学考试

数学
考点分析及模拟试题

主编　陈文灯

学苑出版社

1998 硕士研究生入学考试

数学

考点分析及模拟试题

主编 陈文灯

14
28

1998 硕士研究生入学考试数学考点分析及模拟试题

主　编　陈文灯
副主编　陶　伟

学 苑 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

1998 硕士研究生入学考试数学考点分析及模拟试题/陈文灯 主编.
-北京:学 苑 出 版 社,1997.8

ISBN 7-5077-0389-4
Ⅰ.19… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学-研究生-入学考试-试题-教材-1998 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 03884 号

1998 硕士研究生入学考试
数学考点分析及模拟试题
主编 陈文灯
学苑出版社出版发行
北京万寿路西街 11 号 100036
北京市彩虹印刷厂印刷 新华书店经销
787×1092 16 开本 24.25 印张 630 千字
1997 年 8 月北京第 1 版 1997 年 8 月北京第 1 次印刷
印数:5000 册
定价:30.00 元

前　　言

为了帮助广大准备报考硕士研究生的考生在较短时间内高效率地掌握“考纲”所要求的各知识点，了解考试信息，把握最新考试动态，全面提高应试能力，从而较为顺利地通过统考，作者根据国家教委颁布的《数学考试大纲》的最新精神和近几年统考命题的特点，并结合作者多年来“考研班数学辅导”的成功经验，编写了本书。

本书特点：

(1) 重点突出。本书对考纲要求重点掌握的基本概念、公式、定理以及相关概念、公式、定理之间的区别和联系作了较为透彻地剖析，便于考生对这些重点内容的理解和正确应用，避免犯概念性及错用公式、定理的解题错误。

(2) 针对性强。本书从总结常考题型的角度出发，详细地介绍了各类题型的解题方法和技巧，分析了各类题型的发展变化过程，并对各类题型的发展趋势进行了预测，特别对综合性较强、难度较大的常考题型作了定式解法处理，从而提高考生解题速度和准确性以及综合运用知识的应试能力。

另外，本书还精心编写了 12 套模拟试题，在内容上紧扣考试大纲，在题型上既有基本题，也有一定数量的综合题，且难易适度，比较适应实际应试要求。考生通过模拟测试，不仅能提高应试能力，而且能从中了解到数学试题的命题思路和命题新动向。

本书是考研应试者的良师益友，也是大专院校的学生学习数学的一本极有价值的参考书。

限于水平和时间，疏漏及失误在所难免，欢迎广大读者、数学界同仁批评指正。

陈文灯
1997.7

目　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续……(1)
第一节　函数……(1)
一．考点分析……(1)
二．常考题型分析及解题方法与技巧……(2)
题型（一）　求复合函数的表达式……(2)
题型（二）　求函数 f（x）的表达式……(3)
第二节　极限……(9)
一．考点分析……(9)
二．常考题型分析及解题方法与技巧……(10)
题型（一）　求数列的极限……(10)
题型（二）　求未定式函数的极限……(19)
题型（三）　关于函数极限的杂题……(27)
题型（四）　确定无穷小量的阶……(29)
题型（五）　极限式中常数的确定……(30)
第三节　连续……(33)
一．考点分析……(33)
二．常考题型分析及解题方法与技巧……(34)
题型（一）　分段函数连续性的讨论……(34)
题型（二）　分段函数中常数的确定……(38)
第二章　导数与微分……(42)
一．考点分析……(42)
二．常考题型分析及解题方法与技巧……(43)
题型（一）　利用定义求导数……(43)
题型（二）　求各类函数的导数和微分……(46)
题型（三）　求高阶导数……(48)
第三章　不定积分……(51)
一．考点分析……(51)
二．常考题型分析及解题方法与技巧……(51)
题型（一）　运用第一换元法（凑微分法）积分……(51)
题型（二）　运用第二换元法（变量置换法）积分……(53)

