高等学校教学用書

力学讲义

下册

江苏师范学院物理系編委会編

人民教育出版社

高等学校教学用書

力 学 讲 义

下册

江苏师范学院物理系編委会編

人民教育出版社

本书系江苏师范学院物理系教师集体編写的物理学講义的第一部分，內容包括普通物理的力学和理論力学，可供师范学院物理系作为力学的教学用书。如普通物理与理論力学分开講授，亦可作为教学参考书。此外，本书还可供中学教师进修时参考。

本书分上、下两册。下册分九章，內容主要講解刚体动力学、分析力学大意和連續介质力学。

力 学 讲 义

下 册

江苏师范学院物理系編委会編

人民教育出版社出版 高等学校教材编辑部
北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)
上海洪兴印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一书号 13010·878 开本 850×1168 1/32 印張 9 1/16
字数 224,000 印数 1—40,000 定价 (4) ¥ 0.90
1960年10月第1版 1960年10月上海第1次印刷

下册目录

第九章 质点組动力学

前面几章着重討論了質点动力学的問題,那里是以单独的質点为研究对象的。从本章开始,我們将要研究質点組的动力学問題。質点組是这样的質点的集合体,其中每一个質点的运动都与其他質点的位置和运动有关。例如:太阳系的天体,組成一个質点組,每一个天体都受到其他天体的万有引力的作用;阿特武德机中的重物也形成一个質点組,每个重物的运动和位置通过繩上張力的作用而互相关联着。更常見的質点組还有剛体、彈性体和流体,这些都是我們以后的主要研究对象。显然可見,質点組动力学的問題要比单独質点的动力学問題来得更为复杂。

質点組动力学的基本定理,可以从第三章中的質点动力学的基本定理推导出来。这些基本定理不仅适用于由少数質点組成的質点組,也适用于由大量質点組成的剛体、彈性体和流体。因此它們也是以后研究剛体力学和連續介質力学的基础。

§9.1 质点組的动量定理

1. 設有由質量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的 n 个質点組成的質点組,这些質点的速度各为 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$,則每一質点的动量为 $m_i\boldsymbol{v}_i$,質点組的动量就为該組各質点的动量的矢量和

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i, \tag{9.1-1}$$

因为

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt},$$

所以 $$Q=\sum m_i v_i=\sum m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\sum m_i \boldsymbol{r}_i,$$

但根据計算質量中心的坐标的公式，可知 $\sum m_i \boldsymbol{r}_i=M\boldsymbol{r}_c$，其中 $M=\sum m_i$ 是整个質点組的質量，$\boldsymbol{r}_c$ 是質量中心的位置矢量，因此

$$Q=M\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt}=M\boldsymbol{v}_c, \tag{9.1-2}$$

式中 $\boldsymbol{v}_c$ 是質量中心的速度。由此可知：若把整个質点組的質量看成都集中在質量中心这一点上，那末質点組的动量就等于質量中心的动量。如果当質点組繞質量中心运动时，只要質量中心的速度为零，这質点組的动量就等于零。

2. 現在我們来寻求質点組动量 Q 的变化和作用于質点組間的外力之間的联系。为此，先考察質点組中任一質点 m_i。一般說来，作用在这个質点上的力，有来自这个質点組中其他質点的作用力，也就是內力，我們以 F_i^i 表示內力的合力；也可能有来自質点組之外其他物体的作用力，也就是外力，我們以 F_i^e 表示外力的合力。这样，对于該質点可以写出运动微分方程：

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=F_i^i+F_i^e, \tag{9.1-3}$$

对于質点組中每一質点都可以写出这样的方程，因而总共得到 n 个方程。将所有这些方程加起来，就得到：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}F_i^i+\sum_{i=1}^{n}F_i^e。 \tag{9.1-4}$$

但是根据牛頓第三定律，質点組的內力是成对地大小相等、方向相反，因此所有內力之和等于零，即 $\sum F_i^i=0$。于是(9.1-4)式就成为：

$$\sum m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\sum F_i^e。 \tag{9.1-5}$$

