

高等学校教学用书

力学讲义

下册

江苏师范学院物理系編委会編

人民教育出版社

高等学校教学用书

——物理力学系教材——

力学系教材编写组编



力 学 讲 义

下 册

江苏师范学院物理系編委会編

人民教育出版社

本书系江苏师范学院物理系教师集体编写的物理学讲义的第一部分,内容包括普通物理的力学和理论力学,可供师范学院物理系作为力学的教学用书。如普通物理与理论力学分开讲授,亦可作为教学参考书。此外,本书还可供中学教师进修时参考。

本书分上、下两册。下册分九章,内容主要讲解刚体动力学、分析力学大意和连续介质力学。

力 学 讲 义
下 册

江苏师范学院物理系编委会编

人民教育出版社出版 高等学校教材编辑部
北京宣武门内大街27号
(北京市书刊出版业营业许可出字第2号)

上海洪兴印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行
各地新华书店经售

统一书号 13010·878 开本 850×1168 1/32 印张 9 1/16
字数 224,000 印数 1—40,000 定价 (4) 元 0.90
1960年10月第1版 1960年10月上海第1次印刷

下册目录

第九章 质点组动力学	403
§ 9.1 质点组的动量定理	403
§ 9.2 质点组的动量矩定理	406
§ 9.3 质点组的动能定理	410
第十章 刚体动力学之一	415
§ 10.1 转动惯量 平行轴公式	415
§ 10.2 几种简单几何形状物体的转动惯量	419
§ 10.3 刚体绕固定轴的运动	422
§ 10.4 物理摆	427
§ 10.5 轴上的反作用力	429
§ 10.6 刚体的平面运动	438
§ 10.7 滚动摩擦	445
第十一章 刚体动力学之二	447
§ 11.1 惯量椭球	447
§ 11.2 欧拉运动学方程	450
§ 11.3 欧拉动力学方程	452
§ 11.4 欧拉情况	456
§ 11.5 拉格朗日情况	460
§ 11.6 回轉器的近似理論	466
§ 11.7 回轉仪的应用	470
§ 11.8 自由刚体的运动	473
第十二章 分析力学	477
§ 12.1 約束	477
§ 12.2 虚位移	479
§ 12.3 虚位移原理	481
§ 12.4 达朗贝尔原理 达朗贝尔-拉格朗日方程	484
§ 12.5 第一类拉格朗日方程	488
§ 12.6 第二类拉格朗日方程	493
§ 12.7 能量积分和循环积分	499
§ 12.8 哈密頓方程	506

§ 12.9 哈密顿原理	510
第十三章 弹性力学基本方程式	516
§ 13.1 表面力、体积力、应力	517
§ 13.2 平衡微分方程、切应力的互等性	520
§ 13.3 介质内部任意面上的应力	524
§ 13.4 伸长和切变	528
§ 13.5 形变的一般公式——郭希方程	532
§ 13.6 形变连续性方程式	535
§ 13.7 应力与形变间的关系 胡克定律	538
§ 13.8 弹性形变的势能	542
第十四章 弹性体和流体的平衡	545
§ 14.1 弹性力学问题的解法	545
§ 14.2 梁的弯曲	546
§ 14.3 杆的扭转	553
§ 14.4 卷簧的弯曲和扭转	557
§ 14.5 塑性形变	560
§ 14.6 简单弹塑性问题解法实例	562
§ 14.7 流体的平衡	565
§ 14.8 巴斯噺定律 水压机	570
§ 14.9 平面壁上的压力、重力水坝	571
§ 14.10 阿几米德定律	575
§ 14.11 曲面壁上的压力	577
§ 14.12 浮体的平衡	579
第十五章 理想流体的流动	583
§ 15.1 流綫 理想流体的定常流动	583
§ 15.2 流体的无旋运动	586
§ 15.3 連續性方程式	588
§ 15.4 理想流体的运动方程	590
§ 15.5 欧拉运动方程的积分	591
§ 15.6 柏努利积分的应用实例	593
§ 15.7 势流 平面势流	597
§ 15.8 平面势流实例	600
§ 15.9 理想流体的涡旋运动	604
§ 15.10 渦綫周圍的速度場和压强分布	609
第十六章 流体与运动物体間的相互作用	612
§ 16.1 动量定理和动能定理	612