题型（三） 运用分部积分法积分 …… (56)
题型（四） 分式有理函数的积分 …… (59)
题型（五） 简单无理函数的积分 …… (61)
题型（六） 三角有理式的积分 …… (63)
题型（七） 含反三角函数的积分 …… (68)
题型（八） 抽象函数的积分 …… (69)
题型（九） 分段函数的积分 …… (70)
第四章 定积分及广义积分 …… (72)
第一节 定积分 …… (72)
一．考点分析 …… (72)
二．常考题型分析及解题方法与技巧 …… (73)
题型（一） 定积分的计算 …… (73)
题型（二） 有关积分限函数的命题 …… (85)
题型（三） 定积分等式的证明 …… (88)
√ 题型（四） 定积分不等式的证明 …… (94)
第二节 广义积分 …… (99)
一．考点分析 …… (99)
二．常考题型分析及解题方法与技巧 …… (100)
题型（一） 广义积分的计算 …… (100)
题型（二） 广义积分敛散性的判断 …… (103)
第五章 中值定理 …… (106)
一．考点分析 …… (106)
二．常考题型分析及解题方法与技巧 …… (106)
题型（一） 有关闭区间上连续函数的命题的证明 …… (106)
题型（二） 有关中值定理的命题的证明 …… (107)
第六章 一元微积分的应用 …… (117)
第一节 导数的应用 …… (117)
一．考点分析 …… (117)
二．常考题型分析及解题方法与技巧 …… (117)
题型（一） 判断函数的增减性 …… (117)
题型（二） 求函数的极值与最值 …… (118)
题型（三） 关于方程根的讨论 …… (123)
题型（四） 求作函数的图形 …… (126)
√ 题型（五） 有关不等式的证明 …… (128)
第二节 定积分的应用 …… (133)
一．考点分析 …… (133)
二．常考题型分析及解题方法与技巧 …… (134)
题型（一） 求平面图形的面积 …… (134)

题型（二） 求平面曲线的长度……………………………………………………（135）
题型（三） 求体积……………………………………………………………（136）
题型（四） 求旋转体的侧面积………………………………………………（138）
题型（五） 求变力所作的功、引力及液体的静压力……………………（138）
第七章 向量代数与空间解析几何………………………………………（140）
一．考点分析…………………………………………………………………（140）
二．常考题型分析及解题方法与技巧………………………………………（140）
题型（一） 向量的运算………………………………………………………（140）
题型（二） 求空间直线方程…………………………………………………（142）
题型（三） 求平面方程………………………………………………………（144）
题型（四） 求切线切面方程…………………………………………………（146）
题型（五） 求直线、平面间夹角与距离……………………………………（147）
题型（六） 求投影方程………………………………………………………（148）
题型（七） 求曲面方程………………………………………………………（149）
第八章 多元函数微分学…………………………………………………（150）
一．考点分析…………………………………………………………………（150）
二．常考题型分析及解题方法与技巧………………………………………（151）
题型（一） 有关二元函数概念与性质的命题………………………………（151）
题型（二） 求二重极限………………………………………………………（153）
题型（三） 求简单显函数的偏导数…………………………………………（154）
题型（四） 求复合函数的偏导数及全微分…………………………………（155）
题型（五） 求隐函数的偏导数及全微分……………………………………（158）
题型（六） 关于微分恒等式的证明…………………………………………（160）
题型（七） 求函数的方向导数与梯度………………………………………（161）
题型（八） 求多元函数的极值………………………………………………（162）
第九章 重积分……………………………………………………………（166）
一．考点分析…………………………………………………………………（166）
二．常考题型分析及解题方法与技巧………………………………………（166）
题型（一） 有关二重积分概念及其性质的命题……………………………（166）
题型（二） 交换积分次序……………………………………………………（167）
题型（三） 二重积分的计算…………………………………………………（170）
题型（四） 有关二重积分等式的证明………………………………………（173）
题型（五） 有关二重积分不等式的证明……………………………………（173）
题型（六） 三重积分的计算…………………………………………………（174）
题型（七） 重积分的应用……………………………………………………（181）
第十章 曲线曲面积分……………………………………………………（184）
一．考点分析…………………………………………………………………（184）
二．常考题型分析及解题方法与技巧………………………………………（185）

