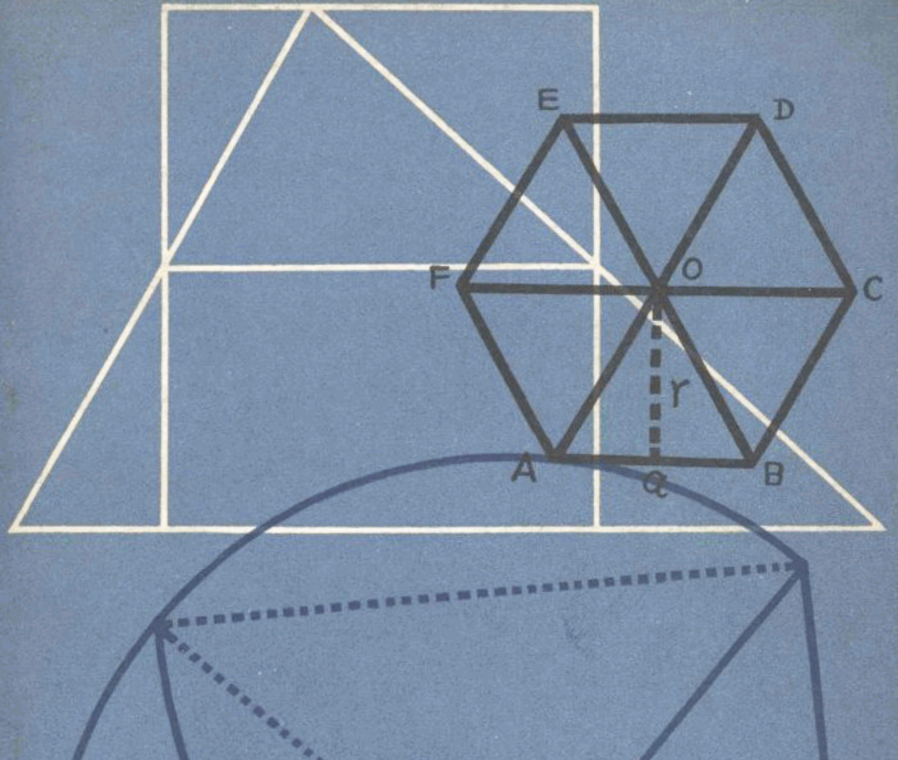

中学生课外读物

面积计算

孙福元

吉林人民出版社

中学生課外讀物

面积計算

孙福元

吉林人民出版社

1963·长春

中学生課外讀物

面 积 計 算

孙福元

*

吉林人民出版社出版（长春市北京大街）

吉林省书刊出版业营业许可証出字第1号

长春新华印刷厂印刷 吉林省新华书店发行

开本：787×1092 1/32 統一书号：7091·472

印张：1 7/8 字数：41千字

印数：1—2,200册

1963年8月第一版

1963年8月第一版第一次印刷

定价：一角五分

前　　言

这本小册子是作为中学生在学习几何上的参考讀物而編写的。它是結合中学几何教材，比較系統地叙述了关于平面几何图形的面积計算的初等理論，同时，在一些个别定理与例题上，介紹了不同的解法，还举出了一些各种类型的比較有趣的关于面积計算的典型問題。

如果中学几何教师，結合教学上的需要，将本书內容适当地作为教学上的参考，或者介紹給学生們作为課外作业参考以及科学小組活动的內容，也許能多少有些帮助。

本书在出版前，曾由馬忠林同志閱过原稿，但是限于作者的教育理論与学术水平，在理論上与文字上，难免还有很多缺点，甚至錯誤的地方，希讀者多加批評与指正。

孙　福　元

一九六三年三月

目　　次

1．面积的概念……………………………………（ 1 ）
2．矩形的面积……………………………………（ 5 ）
3．三角形的面积…………………………………（ 9 ）
4．平行四边形、梯形的面积……………………（ 14 ）
5．任意多边形的面积……………………………（ 19 ）
6．勾股定理………………………………………（ 21 ）
7．相似多边形面积的比…………………………（ 27 ）
8．圆的面积………………………………………（ 31 ）
9．面积与积分……………………………………（ 32 ）
10．例题与习题……………………………………（ 37 ）