§ 13.2 轮机 推进器	615
§ 16.3 流体繞旋轉圓柱体的流动 馬格努斯效应	618
§ 16.4 机翼的升力 儒可夫斯基-察布雷金假設 儒可夫斯基升力理論	621
第十七章 粘滞流体的流动	626
§ 17.1 流体的粘滯性 片流	626
§ 17.2 泊肃叶公式 細管中的片流	627
§ 17.3 湍流	630
§ 17.4 斯托克斯阻力定律	633
§ 17.5 边界层 渦旋的形成	634
§ 17.6 流体对运动物体的阻力 压差阻力和摩擦阻力	637
§ 17.7 波阻 船只航行时的阻力	640
第十八章 波动	641
§ 18.1 彈性介质內波的傳播 纵波与横波	641
§ 18.2 波动方程式 綫性波的傳播速度	644
§ 18.3 惠更斯原理	648
§ 18.4 波的干涉 驻波	651
§ 18.5 半波反射和全波反射 弦和杆的振动	656
§ 18.6 膜的振动 二維波	659
§ 18.7 波的能量	661
§ 18.8 都卜勒現象	663
§ 18.9 波的弥散現象 群速度	665
第十九章 声学	669
§ 19.1 声波 声波在空气中的傳播	669
§ 19.2 声强	672
§ 19.3 声波在空气和水中的傳播 声能量的散射	674
§ 19.4 声音在介质中的吸收	676
§ 19.5 交混回响 声波在界面上的吸收	678
§ 19.6 超声波 超声波的发生	680
§ 19.7 超声波的性质和应用	683

第九章 质点組动力学

前面几章着重討論了质点动力学的問題,那里是以单独的质点为研究对象的。从本章开始,我們将要研究质点組的动力学問題。质点組是这样的质点的集合体,其中每一个质点的运动都与其他质点的位置和运动有关。例如:太阳系的天体,組成一个质点組,每一个天体都受到其他天体的万有引力的作用;阿特武德机中的重物也形成一个质点組,每个重物的运动和位置通过繩上張力的作用而互相关联着。更常見的质点組还有剛体、彈性体和流体,这些都是我們以后的主要研究对象。显然可見,质点組动力学的問題要比单独质点的动力学問題来得更为复杂。

质点組动力学的基本定理,可以从第三章中的质点动力学的基本定理推导出来。这些基本定理不仅适用于由少数质点組成的质点組,也适用于由大量质点組成的剛体、彈性体和流体。因此它們也是以后研究剛体力学和連續介質力学的基础。

§ 9.1 质点組的动量定理

1. 設有由質量各为 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 的 n 个质点組成的质点組,这些质点的速度各为 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 則每一质点的动量为 $m_i v_i$, 质点組的动量就为該組各质点的动量的矢量和

$$Q = \sum_{i=1}^n m_i v_i, \quad (9.1-1)$$

因为

$$v_i = \frac{dr_i}{dt},$$

所以
$$Q = \sum m_i v_i = \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i r_i,$$

但根据计算质量中心的坐标的公式, 可知 $\sum m_i r_i = M r_c$, 其中 $M = \sum m_i$ 是整个质点组的质量, r_c 是质量中心的位置矢量, 因此

$$Q = M \frac{dr_c}{dt} = M v_c, \quad (9.1-2)$$

式中 v_c 是质量中心的速度。由此可知: 若把整个质点组的质量看成都集中在质量中心这一点上, 那末质点组的动量就等于质量中心的动量。如果当质点组绕质量中心运动时, 只要质量中心的速度为零, 这质点组的动量就等于零。

2. 现在我们来寻求质点组动量 Q 的变化和作用于质点组间的外力之间的联系。为此, 先考察质点组中任一质点 m_i 。一般说来, 作用在这个质点上的力, 有来自这个质点组中其他质点的作用力, 也就是内力, 我们以 F_i^i 表示内力的合力; 也可能有来自质点组之外其他物体的作用力, 也就是外力, 我们以 F_i^e 表示外力的合力。这样, 对于该质点可以写出运动微分方程:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i^i + F_i^e, \quad (9.1-3)$$

对于质点组中每一质点都可以写出这样的方程, 因而总共得到 n 个方程。将所有这些方程加起来, 就得到:

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_i^i + \sum_{i=1}^n F_i^e. \quad (9.1-4)$$