题型（一） 曲线积分的计算……（185）
题型（二） 曲面积分的计算……（191）
题型（三） 向量场的散度和旋度的计算……（196）
第十一章 无穷级数……（197）
一．考点分析……（197）
二．常考题型分析及解题方法与技巧……（198）
题型（一） 常数项级数敛散性的判定……（198）
题型（二） 求一般函数项级数的收敛域……（203）
题型（三） 求幂级数的收敛半径与收敛区间……（205）
题型（四） 求幂级数的和函数……（207）
题型（五） 求函数的幂级数展开式……（210）
题型（六） 数项级数求和……（212）
题型（七） 求函数的付立叶级数……（214）
第十二章 常微分方程与差分方程初步……（218）
一．考点分析……（218）
二．常考题型分析及解题方法与技巧……（221）
题型（一） 一阶微分方程的求解……（221）
题型（二） 可降阶的高阶微分方程的求解……（227）
题型（三） 高阶线性微分方程的求解……（228）
题型（四） 一阶常系数线性微分方程组的求解……（231）
题型（五） 一阶差分方程的求解……（232）
第十三章 微积分在经济中的应用……（234）
一．考点分析……（234）
二．常考题型分析及解题方法与技巧……（234）

第二篇 线性代数

第一章 行列式……（238）
一．考点分析……（238）
二．常考题型分析及解题方法与技巧……（239）
题型（一） 有关行列式概念和基本性质的命题……（239）
题型（二） 三阶行列式的计算……（240）
题型（三） 四、五阶行列式的计算……（241）
题型（四） n 阶行列式的计算……（242）
第二章 矩阵……（245）
一．考点分析……（245）
二．常考题型分析及解题方法与技巧……（246）
题型（一） 有关矩阵概念和基本性质的命题……（246）
题型（二） 求矩阵的相关量……（247）

题型（三） 求解矩阵方程…………(250)
题型（四） 求解关于逆矩阵的命题…………(251)
题型（五） 求解关于矩阵秩的命题…………(254)
第三章 向量…………(256)
一．考点分析…………(256)
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………(257)
题型（一） 关于向量概念和基本性质的命题…………(257)
题型（二） 关于线性组合的命题…………(259)
题型（三） 关于向量组线性相关性的命题…………(261)
题型（四） 关于极大线性无关组的命题…………(263)
题型（五） 求解正交向量组…………(264)
第四章 线性方程组…………(266)
一．考点分析…………(266)
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………(266)
题型（一） 关于线性方程组的解的基本概念的命题…………(266)
题型（二） 含有参数的线性方程组解的讨论…………(269)
题型（三） 有关线性方程组命题的证明…………(271)
题型（四） 杂题…………(274)
第五章 矩阵的特征值和特征向量…………(275)
一．考点分析…………(275)
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………(276)
题型（一） 关于矩阵的特征值和特征向量概念和性质的命题…………(276)
题型（二） 求解矩阵的特征值和特征向量…………(280)
题型（三） 求解矩阵的特征值和特征向量的逆命题…………(282)
题型（四） 杂题…………(283)
第六章 二次型…………(286)
一．考点分析…………(286)
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………(286)
题型（一） 判断二次型或矩阵的正定性…………(286)
题型（二） 化二次型为标准形…………(287)
题型（三） 求解二次型中所含参数和正交变换…………(289)

第三篇 概率论与数理统计初步

第一章 随机事件及其概率…………(291)
一．考点分析…………(291)
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………(292)
题型（一） 利用事件之间的关系计算概率…………(292)
题型（二） 古典概型与几何概型的概率计算…………(293)