1. 面积的概念

1.1 在人們的日常生活里或在科学研究当中，都常常要用到面积的概念．例如，在耕作土地时，我們常用繩索的长度来測量它的面积；一张伟大祖国的地图，我們也常根据上面比例尺的长度来計算它的面积．

那么究竟什么是面积的概念呢？一般地說，一个多边形或者其他平面曲綫所围平面部分的大小，叫做这个图形的**面积**．

大小都是比較而言的，图形面积的大小也和綫段的长度一样，我們总是用数来表示．选取一个图形作为度量面积的单位，看某个图形含有单位面积的多少倍，以这个倍数多少来确定图形面积的大小．

通常面积的单位，我們是选取边长等于一个单位长度的正方形．例如，我們选取边长为 1 m的正方形作为面积单位，則长 8 m 寬 4 m 的矩形場地面积等于$32m^2$（平方米)，因为这个矩形恰含有32个单位正方形（图1.1）．

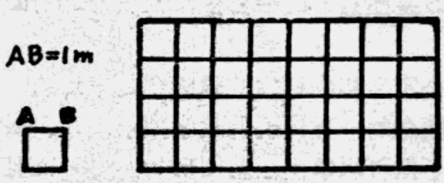

图 1.1

但是，如果矩形的边不是单位长度的整数倍，或者图形不是矩形而是多边形，或者是更复杂的曲綫所围成的图形，等

等，由于这样图形不能都分成单位正方形，那么，我們根据面积的一般概念，就不容易来求出它們的面积数值．在几何里，計算图形面积的数值，是根据下面的面积精确定义．

1.2 面积的精确定义，可以叙述如下：

图形的面积是一个正的名数，满足下面两个条件：

1）如果两个图形全等，则它們的面积相等．

2）如果将一个图形分为若干部分，则这个图形的面积等于各部分的面积和．

面积的这样定义，叫做公理法的定义，这样定义在数学里占有重要地位．这个定义并沒限定計算图形面积的方法，而只是提出无論用什么方法求出的图形面积必須服从两个条件（或公理）的要求．

第一个条件叫做图形面积的**不变性**．因为与一个图形全等的图形，可以看做是从这个图形移动得到的，这就是說图形移动后而面积不变．

第二个条件叫做图形面积的**可加性**．因为一个图形分为若干部分，显然，这个图形可以看作这些部分图形的和．这就是說若干图形和的面积等于这些图形面积的和．而且根据这个条件，很容易証明下面事实：

如果图形B是图形A的一部分，则图形A的面积大于图形B的面积．

面积的这个定义和面积的一般概念是一致的，它不过是图形面积的普通概念的一种精确的数学抽象形式．根据面积的这样定义，我們不但可以求出任意图形的面积，而且可以把图形面积的度量轉化为綫段长度的度量問題．

1.3 在談如何計算图形的面积之前，我們首先看一看由于长度单位的取法不同，它与面积单位大小的关系．

取边为单位长度（1单位）的正方形的面积，作为**单位面积**（单位^2）．

当长度单位改变时；显然，面积的单位也改变，例如，长度单位由cm（厘米）换成m（米），由于$1\ m=100\ cm$，则$1\ m^2=100^2\ cm^2$．

一般，**当长度单位增大n倍时，则面积单位增大n^2倍**（縮小时也一样，这里n是整数）．

事实上，取正方形p和p'，設$AB=1$单位，$A'B'=1$单位$'$，并且1单位$'=n$单位，（图1.2是$n=3$的情形）．

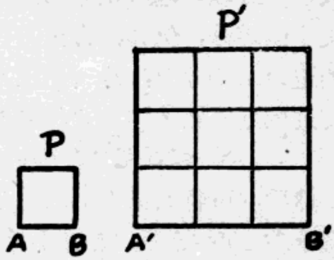

图 1.2

用S与S'分别表示p与p'的面积，按假設，

$$S=1\text{单位}^2,\ S'=1\text{单位}'^2,$$

从A'起将p'的边n等分，并且过分点作平行于边的綫段，则p'被分为n^2个正方形，它的边等于$\frac{A'B'}{n}$．因此，这些正方形都与p全等．按面积定义的条件1），则它們的面积都等于S；根据条件2），p'的面积等于它們的面积和，因此，$S'=S\cdot n^2$，这就是說，

$$1\text{单位}'^2=1\text{单位}^2\cdot n^2.$$

1.4　得出面积的定义和单位以后，我們就可以計算任意图形p的面积．

用两組平行綫将图形p分为若干单位正方形（图1.3），我們計算整个正方形全在图形p内部的有多少，它們的面积和S_0'叫做图形p的面积S的**不足近似值**；然后，再計算与图形

p 至少有一个公共內点的正方形有多少，它們的面积和 S''_0 叫做图形 p 的面积 S 的**过剩近似值**．显然，

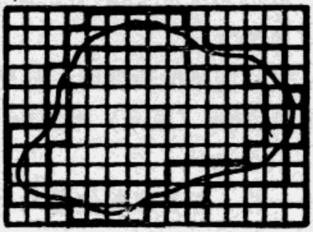

图 1.3

$$S_0' \leqslant S \leqslant S''_0.$$

如果要得到面积 S 的更精确数值，可以将这些正方形分成更小的等分，例如，将正方形的边分为10等分，每一个正方形分为 10^2 等分．同样計算不足与过剩近似值 S_1' 与 S_1''，显然，

$$S_1' \leqslant S \leqslant S_1'' \text{ 并且 } S_0' \leqslant S_1', \ S_0'' \geqslant S_1''.$$

然后，再将原正方形的边分为 100 等分，也就是将每个正方形分为 100^2 等分，計算不足与过剩近似值 S_2' 与 S_2''，等等．我們无限减小正方形的边，每一次将原来的分为 10 等分．这时，我們得到面积 S 的不足近似值与过剩近似值的两个数列：

$$S_0', \ S_1', \ S_2', \ \cdots S_n', \ \cdots,$$
$$S_0'', \ S_1'', \ S_2'', \ \cdots S_n'', \ \cdots.$$

对于第一个数列，$S_0' \leqslant S_1' \leqslant S_2' \leqslant \cdots\cdots$ 并且每个 $S_n' \leqslant S_0''$，这样数列（递增并且有界）当 n 充分大时，趋近某个极限，把它表示为 S'．

同理，第二个数列，$S_0'' \geqslant S_1'' \geqslant S_2'' \geqslant \cdots\cdots$ 并且每个 $S_n'' \geqslant S_0'$，这样数列（递减并且有界）当 n 充分大时，也趋近某个极限，把它表示为 S''．

因此，对于任意 n，$S_n' \leqslant S \leqslant S_n''$，对于极限也是：

$$S' \leqslant S \leqslant S''.$$

对于我們所研究的图形，如果等式 $S' = S''$ 成立，由于 $S' \leqslant S \leqslant S''$，則当 $S' = S''$ 时，我們就得到

$$S' = S = S''.$$

因此，我們可以将：

图形 p 的面积 S 的不足近似值数列与过剩近似值数列的公共极限值，作为它的面积.

严格說，我們还应証明这样所得到的面积 S 满足面积定义的两个条件；此外，还应証明正方形怎样分法不影响面积的数值（取定面积单位后），这些繁杂的証明，我們予以省略，希望研究的讀者，可参看較严格的几何理論书籍.

2. 矩形的面积

2.1 首先我們来計算矩形的面积，因为求得計算矩形的面积公式，就可以計算其它图形的面积. 我們把矩形的一边叫做它的**底**，垂直于底的一边叫做它的**高**. 关于矩形的面积有下面定理：

定理 **矩形的面积，等于它的底的长度与高的长度的乘积.**

証明 設已知矩形的底 AB 的长度为 a 个单位，高 AD 的长度为 b 个单位. 我們研究三种可能情形：

1）a、b 是整数.