但是根据牛顿第三定律, 质点组的内力是成对地大小相等、方向相反, 因此所有内力之和等于零, 即 $\sum F_i^i = 0$ 。于是(9.1-4)式就成为:

$$\sum m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum F_i^e. \quad (9.1-5)$$

如果作变换: $\sum m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i v_i = \frac{d}{dt} Q$, 其中 Q 是质点组的动量, 则方程(9.1-5)就可写为:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum F_i^e \quad \text{或者} \quad \begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{ix}^e, \\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{iy}^e, \\ \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{iz}^e. \end{cases} \quad (9.1-6)$$

这就是质点组的动量定理。它表明：质点组动量对于时间的导数等于作用在质点组上所有外力的矢量和。

若 $\sum F_i^e = 0$ ，则 $\frac{dQ}{dt} = 0$ ， $Q = \text{常量}$ ，即质点组的动量保持不变，若 $\sum F_i^e$ 在某一轴上的投影等于零，例如： $\sum F_{ix}^e = 0$ ，则 $\frac{dQ_x}{dt} = 0$ ， $Q_x = \text{常量}$ ，即质点组的动量在该轴上的投影等于常量。

由此可知，只有外力才能改变质点组的动量，内力虽然可以使个别质点的动量改变，但决不能改变整个质点组的动量。

如果考虑到 $Q = Mv_c$ ，则由方程(9.1-6)所得

$$M \frac{dv_c}{dt} = \sum F_i^e \quad \text{或} \quad M \frac{d^2 r_c}{dt^2} = \sum F_i^e. \quad (9.1-7)$$

这就是质点组的质量中心运动定理。它表明：质点组的质量中心的运动象一个质点一样的运动，这个质点的质量等于整个质点组的质量，作用在此质点上的力等于作用在质点组上的外力的矢量和。若 $\sum F_i^e = 0$ ，则 $M \frac{dv_c}{dt} = 0$ ， $v_c = \text{常量}$ 。此时，质量中心按惯性而运动，即静止或作匀速直线运动。若 $\sum F_i^e$ 在某一轴上的投影等于零，例如 $\sum F_{ix}^e = 0$ ，那么 $M \frac{dv_{cx}}{dt} = 0$ ，此时质量中心的速度在该轴上的投影具有恒定的数值。

由此可知，只有外力才能改变质量中心的运动，内力决不能改变质量中心的运动。例如炮弹在爆炸时产生的内力不可能改变质量中心的运动，因此如果忽略空气阻力，则在爆炸后炮弹所有碎片和其他残余物的质量中心，将继续沿着假设炮弹没有爆炸所应走的轨道而运动。

§ 9.2 质点组的动量矩定理

1. 我們知道质点组中某一质点对于静止中心 O 的动量矩为 $\mathbf{r}_i \times$

$\times m_i \mathbf{v}_i$, 整个质点组对于該静止中心的动量矩, 等于组中所有质点的动量矩的矢量和, 即

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i). \quad (9.2-1)$$

假设 C 点是质点组的质量中心, 它对于静止中心 O 的矢径为 $\mathbf{r}_c$, 而某一质点 m_i 相对于 C (原点在质量中心 C 上其轴和静止坐标系平行) 的矢径为 $\mathbf{r}'_i$, 那么由图 9.2-1 可知

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i,$$

求导数, 即得:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}.$$

将这些关系式代入 (9.2-1) 式, 得: $\mathbf{G} = \sum \left[(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i) \times m_i \left(\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right) \right]$,

展开括号, 就得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = & \sum (\mathbf{r}_c \times m_i \mathbf{v}_c) + \sum \left(\mathbf{r}_c \times m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right) + \sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_c) + \\ & + \sum \left(\mathbf{r}'_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right). \end{aligned} \quad (9.2-2)$$

式中 $\mathbf{r}_c$ 和 $\mathbf{v}_c$ 对于各质点是共有的量, 可以提到“ $\sum$ ”号的外面来, 而且因为动坐标原点就选在质心上, 所以 $\sum m_i \mathbf{r}'_i = M \mathbf{r}'_c = 0$ 。这样, 上式右边各项就变为

$$\sum (\mathbf{r}_c \times m_i \mathbf{v}_c) = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c,$$

$$\sum \left(\mathbf{r}_c \times m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right) = \mathbf{r}_c \times \sum m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \mathbf{r}_c \times \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}'_i = 0,$$

$$\sum (\mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_c) = \sum m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_c = 0,$$

$$\sum \left(\mathbf{r}_i' \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} \right) = \sum (\mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i').$$