题型（三） 利用条件概率与乘法公式计算概率…………（294）
题型（四） 利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率…………（295）
第二章 随机变量及其概率分布…………（298）
一．考点分析…………（298）
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………（302）
题型（一） 求解一维随机变量的分布函数和分布密度…………（302）
题型（二） 求解一维随机变量函数的分布律和分布密度…………（305）
题型（三） 求解二维随机变量的分布函数和分布密度…………（307）
题型（四） 求解二维随机变量函数的分布律和分布密度…………（309）
第三章 随机变量的数字特征…………（313）
一．考点分析…………（313）
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………（313）
题型（一） 求解一维随机变量的数字特征…………（313）
题型（二） 求解一维随机变量函数的数字持征…………（315）
题型（三） 求解二维随机变量的数字特征…………（316）
第四章 大数定律和中心极限定理…………（319）
一．考点分析…………（319）
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………（319）
题型（一） 估算事件的概率…………（319）
题型（二） 试验 n 值的确定 …………（320）
题型（三） 杂题…………（321）
第五章 数理统计初步…………（323）
一．考点分析…………（323）
二．常考题型分析及解题方法与技巧…………（326）
题型（一） 求参数的估计量…………（326）
题型（二） 求置信区间…………（328）
题型（三） 假设检验…………（329）

第四篇 模拟试题及参考答案

数学一 模拟试题
模拟试题（Ⅰ）…………（330）
模拟试题（Ⅱ）…………（331）
模拟试题（Ⅲ）…………（332）
数学二 模拟试题
模拟试题（Ⅰ）…………（334）
模拟试题（Ⅱ）…………（335）
模拟试题（Ⅲ）…………（336）
数学三 模拟试题

模拟试题（Ⅰ）………………………………………………………………………………（338）
模拟试题（Ⅱ）………………………………………………………………………………（339）
模拟试题（Ⅲ）………………………………………………………………………………（341）
数学四　模拟试题
模拟试题（Ⅰ）………………………………………………………………………………（342）
模拟试题（Ⅱ）………………………………………………………………………………（344）
模拟试题（Ⅲ）………………………………………………………………………………（345）
参考答案……………………………………………………………………………………（348）

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

第一节　函　数

一．考点分析

1．函数的概念　对于函数概念要注意以下几点：

(1) 函数的实质是指定义域 D 上的对应法则 f。在数学分析中常通过函数值 $f(x)$ 来研究函数，为了简单起见，简称 $y = f(x)$ 是 x 的函数。

(2) 函数概念的两个要素：定义域和对应法则。函数的表示法只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x) = f(t) = f(u) \cdots\cdots$$

简称函数表示法的“无关特性”，这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法。

(3) 两个函数当且仅当其定义域和对应法则相同时才表示同一函数，否则，它们表示不同的函数。

2．函数的奇偶性　应注意以下几点：

(1) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数。

(2) 判别给定函数的奇偶性，主要是根据其定义，有时也用其运算性质：

① 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；

② 偶数个奇(或偶) 函数的积为偶函数；

③ 一奇函数与一偶函数的乘积为奇函数。

(3) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法。

3．复合函数　关于复合函数应注意以下几点：

(1) 函数的复合是有条件的，并不是任何两个函数都能复合成一个复合函数。只有复合函数 $y = f[g(x)]$ 的定义域 D_f 与函数 $g(x)$ 的值域 Z_g 满足 $D_f \cap Z_g \neq \varnothing$(空集)，适当限制 x 的取值范围时，f 与 g 才能构成复合函数。一般来说，复合函数 $y = f[g(x)]$ 的定义域是函数 $g(x)$ 定义域的一部分。例如：函数

$$y = f(u) = \sqrt{u-2}, \qquad u \in D_f = [2, +\infty)$$

$$u = g(x) = \sin x, \qquad x \in D_g = R, \quad u \in Z_g = [-1, 1]$$

因 $D_f \cap Z_g = [2, +\infty) \cap [-1, 1] \neq \varnothing$，故这两个函数构成复合函数

$$y = f[g(x)] = \ln\sin x$$

其定义域为 $D_f = \{x \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

(2) 一个函数是否为复合函数与该函数的对应法则的表示方法有关。例如，$y = 1$ 和 $y = \sin^2 x$

$+\cos^2 x$ 的对应法则相同，但对应法则的表示方法不同，前者不是复合函数，而后者可看成是由 $y = u^2 + v^2, u = \sin x, v = \cos x$ 复合而成的复合函数。

二. 常考题型分析及解题方法与技巧

题型(一) 求复合函数的表达式：

将两个或两个以上函数进行复合，通常有以下几种解题方法：

1. 代人法

将一个函数的自变量用另一个函数的表达式替代，这种构成复合函数的方法称之为代入法，该法适用于初等函数的复合。

例 1.1 设 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x) = f[f\cdots f(x)]$

[解] $f_2(x) = f[f(x)] = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

由以上二式可推测 $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

2. 分析法

所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法。该法适用于初等函数与分段函数，或分数函数之间的复合。

例 1.2 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ ________.