如果作变换：$\sum m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\frac{d}{dt}\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\sum m_i \boldsymbol{v}_i=\frac{d}{dt}Q$，其中 Q 是質点組的动量，則方程(9.1-5)就可写为：

$$\frac{dQ}{dt}=\sum F_i^e \quad 或者 \quad \begin{cases}\dfrac{dQ_x}{dt}=\sum F_{ix}^e,\\ \dfrac{dQ_y}{dt}=\sum F_{iy}^e,\\ \dfrac{dQ_z}{dt}=\sum F_{iz}^e。\end{cases} \tag{9.1-6}$$

这就是質点組的动量定理。它表明：質点組动量对于时間的导数等于作用在質点組上所有外力的矢量和。

若 $\sum F_i^e=0$，則 $\dfrac{dQ}{dt}=0$，$Q=$常量，即質点組的动量保持不变，若 $\sum F_i^e$ 在某一軸上的投影等于零，例如：$\sum F_{ix}^e=0$，則 $\dfrac{dQ_x}{dt}=0$，$Q_x=$常量，即質点組的动量在該軸上的投影等于常量。

由此可知，只有外力才能改变質点組的动量，內力虽然可以使个別質点的动量改变，但决不能改变整个質点組的动量。

如果考虑到 $Q=Mv_c$，則由方程(9.1-6)所得

$$M\frac{dv_c}{dt}=\sum F_i^e \quad 或 \quad M\frac{d^2r_c}{dt^2}=\sum F_i^e。 \tag{9.1-7}$$

这就是質点組的質量中心运动定理。它表明：質点組的質量中心的运动象一个質点一样的运动，这个質点的質量等于整个質点組的質量，作用在此質点上的力等于作用在質点組上的外力的矢量和。若 $\sum F_i^e=0$，則 $M\dfrac{dv_c}{dt}=0$，$v_c=$常量。此时，質量中心按慣性而运动，即靜止或作勻速直綫运动。若 $\sum F_i^e$ 在某一軸上的投影等于零，例如 $\sum F_{ix}^e=0$，那么 $M\dfrac{dv_{cx}}{dt}=0$，此时質量中心的速度在該軸上的投影具有恒定的数值。

由此可知，只有外力才能改变質量中心的运动，內力决不能改变質量中心的运动。例如炮彈在爆炸时产生的內力不可能改变質量中心的运动，因此如果忽略空气阻力，則在爆炸后炮彈所有碎片和其他殘余物的質量中心，将继續沿着假設炮彈沒有爆炸所应走的軌道而运动。

§9.2 質点組的动量矩定理

1. 我們知道質点組中某一質点对于靜止中心 O 的动量矩为 $\boldsymbol{r}_i\times$ $\times m_i\boldsymbol{v}_i$，整个質点組对于該靜止中心的动量矩，等于組中所有質点的动量矩的矢量和，即

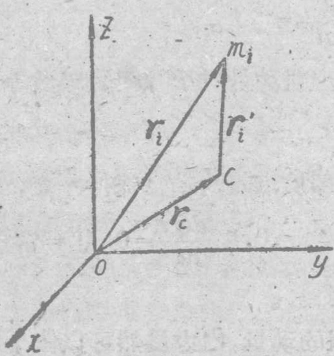

图 9.2-1

$$G=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)。\quad (9.2\text{-}1)$$

假設 C 点是質点組的質量中心，它对于靜止中心 O 的矢徑为 $\boldsymbol{r}_c$，而某一質点 m_i 相对于 C（原点在質量中心 C 上其軸和靜止坐标系平行）的矢徑为 $\boldsymbol{r}_i'$，那么由图 9.2-1 可知

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}_i',$$

求导数，即得：

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}。$$

将这些关系式代入(9.2-1)式，得：$G=\sum\left[(\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}_i')\times m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}\right)\right]$，

展开括号，就得到：

$$G=\sum(\boldsymbol{r}_c\times m_i\boldsymbol{v}_c)+\sum\left(\boldsymbol{r}_c\times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}\right)+\sum(\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_c)+$$
$$+\sum\left(\boldsymbol{r}_i'\times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}\right),\quad (9.2\text{-}2)$$

式中 $\boldsymbol{r}_c$ 和 $\boldsymbol{v}_c$ 对于各質点是共有的量，可以提到"Σ"号的外面来，而且因为动坐标原点就选在質心上，所以 $\sum m_i\boldsymbol{r}_i'=M\boldsymbol{r}_c'=0$。这样，上式右边各項就变为

$$\sum(\boldsymbol{r}_c\times m_i\boldsymbol{v}_c)=\boldsymbol{r}_c\times M\boldsymbol{v}_c,$$

$$\sum\left(\boldsymbol{r}_c\times m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}\right)=\boldsymbol{r}_c\times\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt}=\boldsymbol{r}_c\times\frac{d}{dt}\sum m_i\boldsymbol{r}_i'=0,$$

$$\sum(\boldsymbol{r}'_i \times m_i\boldsymbol{v}_c) = \sum m_i\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}_c = 0,$$

$$\sum\left(\boldsymbol{r}'_i \times m_i\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}\right) = \sum(\boldsymbol{r}'_i \times m_i\boldsymbol{v}'_i)。$$

因此(9.2-2)式可以写成

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{r}_c \times M\boldsymbol{v}_c + \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}'_i \times m_i\boldsymbol{v}'_i)。\tag{9.2-3}$$

由此可見，質点組对任意的靜止中心 O 的动量矩 G 等于两部分之和：第一部分（即上式右边第一項）是質量中心（假設在中心集中着整个質点組的質量）对于靜止中心 O 的动量矩；第二部分（即上式右边第二項）是質点組中各質点相对于某一动坐标系运动而具有的动量矩之和，此动坐标系的原点在質量中心 C 上，軸和靜止坐标系的軸相平行。

2. 我們現在来寻求質点組动量矩 G 的变化和作用于質点組的外力矩之間的联系，为此，我們先写出質点組中任一質点 m_i 的动量矩定理：

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^e + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^i 。\tag{9.2-4}$$

对于質点組的每一質点，我們都可以写出这样的方程，因此，将这許多方程相加就得到：

$$\frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^e + \sum\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^i 。\tag{9.2-5}$$

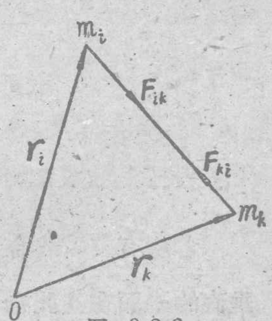

图 9.2-2

因为諸內力成对地大小相等而方向相反，所以可以証明諸內力对任一中心的力矩之和等于零。为此，試我們考察質点組中任意两个質点 m_i 和 m_k。設它們之間的相互作用力是 $\boldsymbol{F}_{ki} = -\boldsymbol{F}_{ik}$，如图 9.2-2。这两个力对任一中心 O 的力矩之和将为：

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{ki} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k) \times \boldsymbol{F}_{ik} = \boldsymbol{r}_{ik} \times \boldsymbol{F}_{ik}。$$

由于 $\boldsymbol{r}_{ik}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k$ 和 $\boldsymbol{F}_{ik}$ 共綫，因此便得出結論：

$$\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^i)=0。$$

方程(9.2-5)便成为：

$$\frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^e),\tag{9.2-6}$$

或者

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^e)=\boldsymbol{L}。\tag{9.2-7}$$

这就是質点組的动量矩定理。它表明：質点組对任一固定中心的动量矩的时間导数等于作用在質点組上所有外力对同一中心的力矩的矢量和。

将(9.2-6)式投影到坐标軸上，就得到：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum m_i(y_i\dot{z}_i-z_i\dot{y}_i)&=\sum(y_iF_{iz}^e-z_iF_{iy}^e),\\\frac{d}{dt}\sum m_i(z_i\dot{x}_i-x_i\dot{z}_i)&=\sum(z_iF_{ix}^e-x_iF_{iz}^e),\\\frac{d}{dt}\sum m_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)&=\sum(x_iF_{iy}^e-y_iF_{ix}^e);\end{aligned}\right\}\tag{9.2-6'}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}G_x&=L_x,\\\frac{d}{dt}G_y&=L_y,\\\frac{d}{dt}G_z&=L_z。\end{aligned}\right\}\tag{9.2-7'}$$

若所有外力的合力矩 $\boldsymbol{L}=0$，则 $\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=0$，$\boldsymbol{G}=$常量，因此和 $\boldsymbol{G}$ 相垂直的平面在空間也将具有恒定的方向。

若所有外力的合力矩在某一軸上的投影为零，例如 $L_x=0$，则 $G_x=$常量，即动量矩在該軸上的投影为常量。

必須注意，动量矩定理表示式(9.2-7)中的力矩与动量矩都是相对

于同一中心点 O 而說的，而这个中心点必須是絕对靜止，上式对运动的点一般是不适合的。但是对于质心这个运动的点是一个例外。

现在让我們来研究质点組动量矩定理应用于质量中心时的情形。为此将(9.2-3)式所表示的 G 代入(9.2-7)式，并考虑到 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}'_i$，于是就有：

$$\frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r}_c\times m_i\boldsymbol{v}_c)+\frac{d}{dt}\sum(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i)=\boldsymbol{r}_c\times\sum\boldsymbol{F}^e_i+\sum(\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}^e_i)\text{。}\tag{9.2-8}$$

因为根据质量中心运动定理有：

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt}\right)=\sum\boldsymbol{F}^e_i,$$

两边用 $\boldsymbol{r}_c$ 作矢量乘积，就得：

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_c\times M\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt}\right)=\boldsymbol{r}_c\times\sum\boldsymbol{F}^e_i,$$

所以在方程(9.2-8)中消去相等的項，就得到：

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i)=\sum(\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}^e_i),\tag{9.2-9}$$

或者

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_c=\boldsymbol{L}_c,\tag{9.2-9'}$$

式中 $\boldsymbol{G}_c=\sum\boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i$ 是质点組对质量中心的动量矩；$\boldsymbol{L}_c$ 是所有作用在质点組上的外力对质点中心的合力矩。因此，(9.2-9')式表明：相对于质量中心而算出的动量矩对时間的导数，等于所有外力对于质量中心的力矩之和，由此可知，质点組对于质量中心的动量矩定理和对于某一靜止中心的动量矩定理完全一样。

如果外力对于质量中心的力矩和为零，則 $\boldsymbol{G}_c=$常量；即对于质量中心的动量矩守恒，这种形式的动量矩定理有許多实际应用，特别是对于只有重力作用下的质点組。因为重力总通过质量中心，所以仅在重力作用下的质点組对质量中心的动量矩就不会改变。至于內力，虽則

不能改变整个质点組对质量中心的动量矩，但可以改变质点相对于质量中心的运动。例如一只四脚朝天的猫从高处落下时，常能在空中将身子翻过来，使脚先落地。这是因为在下落时，猫用它的尾巴和足向一方向急速运动，使得自己的身体向相反的方向运动，因而能够翻过身来。但尽管如此，内力并沒有使猫相对于质量中心的动量矩发生变化，也沒有使质量中心的运动发生改变。

§9.3 质点組的动能定理

1. 如果质点組中某一质点 m_i 对于静止坐标系的速度为 $\boldsymbol{v}_i$，則該质点的动能为 $\frac{m_i v_i^2}{2}$，而

$$T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) \tag{9.3-1}$$

就是整个质点組的动能。

仍如以前一样(图 9.2-1)，若令 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}'_i$，則对时間求导数即得：$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{v}'_i$。将 $\boldsymbol{v}_i$ 代入(9.3-1)式中，就得到：

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i(\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{v}'_i)^2=\frac{1}{2}\sum m_i v_c^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\sum m_i \boldsymbol{v}_c \boldsymbol{v}'_i,$$

让我們将上式右边各項加以变换：

$$\frac{1}{2}\sum m_i v_c^2=\frac{1}{2}v_c^2\sum m_i=\frac{1}{2}Mv_c^2,$$

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_c \boldsymbol{v}'_i=\boldsymbol{v}_c\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}=\boldsymbol{v}_c\frac{d}{dt}\sum m_i \boldsymbol{r}'_i=\boldsymbol{v}_c\frac{d}{dt}M\boldsymbol{r}'_c=0,$$

式中 $\boldsymbol{r}'_c$ 是质量中心对 C 点的坐标，而今 C 点就是质量中心，所以 $\boldsymbol{r}'_c=0$，$\frac{d\boldsymbol{r}'_c}{dt}=0$，这样，最后就得到：

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 \tag{9.3-2}$$

上式右端第一项是质量中心(整个质点組的质量集中在这一点上)的动

能；第二項是質点組相对于質量中心运动的动能。因此質点組的动能等于質量中心(集中着整个質点組的質量)的动能加上質点組相对于質量中心运动的动能，这就是寇尼格定理。

如果只有整个質点組的平动，而沒有質点組对質量中心的运动，那末也就沒有質点組相对于質量中心运动的动能，因而在这一特殊情形下，質点組的全部动能就等于質量中心的动能，即

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2。$$

2. 現在我們来寻求質点組动能的变化和作用在質点組上的外力、內力的功之間的联系。为此我們先写出質点組中任意一質点 m_i 的动能定理：

$$d\left(\frac{m_iv_i^2}{2}\right)=\boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_i^i\cdot d\boldsymbol{r}_i, \qquad (9.3\text{-}3)$$

这里 $\boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i$ 是作用于此質点的所有外力之合力的元功。$\boldsymbol{F}_i^i\cdot d\boldsymbol{r}_i$ 是作用于此質点的所有內力之合力的元功，对于質点組中每一質点，我們都可以写出象(9.3-3)式这样的方程。将这些方程式相加起来，就得到：

$$d\sum\frac{m_iv_i^2}{2}=\sum\boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i+\sum\boldsymbol{F}_i^i\cdot d\boldsymbol{r}_i,$$

或者

$$dT=\sum\boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i+\sum\boldsymbol{F}_i^i\cdot d\boldsymbol{r}_i。\qquad (9.3\text{-}4)$$

这就是質点組的动能定理的微分形式。它表明：質点組动能的微分等于作用在此質点組上的內力及外力的元功之和。

現在讓我們来研究一下內力所作的功之和是什么。对于任意的質点組来說，內力所作元功之和不一定等于零，因此要从动能定理中消去內力所作的元功部分是不可能的。我們假定：內力的大小只决定于各質点間的距离，內力的方向沿着質点的連綫。例如質点組中任意两个質点 m_i 和 m_k，它們之間的相互作用力是 $\boldsymbol{F}_{ki}=-\boldsymbol{F}_{ik}$，如图 9.2-2；并設質点 m_i 的元位移为 $d\boldsymbol{r}_i$，而質点 m_k 的元位移为 $d\boldsymbol{r}_k$，在这两个位移

中，內力 $\boldsymbol{F}_{ik}$ 和 $\boldsymbol{F}_{ki}$ 所做的元功为：

$$\boldsymbol{F}_{ik}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{ki}\cdot d\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{F}_{ik}\cdot(d\boldsymbol{r}_i-d\boldsymbol{r}_k)=\boldsymbol{F}_{ik}\cdot d\boldsymbol{r}_{ik}=F_{ik}\cdot dr_{ik}\text{。}$$

由于我們假定了內力只与距离有关，因而可以引进这样一个函数 $U_{ik}(r_{ik})$，使 $dU_{ik}=F_{ik}\cdot dr_{ik}$，則所有內力元功之和即可写成：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^i\cdot d\boldsymbol{r}_i=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k F_{ik}\cdot dr_{ik}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k dU_{ik},$$

式中出現 $\frac{1}{2}$ 是因为两次求和时有重复的緣故。若引入一个新的函数：

$$U^i=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k U_{ik},$$

这个函数叫做質点組內力的力函数，于是我們有：

$$\sum \boldsymbol{F}_i^i\cdot d\boldsymbol{r}_i=dU^i, \qquad (9.3\text{-}5)$$

这样，方程(9.3-4)就可以写成：

$$dT-dU^i=\sum \boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i,$$

或者

$$d(T-U^i)=\sum \boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i\text{。} \qquad (9.3\text{-}6)$$

函数 $\Pi^i=-U^i$ 是內力場的勢能，或簡称为內勢能，因此(9.3-6)式就可写为：

$$d(T+\Pi^i)=\sum \boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i, \qquad (9.3\text{-}6')$$

如果将(9.3-6)从状态 I 到状态 II 积分，即得：

$$(T+\Pi^i)_{II}-(T+\Pi^i)_I=\int_{(I)}^{(II)}\boldsymbol{F}_i^e\cdot d\boldsymbol{r}_i, \qquad (9.3\text{-}7)$$

此式表明：当質点組由状态 I 改变为状态 II 时，外力所作的功变为質点組的动能与內勢能的增量。

如果質点組在状态 I 及 II 时，其中各質点的速度均未改变，則外力所作的功完全轉变为內勢能；如果各質点間的距离在整个运动时間內保持不变，則 $dr_{ik}=0$，$\Pi^i=$常量，此时外力所作的功完全轉变为动能；如果外力不作功，則动能和內勢能之和保持不变，但質点組的动能

可以由于內力作功而发生变化。

如果外力也是有勢的，那末

$$\sum \boldsymbol{F}_i^e \cdot d\boldsymbol{r}_i = dU^e = -d\Pi^e, \tag{9.3-8}$$

这里的 U^e 是外力的力函数；Π^e 是外力場的勢能，或簡称外勢能，因此在这种情况下，方程(9.3-6′)就成为机械能守恒定律：

$$T + \Pi^i + \Pi^e = 常量。 \tag{9.3-9}$$

上式表明質点組的总能量在質点組运动的过程中始終保持不变。至于質点組的動能、內勢能、外勢能相互之間的轉換，当然是可能的。

現在让我們来討論質点組对于質量中心而运动的动能定理。根据(9.3-4)式，質点組对靜止坐标系的动能定理为：

$$dT = \sum \boldsymbol{F}_i^e \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{F}_i^i \cdot d\boldsymbol{r}_i,$$

而根据(9.3-2)式，我們有

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2,$$

又因为 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_i'$，所以 $d\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{r}_c + d\boldsymbol{r}_i'$。因此(9.3-4)式的动能定理可以写为：

$$d\left(\frac{1}{2} M v_c^2\right) + d\left(\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2\right) = \sum \boldsymbol{F}_i^e \cdot d\boldsymbol{r}_c + \sum \boldsymbol{F}_i^e \cdot d\boldsymbol{r}_i' +$$

$$+ \sum \boldsymbol{F}_i^i \cdot d\boldsymbol{r}_c + \sum \boldsymbol{F}_i^i \cdot d\boldsymbol{r}_i'。 \tag{9.3-10}$$

由于內力成对地抵消，即 $\sum \boldsymbol{F}_i^i = 0$，所以上式右边的第三項等于零

$$\sum \boldsymbol{F}_i^i \cdot d\boldsymbol{r}_c = d\boldsymbol{r}_c \cdot \sum \boldsymbol{F}_i^i = 0。$$

又因为質点組的質量中心的运动和一个質点的运动一样，設想所有的質量都集中于这一点，所有的外力都作用于这一点，可以写出这一質点的动能定理，即：

$$d\left(\frac{1}{2} M v_c^2\right) = \sum \boldsymbol{F}_i^e \cdot d\boldsymbol{r}_c,$$

在等式(9.3-10)中消去相等的項，即得：