因此(9.2-2)式可以写成

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'). \quad (9.2-3)$$

由此可见, 质点组对任意的静止中心 O 的动量矩 $\mathbf{G}_c$ 等于两部分之和: 第一部分(即上式右边第一项)是质量中心(假设在中心集中着整个质点组的质量)对于静止中心 O 的动量矩; 第二部分(即上式右边第二项)是质点组中各质点相对于某一动坐标系运动而具有的动量矩之和, 此动坐标系的原点在质量中心 C 上, 轴和静止坐标系的轴相平行。

2. 我们现在来寻求质点组动量矩 $\mathbf{G}$ 的变化和作用于质点组的外力矩之间的联系, 为此, 我们先写出质点组中任一质点 m_i 的动量矩定理:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^i. \quad (9.2-4)$$

对于质点组的每一质点, 我们都可以写出这样的方程, 因此, 将这许多方程相加就得到:

$$\frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e + \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^i. \quad (9.2-5)$$

因为诸内力成对地大小相等而方向相反, 所以可以证明诸内力对任一中心的力矩之和等于零。为此, 让我们考察质点组中任意两个质点 m_i 和 m_k 。设它们之间的相互作用力是 $\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$, 如图 9.2-2。这两个力对任一中心 O 的力矩之和将为:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ik} = \mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{F}_{ik}.$$

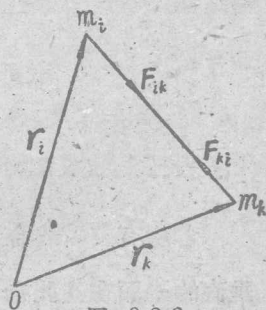


图 9.2-2

由于 $r_{ik} = r_i - r_k$ 和 F_{ik} 共线, 因此便得出結論:

$$\sum (r_i \times F_i) = 0。$$

方程(9.2-5)便成为:

$$\frac{d}{dt} \sum (r_i \times m_i v_i) = \sum (r_i \times F_i^e), \quad (9.2-6)$$

或者

$$\frac{dG}{dt} = \sum (r_i \times F_i^e) = L。 \quad (9.2-7)$$

这就是质点组的动量矩定理。它表明: 质点组对任一固定中心的动量矩的时间导数等于作用在质点组上所有外力对同一中心的力矩的矢量和。

将(9.2-6)式投影到坐标轴上, 就得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) &= \sum (y_i F_{iz}^e - z_i F_{iy}^e), \\ \frac{d}{dt} \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) &= \sum (z_i F_{ix}^e - x_i F_{iz}^e), \\ \frac{d}{dt} \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) &= \sum (x_i F_{iy}^e - y_i F_{ix}^e); \end{aligned} \right\} \quad (9.2-6')$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} G_x &= L_x, \\ \frac{d}{dt} G_y &= L_y, \\ \frac{d}{dt} G_z &= L_z. \end{aligned} \right\} \quad (9.2-7')$$

若所有外力的合力矩 $L=0$, 则 $\frac{dG}{dt}=0$, G =常量, 因此和 G 垂直的平面在空间也将具有恒定的方向。

若所有外力的合力矩在某一轴上的投影为零, 例如 $L_x=0$, 则 G_x =常量, 即动量矩在该轴上的投影为常量。

必须注意, 动量矩定理表示式(9.2-7)中的力矩与动量矩都是相对

于同一中心点 O 而說的，而这个中心点必須是絕對靜止，上式对运动的点一般是不适合的。但是对于质心这个运动的点是一个例外。

現在讓我們来研究质点组动量矩定理应用于质量中心时的情形。为此将(9.2-3)式所表示的 G 代入(9.2-7)式，并考虑到 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ ，于是就有：

$$\frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r}_c \times m_i \mathbf{v}_{ci}) + \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) = \mathbf{r}_c \times \sum \mathbf{F}_i^e + \sum (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^e). \quad (9.2-8)$$

因为根据质量中心运动定理有：

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} \right) = \sum \mathbf{F}_i^e,$$