分析：由已知条件知，无论 x 取何值总有 $|f(x)| \leqslant 1, x \in (-\infty, +\infty)$，现将 $f(x)$ 作为 $f[f(x)]$ 的自变量时，自然有 $f[f(x)] = 1$

[解] 应填 1.

例 1.3 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}$，$\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$

[解] $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geqslant 1 \end{cases}$

1° 当 $\varphi(x) < 1$ 时：

当 $x < 0$ 时，$\varphi(x) = x + 2 < 1$，即 $\begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$

当 $x \geqslant 0$ 时，$\varphi(x) = x^2 - 1 < 1$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant x < \sqrt{2}$

2° 当 $\varphi(x) \geqslant 1$ 时：

当 $x < 0$ 时，$\varphi(x) = x + 2 \geqslant 1$，即 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leqslant x < 0$

当 $x \geqslant 0$ 时，$\varphi(x) = x^2 - 1 < 1$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant +\sqrt{2} \text{ 或 } x \leqslant -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \sqrt{2}$

综上所述可得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$, $g(x+1)=x^2+x+1$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

[解] 由 $g(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+1\Rightarrow g(x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

则 $f[g(x)]=\begin{cases}0 & ,g(x)<0\\ g(x) & ,g(x)\geqslant 0\end{cases}=x^2-x+1,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1 & ,x<0\\ x^2-x+1 & ,x\geqslant 0\end{cases}$.

3. 图示法(略)

题型(二) 求函数 $f(x)$ 的表达式(重点)

这是常考题型,一般是给定某函数方程,要求函数 $f(x)$ 的表达式,通常有以下解题方法:

Ⅰ. 利用函数表示法与用何字母表示无关的"特性"求函数 f(x) 的表达式。

例 1.5 设 $f(x)$ 满足关系式 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x),(a^2\neq 1)$ ①

其中 $\varphi(x)$ 是当 $x\neq 1$ 时有定义的已知函数,求 $f(x)$.

[解] 令 $t=\frac{x}{x-1}\Rightarrow x=\frac{t}{t-1}$, 则 ①$\Rightarrow$ $f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$

即 $$f(x)=af\left(\frac{x}{x-1}\right)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad ②$$

解由 ①,② 联立的方程组,得 $f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$

例 1.6 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x, 0<x<1$,求 $f(x)$.

[解题提示] 对于给定的含有三角函数的函数方程,一般是先将表达式化为对应号 $f()$ 中变量的相关形式,再用"特性"求 $f(x)$.

[解] 因 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x=1-2\sin^2 x+\frac{1}{1-\sin^2 x}-1$

$$=\frac{1}{1-\sin^2 x}-2\sin^2 x$$

则 $f'(x)=\frac{1}{1-x}-2x \quad (0<x<1)$

故 $f(x)=-ln|1-x|-x^2+C \quad (0<x<1)$.

Ⅱ. 利用极限和连续求函数 f(x) 的表达式

例 1.7 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界,且满足方程 $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$

求 $f(x)$.

[解] 由 $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$ 可得

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)-\frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)^2$$

……

$$\frac{1}{2^{n-1}}f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2$$

将以上诸式两边分别相加,得

$$f(x)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时两边取极限,注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}\to 0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界以及等比级数的性质,则有

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{8}{7}x^2$$

例 1.8　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且对于任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 恒有

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad ①$$

成立,求 $f(x)$.