将矩形的底 AB 和高 AD 都分为单位綫段，过分点作平行于边的綫段，我們則得到一些边长等于一个单位的正方形，显然，正方形的数目是 $a \cdot b$ 个（图 2.1 是 $a=5$，$b=3$ 的情形）.

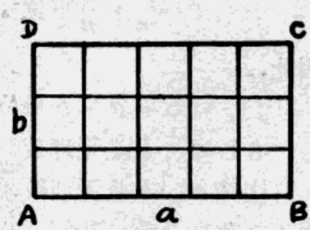

图 2.1

因为这些正方形都全等，根据面积定义的条件1），则它們的面积相等．按作法，每个正方形的面积应是1个单位^2．其次，因为矩形分为$a \cdot b$个正方形，根据条件2），則矩形的面积S应該等于$a \cdot b$个正方形面积的和，因为每个正方形的面积是1单位^2，所以，矩形面积等于$a \cdot b$单位^2．也就是

$$S = a \cdot b \text{ 单位}^2.$$

2）a、b是分数．

将分数a、b通分写为$\frac{A}{n}$、$\frac{B}{n}$的形式，然后，取新的长度单位等于旧长度单位的$\frac{1}{n}$：

$$1 \text{ 单位}' = \frac{1}{n} \text{单位}.$$

这时，也取新的面积单位，根据前节証明，則

$$1 \text{ 单位}'^2 = \frac{1}{n^2} \text{单位}^2.$$

按新单位，矩形的边长分别等于A单位$'$、B单位$'$，也就是，将矩形边长表示为整数．根据情形1），則面积S等于$A \cdot B$单位$'^2$．再化成关于旧单位的面积：

$$S = A \cdot B \text{ 单位}'^2 = A \cdot B \cdot \frac{1}{n^2} \text{单位}^2$$

$$= \frac{A}{n} \cdot \frac{B}{n} \text{单位}^2.$$

因此，

$$S = a \cdot b \text{ 单位}^2.$$

3）a、b是无理数．

因为a、b是无理数，也就是无限非循环小数．这时a、b不能化为分数，我們对于a、b取精确到1的不足与过剩近似值a_0'、a_0''和b_0'、b_0''，这时，

$$a_0' \leqslant a \leqslant a_0'',$$
$$b_0' \leqslant b \leqslant b_0''.$$

作边长为$AB_0' = a_0'$ 单位，$AD_0' = b_0'$ 单位的矩形与边长为 $AB_0'' = a_0''$ 单位，$AD_0'' = b_0''$单位的矩形（图2.2）. 由于a_0'、b_0'和a_0''、b_0''都是整数，按情形1），这两个矩形的面积 S_0'、S_0''分别是：

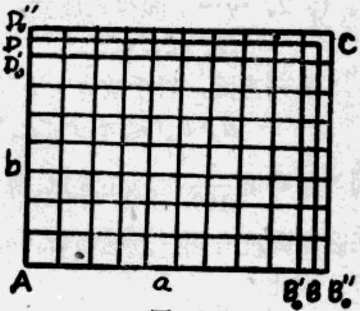

图 2.2

$$S_0' = a_0' b_0' \text{单位}^2，\ S_0'' = a_0'' b_0'' \text{单位}^2$$

并且，S'、S_0''就是已知矩形面积S的不足与过剩近似值.

类似地，对于a、b取精确到$\frac{1}{10^n}$，n等于1、2、……的不足与过剩近似值a_n'、b_n'与a_n''、b_n''，这时，

$$a_n' \leqslant a \leqslant a_n''、b_n' \leqslant b \leqslant b_n''.$$

作边长为$AB_n' = a_n'$ 单位，$AD_n' = b_n'$ 单位的矩形与边长为$AB_n'' = a_n''$单位，$AD_n'' = b_n''$单位的矩形，由于a_n'、b_n'和a_n''、b_n''都是有理数（分数），按情形2），这些矩形的面积S_n'、S_n''分别是：

$$S_n' = a_n' b_n' \text{单位}^2，\ S_n'' = a_n'' b_n'' \text{单位}^2.$$

并且，S_n'与S_n''是面积S的不足与过剩近似值.

这样我們得到矩形面积S的不足近似值和过剩近似值的两个数列：

$$S_0'、S_1'、S_2' \cdots,$$
$$S_0''、S_1''、S_2'' \cdots,$$

第一个是递增数列，第二个是递减数列. 对于任意n，$n =$

0、1、2、……下面等式成立：

$$S_n' \leqslant S \leqslant S_n''.$$

另一方面，对于数 $a \cdot b$ 下面等式成立：

$$a_n' b_n' \leqslant a\,b \leqslant a_n'' b_n''.$$

因为精确度$\frac{1}{10^n}$可以任意取，所以，面积 S 的数值和数 $a\,b$ 对于任意精确度有同一近似値 $a_n' b_n'$ 与 $a_n'' b_n''$. 由此推出它們相等．因此，

$$S = a \cdot b \text{ 单位}^2. \qquad\qquad (証完)$$

从上面定理容易得出下面推論：

推論　正方形的面积等于它一边长的平方.

2.2　对于已知矩形（图2.2），例如，設

$$a = 9.71235\cdots\text{单位}，\ b = 7.63543\cdots\text{单位}.$$

则它的面积：

$$S = 9.71235\cdots \times 7.63543\cdots = 74.15796\cdots\text{单位}^2.$$

而已知矩形面积的不足与过剩近似值数列是：

$$S_0' = 9 \times 7 = 63\text{单位}^2,$$
$$S_1' = 9.7 \times 7.6 = 73.72\text{单位}^2,$$
$$S_2' = 9.71 \times 7.63 \approx 74.09\text{单位}^2,$$
$$S_3' = 9.712 \times 7.635 \approx 74.15\text{单位}^2,$$
$$S_4' = 9.7123 \times 7.6354 \approx 74.157\text{单位}^2,$$

……………………………

$$S_0'' = 10 \times 8 = 80\text{单位}^2,$$
$$S_1'' = 9.8 \times 7.7 = 75.46\text{单位}^2,$$
$$S_2'' = 9.72 \times 7.64 \approx 74.26\text{单位}^2,$$
$$S_3'' = 9.713 \times 7.636 \approx 74.17\text{单位}^2,$$
$$S_4'' = 9.7124 \times 7.6355 \approx 74.159\text{单位}^2,$$

·

……………………………

我們看出，第一个近似值精确到17个单位^2，第二个精确到2.04单位^2，第三个精确到0.17单位^2，第四个精确到0.02单位^2，而第五个精确到0.002单位^2. 因此，如果需要，我們可以計算具有一定精确度的面积近似值.

最后注意，如果每遇到长度和面积，都写名数这是非常繁鎖的，因此，在以后我們常略去名数，但要記住，这时，所有长度、面积是用相应的单位度量，而不是废掉.

3. 三角形的面积

3.1 求得矩形的面积公式，就可以計算任意三角形的面积，由此，进而可以求任意多边形的面积. 关于三角形的面积，有下面定理：

定理 **三角形的面积，等于它的底的长度与对应高的长度乘积的一半.**

証明 設已知任意三角形 ABC，以边 AB 作为底，用 a 表示它的长度，并且用 h 表示它的对应高 CH 的长度（图3.1）.

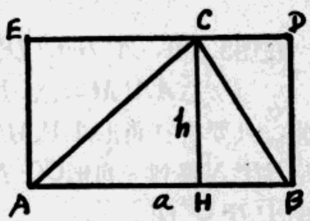

图 3.1

以 AB 为底作与三角形 ABC 等高的矩形 $ABDE$，則这个矩形的面积等于三角形 ABC 面积的二倍.

实际上，三角形 ABC 的高 CH 把矩形 $ABDE$ 分为两个矩形 $AHCE$、$HBDC$，而把三角形 ABC 分为两个三角形 AHC、BHC，容易証明：

$$\triangle AHC \cong \triangle AEC, \quad \triangle BHC \cong \triangle BDC,$$

根据面积定义条件1)，则面积：

$$S_{AHC} = S_{AEC}, \quad S_{BHC} = S_{BDC}.$$

又根据条件2)，

$$S_{ABCD} = 2\,S_{AHC} + 2\,S_{BHC} = 2\,(S_{AHC} + S_{BHC})$$
$$= 2\,S_{ABC}.$$

但是，因为矩形面积$S_{ABCD} = a \cdot h$，所以，

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\,h. \qquad \text{(証完)}$$

这个定理也可以通过下面图形証明，在下两图中，MN是三角形两边AC、BC的中点所連結的綫段.

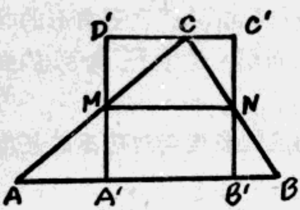

图 3.2

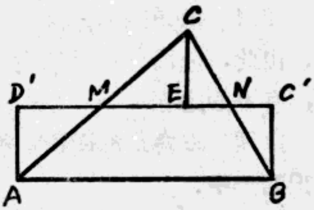

图 3.3

在图3.2里，$A'B'C'D'$是矩形，容易証明：

$$\triangle AA'M \cong \triangle CD'M, \quad \triangle BB'N \cong \triangle CC'N,$$

因此，只要将三角形$AA'M$移到三角形$CD'M$的位置，将三角形$BB'N$移到三角形$CC'N$的位置，就把三角形ABC变为矩形$A'B'C'D'$.

在图3.3里，$ABC'D'$是矩形，CE垂直MN，容易証明：

$$\triangle AD'M \cong \triangle CEM, \quad \triangle BC'N \cong \triangle CEN,$$

因此，只要将三角形$AD'M$移到三角形CEM的位置，将三角形$BC'N$移到三角形CEN的位置，就把三角形ABC变为矩形$ABC'D'$.

因此，从上两图，就可以証明三角形的面积，等于它的底的长度与高的长度乘积的一半.

从上面定理，可以直接推出下面两个推論：

推論　直角三角形的面积，等于两直角边长度乘积的一半.

推論　正三角形的面积，等于一边长度平方的$\frac{\sqrt{3}}{4}$倍.

上面定理的第一种証明方法，是将一个图形补充上另一些图形，使所得到的图形与已知面积的某个图形全等，这种求面积的方法叫做**补充法**.

第二种証明方法，是将一个图形分割为若干部分，将其中几部分拼到另外的位置，使組成的图形与已知面积的某个图形全等. 这种求面积的方法叫做**組成法**.

3.2　現在研究下面問題：

已知三角形三边的长度为a、b、c，計算它的面积.

用h_a表示边a的对应高的长度，b'、c'表示边b、c在边a上的射影的长度.

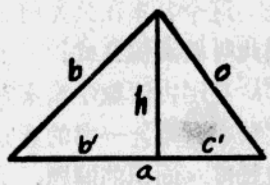

图　3.4

根据勾股定理可得，

$$h_a^2=b^2-b'^2,$$

但

$$c^2=a^2+b^2\mp 2ab',$$

由此，

$$b'^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}.$$

$$h_a^2 = \frac{4ab^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a}$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a}$$

$$= \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{4a^2}.$$

設 $a+b+c=2p$,

則 $a+b-c=2(p-c)$, $c-a+b=2(p-a)$,

$c+a-b=2(p-b)$.

因此,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

代入公式 $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, 則得到,

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

这个公式在公元前三世紀，已为希腊数学家海伦所証明，因此叫做**海倫公式**.

我国古代数学家秦九韶也証明过类似的公式. 在秦氏的《数书九章》一书的卷五第二题“三斜求积”就是按三角形三边长度求面积的問題. 下面是原题和术文:

原题. **問有沙田一段，有三斜. 其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，欲知为田几何.**

术曰. 以小斜冪 (c^2) 并大斜冪 (a), 减中斜冪 (b^2), 余