两边用 $\mathbf{r}_c$ 作矢量乘积，就得：

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}_c \times M \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} \right) = \mathbf{r}_c \times \sum \mathbf{F}_i^e,$$

所以在方程(9.2-8)中消去相等的項，就得到：

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) = \sum (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^e), \quad (9.2-9)$$

或者

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_c = \mathbf{L}_c, \quad (9.2-9')$$

式中 $\mathbf{G}_c = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$ 是质点组对质量中心的动量矩； $\mathbf{L}_c$ 是所有作用在质点组上的外力对质点中心的合力矩。因此，(9.2-9')式表明：相对于质量中心而算出的动量矩对時間的导数，等于所有外力对于质量中心的力矩之和，由此可知，质点组对于质量中心的动量矩定理和对于某一靜止中心的动量矩定理完全一样。

如果外力对于质量中心的力矩和为零，則 $\mathbf{G}_c = \text{常量}$ ；即对于质量中心的动量矩守恒，这种形式的动量矩定理有許多实际应用，特别是对于只有重力作用下的质点组。因为重力总通过质量中心，所以仅在重力作用下的质点组对质量中心的动量矩就不会改变。至于內力，虽則

不能改变整个质点组对质量中心的动量矩,但可以改变质点相对于质量中心的运动。例如一只四脚朝天的猫从高处落下时,常能在空中将身子翻过来,使脚先落地。这是因为在下落时,猫用它的尾巴和足向一方向急速运动,使得自己的身体向相反的方向运动,因而能够翻过身来。但尽管如此,内力并没有使猫相对于质量中心的动量矩发生变化,也没有使质量中心的运动发生改变。

§ 9.3 质点组的动能定理

1. 如果质点组中某一质点 m_i 对于静止坐标系的速度为 v_i , 则该质点的动能为 $\frac{m_i v_i^2}{2}$, 而

$$T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) \quad (9.3-1)$$

就是整个质点组的动能。

仍如以前一样(图 9.2-1),若令 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$, 则对时间求导数即得: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i$ 。将 $\mathbf{v}_i$ 代入(9.3-1)式中,就得到:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \sum m_i \mathbf{v}_c \mathbf{v}'_i,$$

让我们将上式右边各项加以变换:

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum m_i = \frac{1}{2} M v_c^2,$$

$$\sum m_i \mathbf{v}_c \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_c \sum m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \mathbf{v}_c \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{v}_c \frac{d}{dt} M \mathbf{r}'_c = 0,$$

式中 $\mathbf{r}'_c$ 是质量中心对 C 点的坐标,而今 C 点就是质量中心,所以 $\mathbf{r}'_c = 0$, $\frac{d\mathbf{r}'_c}{dt} = 0$, 这样,最后就得到:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \quad (9.3-2)$$

上式右端第一项是质量中心(整个质点组的质量集中在这一点上)的动

能；第二項是质点組相对于質量中心运动的动能。因此质点組的动能等于質量中心(集中着整个质点組的質量)的动能加上质点組相对于質量中心运动的动能，这就是寇尼格定理。

如果只有整个质点組的平动，而没有质点組对質量中心的运动，那末也就没有质点組相对于質量中心运动的动能，因而在这一特殊情形下，质点組的全部动能就等于質量中心的动能，即

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2.$$

2. 現在我們来寻求质点組动能的变化和作用在质点組上的外力、內力的功之間的联系。为此我們先写出质点組中任意一质点 m_i 的动能定理：

$$d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (9.3-3)$$

这里 $\mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i$ 是作用于此质点的所有外力之合力的元功。 $\mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_i$ 是作用于此质点的所有內力之合力的元功，对于质点組中每一质点，我們都可以写出象(9.3-3)式这样的方程。将这些方程式相加起来，就得到：

$$d \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i + \sum \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_i,$$

或者

$$dT = \sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i + \sum \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (9.3-4)$$

这就是质点組的动能定理的微分形式。它表明：质点組动能的微分等于作用在此质点組上的內力及外力的元功之和。

現在讓我們来研究一下內力所作的功之和是什么。对于任意的质点組來說，內力所作元功之和不一定等于零，因此要从动能定理中消去內力所作的元功部分是不可能的。我們假定：內力的大小只决定于各质点間的距离，內力的方向沿着质点的連線。例如质点組中任意两个质点 m_i 和 m_k ，它們之間的相互作用力是 $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ ，如图 9.2-2；并設质点 m_i 的元位移为 $d\mathbf{r}_i$ ，而质点 m_k 的元位移为 $d\mathbf{r}_k$ ，在这两个位移