[解]　令 $y=0$,则有　$f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

由于　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)-f(x)]=f(0)=0$

故　$f(x)$ 在点 x 处连续,由 x 的任意性知,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续。

又因　$\lim\limits_{y\to x}f(x+y)=\lim\limits_{y\to x}[f(x)+f(y)]$

故　$f(2x)=2f(x)$

设　当 $n=k\geqslant 2$ 时,$f(kx)=kf(x)$,　当 $n=k+1$ 时,则有

$$f[(k+1)x]=f[kx+x]=f(kx)+f(x)=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x)$$

可见,对于 $n=k+1$ 时上式也成立,由数列归纳法可知　$f(nx)=nf(x)$

令　$x=\frac{1}{n}$,则有　$f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)$　,　即　$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)$

由 $f(x)$ 的连续性,可得　$f(x)=xf(1)$

例 1.9　设 $P(x)$ 是多项式,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)-x^3}{x^2}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x}=1$,求 $P(x)$.

[解]　$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)-x^3}{x^2}=2$,　$\therefore P(x)$ 的最高次项应为 x^3,二次项为 $2x^2$.

于是　设 $P(x)=x^3+2x^2+ax+b$,其中 a、b 为待定常数。

又　$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x}=1$, $\therefore P(x)=x^3+2x^2+ax+b$ 与 x 是等价无穷小($x\to\infty$ 时),从而得

$$b=0, a=1$$

故　$P(x)=x^3+2x^2+x$

Ⅲ. 利用导数的定义求函数 f(x) 的表达式

例 1.10　求满足方程　$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$　的函数 $f(x)$,其中已知 $f'(0)$ 存在。

[解]　由已知　$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$

令　$y=0\Rightarrow f(0)=0$,注意到　$\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0)$ (导数的定义)

$\lim\limits_{y\to 0}f(y)=f(0)=0$

则 $$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}-f(x)}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{f(y)[1+f^2(x)]}{y[1-f(x)f(y)]}=f'(0)[1+f^2(x)]$$

故 $$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)$$

积分得 $\operatorname{arctg}[f(x)]=f'(0)x \quad\Rightarrow\quad f(x)=\operatorname{tg}[f'(0)x]$

例 1.11 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f'(0)$ 存在，且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，求 $f(x)$.

[解] 由已知 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ ①

令 $y=0 \Rightarrow f(x)=f(x)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

又由 ① 可得 $$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

当 $y\to0$ 时，对上式取极限，于是有

$$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\left(\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x\right)=f'(0)+2x$$

即 $f'(x)=f'(0)+2x$

积分得 $f(x)=f'(0)x+x^2+c$

将 $f(0)=0$ 代入上式 $\Rightarrow$ $c=0$

故 $f(x)=f'(0)x+x^2$

例 1.12 求满足方程

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2) \qquad ①$$

的 $f(x)$ 表达式，其中 x_1、x_2 为任意实数，且已知 $f'(0)=2$

[解] 由 ① 式，令 $x_1=x_2=0$， 则有 $f(0)[f(0)-1]=0$

于是有 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$，如果 $f(0)=0$，则由导数定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(0)f(x)-f(0)}{x}=0$$

显然，这与已知 $f'(0)=2$ 相矛盾，故舍去 $f(0)=0$

当 $f(0)=1$ 时，由导数定义有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0)=2f(x)$$

积分可得 $f(x)=ce^{2x}$

因 $f(0)=1$， 故 $c=1$， 于是所求 $f(x)=e^{2x}$

Ⅳ. 利用变上限积分的可导性求函数 $f(x)$ 的表达式(重点)

[解题提示] 象这类 $f(x)$ 满足含有变上限积分的方程，要求 $f(x)$，一般先利用变上限积分的可导性，将积分方程转化为微分方程，然后利用积分或求解微分方程的方法得出 $f(x)$ 的表达式。

例 1.13 设 $f^2(x)=\int_0^x f(t)\cdot t\sin t\,dt$，求 $f(x)$.

[解] 在方程两端对 x 求导可得

$$2f(x)f'(x)=f(x)\cdot x\sin x\,,\quad 即 \quad f'(x)=\frac{1}{2}x\sin x$$