中, 內力 F_{ik} 和 F_{ki} 所做的元功为:

$$F_{ik} \cdot d\mathbf{r}_i + F_{ki} \cdot d\mathbf{r}_k = F_{ik} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_k) = F_{ik} \cdot d\mathbf{r}_{ik} = F_{ik} \cdot d\mathbf{r}_{ik}。$$

由于我們假定了內力只与距离有关, 因而可以引进这样一个函数 $U_{ik}(r_{ik})$, 使 $dU_{ik} = F_{ik} \cdot d\mathbf{r}_{ik}$, 則所有內力元功之和即可写成:

$$\sum_i F_i \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k F_{ik} \cdot d\mathbf{r}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k dU_{ik},$$

式中出现 $\frac{1}{2}$ 是因为两次求和时有重复的緣故。若引入一个新的函数:

$$U^i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k U_{ik},$$

这个函数叫做质点組內力的力函数, 于是我們有:

$$\sum F_i \cdot d\mathbf{r}_i = dU^i, \quad (9.3-5)$$

这样, 方程(9.3-4)就可以写成:

$$dT - dU^i = \sum F_i^e \cdot d\mathbf{r}_i,$$

或者

$$d(T - U^i) = \sum F_i^e \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (9.3-6)$$

函数 $\Pi^i = -U^i$ 是內力場的势能, 或簡称为內势能, 因此(9.3-6)式就可写为:

$$d(T + \Pi^i) = \sum F_i^e \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (9.3-6')$$

如果将(9.3-6)从状态 I 到状态 II 积分, 即得:

$$(T + \Pi^i)_{II} - (T + \Pi^i)_I = \int_{(I)}^{(II)} \sum F_i^e \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (9.3-7)$$

此式表明: 当质点組由状态 I 改变为状态 II 时, 外力所作的功变为质点組的动能与內势能的增量。

如果质点組在状态 I 及 II 时, 其中各质点的速度均未改变, 則外力所作的功完全轉变为內势能; 如果各质点間的距离在整个运动時間內保持不变, 則 $d\mathbf{r}_{ik} = 0$, $\Pi^i = \text{常量}$, 此时外力所作的功完全轉变为动能; 如果外力不作功, 則动能和內势能之和保持不变, 但质点組的动能

可以由于内力做功而发生变化。

如果外力也是有势的,那末

$$\sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i = dU^e = -d\Pi^e, \quad (9.3-8)$$

这里的 U^e 是外力的力函数; Π^e 是外力场的势能,或简称外势能,因此在这种情况下,方程(9.3-6')就成为机械能守恒定律:

$$T + \Pi^i + \Pi^e = \text{常量}. \quad (9.3-9)$$

上式表明质点组的总能量在质点组运动的过程中始终保持不变。至于质点组的动能、内势能、外势能相互之间的转换,当然是可能的。

现在让我们来讨论质点组对于质量中心而运动的动能定理。根据(9.3-4)式,质点组对静止坐标系的动能定理为:

$$dT = \sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i + \sum \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_i,$$

而根据(9.3-2)式,我们有

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2,$$

又因为 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i'$, 所以 $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_c + d\mathbf{r}_i'$ 。因此(9.3-4)式的动能定理可以写为:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2} M v_c^2\right) + d\left(\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2\right) &= \sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_c + \sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i' + \\ &+ \sum \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_c + \sum \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_i'. \end{aligned} \quad (9.3-10)$$

由于内力成对地抵消,即 $\sum \mathbf{F}_i^i = 0$, 所以上式右边的第三项等于零

$$\sum \mathbf{F}_i^i \cdot d\mathbf{r}_c = d\mathbf{r}_c \cdot \sum \mathbf{F}_i^i = 0.$$

又因为质点组的质量中心的运动和一个质点的运动一样,设想所有的质量都集中于这一点,所有的外力都作用于这一点,可以写出这一质点的动能定理,即:

$$d\left(\frac{1}{2} M v_c^2\right) = \sum \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_c,$$

在等式(9.3-10)中消去相等的项,即得: