理论力学教学参考资料

上海市力学会

一九八五年九月

前　　言

近几年来，很多同志来信，希望我能提供我编写的《理论力学》中习题的解答。经过再三考虑，我认为我编写的那本教材中的习题，大体上可以分为“基本题”和“加深题”两类；对于“基本题”的解答，似乎没有什么必要，而对于那些数量较少，但难度较大的“加深题”，提供一些解题的线索或者给出具体的计算，可能对教学有所帮助。于是，我挑选了1983年版中的170个习题作出了解答，油印后装订成册，供教师们参考。全书共有576个习题。作出解答的习题数不到全书习题总数的十分之三。看来，这个比例数是比较恰当的。

这仅仅是供教师在教学中参考用的习题解答，有的写得详细些，有的则十分简略。题目的选取，也只是凭我的主观，没有经过讨论，所以希望大家看过后能提出意见，以便今后有机会重印时改进。

有些同志曾建议我能写成一本象当前流行的“学习指导”一类的东西。但是，我考虑到要写一本真正能对学习起“指导”作用的，不是一件容易的事。到目前为止，我还不敢作这个尝试，等几年以后再说吧。

下面，列出所选习题的题号，以便检阅。

第一章	1—2	1—3			
第二章	2—20				
第三章	无				
第四章	4—3	4—5			
第五章	5—29	5—30	5—32	5—33	5—35
	5—36	5—37	5—38	5—39	5—41
	5—42	5—43	5—46	5—47	5—50
	5—51	5—52	5—53	5—54	

第六章　6—14　6—24　6—25　6—27　6—30
6—31　6—33　6—35

第七章　7—7　7—8　7—16　7—17　7—18

第八章　元

第九章　9—15

第十章　10—5　10—13

第十一章　11—14　11—15　11—21　11—22

第十二章　12—5　12—6　12—7　12—9
12—10　12—11　12—30　12—31
12—32　12—34　12—36　12—37
12—38　12—39　12—40　12—41
12—42　12—43　12—44　12—45
12—46

第十三章　13—3　13—4　13—5

第十四章　14—7　14—20　14—21　14—23
14—24

第十五章　15—9

第十六章　16—13　16—15　16—16　16—17
16—18　16—20　16—21　16—22
16—23　16—24

第十七章　17—11　17—12　17—13　17—14
17—15　17—19　17—20　17—21
17—22

第十八章　18—6　18—9　18—11　18—15
18—25　18—26　18—27　18—28
18—32　18—37　18—38　18—39
18—40　18—41　18—42

第十九章　19—20　19—22　19—26　19—30
19—31　19—32　19—33　19—34

19—37　19—39　19—40　19—41
19—46

第二十章　无

第廿一章　21—16　21—19　21—20　21—21
21—22　21—23　21—24　21—29
21—30　21—31　21—32　21—33
21—34

第廿二章　22—20　22—25　22—26　22—27
22—28　22—30　22—31　22—32
22—33　22—34　22—35　22—37
22—39　22—40

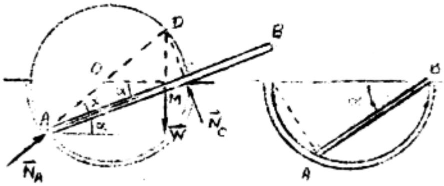
第廿三章　23—9　23—10　23—11　23—20
23—21　23—22　23—23　23—24
23—26

第廿四章　24—1　24—16　24—17　24—18
24—19　24—22　24—26　24—27
24—28　24—29　24—30　24—31
24—32

吴　镇

一九八五年八月

1—2. 匀质杆AB长$2l$，置于半径为r的光滑半圆槽内。设$2r > l > \sqrt{\frac{2}{3}}r$。求平衡时杆与水平线所成的角$\alpha$。



解：$\vec{W}$、$\vec{N}_A$、$\vec{N}_C$相交于一点D，D位于以O为中心的圆周上。从此可得

$$\overline{AD}\cos 2\alpha = \overline{AM}\cos\alpha,$$

即 $$2r\cos 2\alpha - l\cos\alpha = 0$$

以$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 代入后可解出

$$\cos\alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32r^2}}{8r}$$

讨论：

从右图可以看到杆长$2l$必须大于$2r\cos\alpha$，即

$$2l > \frac{l + \sqrt{l^2 + 32r^2}}{4},$$

$$l > \sqrt{\frac{2}{3}}r.$$

当 $l=\sqrt{\frac{2}{3}}r$ 时，$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ，$\alpha=35.3^\circ$.

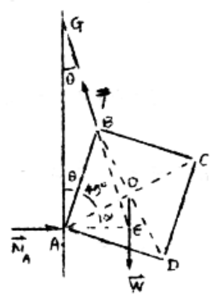
1－3．ABCD为每一边长 l 的正方形匀质薄板，顶点A靠在光滑墙上，并在B点用一长 l 的软绳拉住。求平衡时软绳与墙的交角θ。

解：$\vec{W}$、$\vec{T}$、$\vec{N}_A$相交于一点E．可以得出

$$\overline{BE}=\overline{BG}=l$$

于是有 $\overline{GE}\sin\theta=\overline{AO}\cos\alpha$

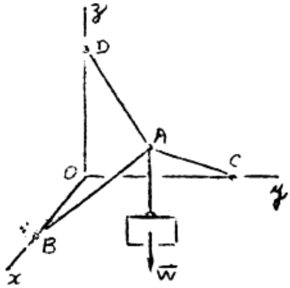
即 $$2l\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos(90^\circ-(45^\circ+\theta))$$

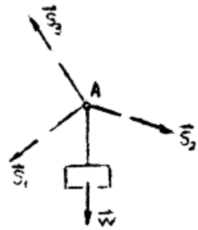


从此解得

$$tg\,\theta=\frac{1}{3}$$

2－20．一重物由三杆支持如图示，$\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=a$，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=l$，$l>\sqrt{\frac{2}{3}}a$．设杆的重量不计并且可以看作两力杆。求其内力。





解：以节点A以及重物为对象，受力如图示。AB、AC、AD杆的内力以$\vec{S}_1$、$\vec{S}_2$、$\vec{S}_3$表示，并且都假定为拉力。从此有平衡方程：

$$S_{1x}+S_{2x}+S_{3x}=0,$$

$$S_{1y}+S_{2y}+S_{3y}=0,$$

$$S_{1z}+S_{2z}+S_{3z}-W=0。$$

为了求出三个$\vec{S}$在x、y、z轴上的投影，先求出A点的座标：

$$x_A=y_A=z_A=\frac{a\pm\sqrt{3l^2-2a^2}}{3}(=b)$$

当A与O在BCD平面的两边时取"+"号，在一边时取"－"号。当$l=\sqrt{\frac{2}{3}}a$时，A在BCD平面上。

于是，

$$S_{1x}=S_1\cos(\vec{AB},x)=S_1\frac{x_B-x_A}{l}=\frac{a-b}{l}S_1.$$

依此类推，上面的三个平衡方程可以写成：

$$(b-a)S_1+bS_2+bS_3=0,$$

$$bS_1+(b-a)S_2+bS_3=0,$$

$$bS_1+bS_2+(b-a)S_3=-Wl.$$

从此，解得：

$$S_1=S_2=\frac{Wlb}{a(a-3b)},$$

$$S_3=\frac{Wl}{a}\left(\frac{a-2b}{a-3b}\right)。$$

讨论：

(1) 当A与O在BCD平面的两边时，

$$S_1=S_2=-\frac{Wl}{3a}\left(1+\frac{a}{\sqrt{3l^2-2a^2}}\right),$$

即AB与AC杆总是受到压力；

$$S_3=\frac{Wl}{3a}\left(2-\frac{a}{\sqrt{3l^2-2a^2}}\right),$$

$$
\text{当}\begin{cases}
l > \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\text{ 时，}S_3 < 0\text{，AD杆受压力，}\\[2ex]
l = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\text{ 时，}S_3 = 0\text{，AD杆不受力，}\\[2ex]
\sqrt{\dfrac{2}{3}}a < l < \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\text{ 时，}S_3 > 0\text{，AD杆受拉力。}
\end{cases}
$$

(2) 当A在BCD平面上时，$l = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$，此时不能平衡。

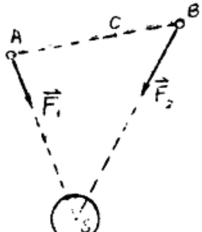
(3) 当A与O在BCD平面的一边时，

$$S_3 = \frac{Wl}{3a}\left(2 + \frac{a}{\sqrt{3l^2 - 2a^2}}\right)\text{，AD杆总是受到拉力；}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{Wl}{3a}\left(\frac{a}{\sqrt{3l^2 - 2a^2}} - 1\right)\text{，}$$

$$
\text{当}\begin{cases}
l > a\text{ 时，}S_1 = S_2 < 0\text{，两杆受压力；}\\[2ex]
l = a\text{ 时，}S_1 = S_2 = 0\text{，两杆不受力；}\\[2ex]
\sqrt{\dfrac{2}{3}}a < l < a\text{ 时，}S_1 = S_2 > 0\text{，两杆受拉力。}
\end{cases}
$$

4－3．A与B为地球（S）附近的两个人造卫星。设 $\overrightarrow{SA} = \vec{r}_1$，$\overrightarrow{SB} = \vec{r}_2$，$\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 分别为A与B受到



地球的引力。求证：$\vec{F}_1$与$\vec{F}_2$对于A与B的质量中心C点的力矩之和为

$$\frac{GMm_1m_2}{m_1+m_2}\left(r_2^{-3}-r_1^{-3}\right)\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right)$$

解：根据定义：

$$\vec{m}_C(\vec{F}_1)=\vec{CA}\times\vec{F}_1,$$

$$\vec{m}_C(\vec{F}_2)=\vec{CB}\times\vec{F}_2\ 。$$

因为 $\vec{CA}=-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{AB}$，$\vec{CB}=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{AB}$，

$$\vec{F}_1=\frac{GMm_1}{r_1^2}\left(-\frac{\vec{r}_1}{r_1}\right),\quad \vec{F}_2=\frac{GMm_2}{r_2^2}\left(-\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right),$$

所以 $\vec{m}_C(\vec{F}_1)+\vec{m}_C(\vec{F}_2)=\dfrac{GMm_1m_2}{m_1+m_2}\vec{AB}\times\left(\dfrac{\vec{r}_1}{r_1^3}-\dfrac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right)$。

又因为 $\vec{AB}=\vec{AS}+\vec{SB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$，所以

$$\vec{m}_C(\vec{F}_1)+\vec{m}_C(\vec{F}_2)=\frac{GMm_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}-\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right)$$

$$=\frac{GMm_1m_2}{m_1+m_2}\left(r_2^{-3}-r_1^{-3}\right)\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right)$$

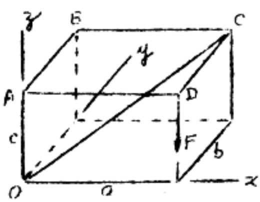
4—5．力$\vec{F}$沿边长为a、b、c的长方体的一棱边作用如图示。试计算$\vec{F}$对于长方体对角线OC之矩。

解：在O点取直角座标轴如图示，则$\vec{F}$对于O点之矩

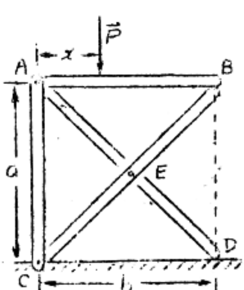
$$\vec{m}_o(\vec{F}) = Fa\vec{j}$$

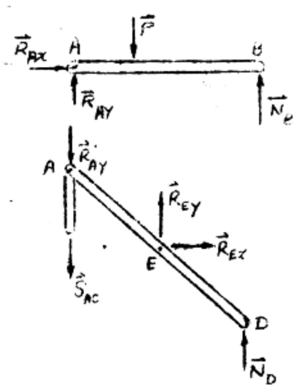
于是得到$\vec{F}$对于OC轴之矩

$$m_{OC}(\vec{F}) = Fa\cos(\vec{OC}, \vec{j}) = Fa \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



5—29．AB、AC、BC、AD四杆连接如图示。在水平杆AB上有铅垂向下的力$\vec{P}$作用，求证不论$\vec{P}$的位置如何，AC杆总是受到大小等于P的压力。





解：以系统为对象，可求得$N_D = \frac{Px}{b}$。

以AB杆为对象，可求得$R_{Ax} = 0$，$R_{Ay} = \frac{P(b-x)}{b}$。

最后以AD杆以及两力杆AC的一段为对象，有

$$\Sigma m_E = 0$$

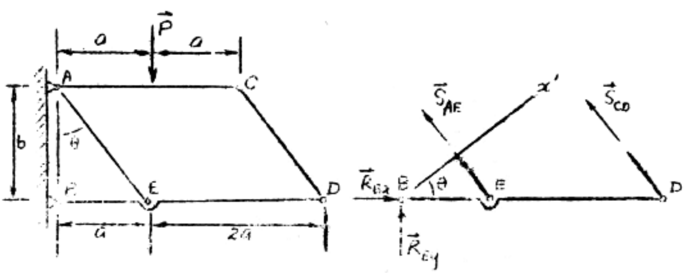
$$N_D \cdot \frac{b}{2} + (R_{Ay} + S_{Ac})\frac{b}{2} = 0$$

所以，$S_{Ac} = -(N_D + R_{Ay}) = -P$。

5－30。铰接四杆的支承及载荷如图示。求支座A、B处的约束力。

解：先以系统为对象，可求得

$$R_{Ax} = -R_{Bx} = -\frac{Pa}{b}$$



此外，有

$$R_{Ay}+R_{By}=P$$

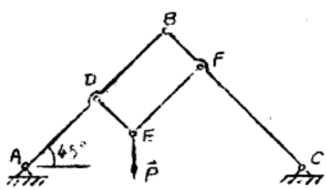
再取两力杆AE、CD的一段与BD杆组成的系统为对象，并取x′轴垂直于AE或CD，如图示，则

$$\Sigma F_{x'}=0:\ R_{Bx}\cos\theta+R_{By}\sin\theta=0$$

$$\therefore\ \ R_{By}=-R_{Bx}\,ctg\,\theta=-P$$

代入前式得 $R_{Ay}=2P$

5—32。AB、BC、DE、EF四杆铰接并支承如图示。设$\overline{AB}=\overline{BC}=l$，$\overline{AD}=\overline{DB}=\overline{EF}=l/2$，$\overline{DE}=\overline{BF}=l/4$。在E点有一铅垂力$\vec{P}$作用。求支座C处的约束力。



如果将F处的铰接改为焊接，则结果如何？

提示：

(I) 以整个系统为对象，从$\Sigma m_A=0$，求出$R_{cy}=\frac{3}{8}P$。

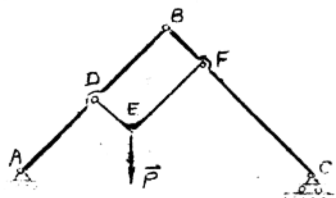
(II) 以节点E为对象，求出$S_{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}P$。

(III) 以BC杆以及两力杆EF的一段为对象，从$\Sigma m_B=0$，求

出 $R_{cx}=-\frac{1}{8}P$。

(Ⅳ) 如果F处为焊接，整个系统可以看作由三个刚体（AB、DE以及BCEF）用五个铰链连接并支承，那么，有九个方程和十个未知量，故为静不定问题。

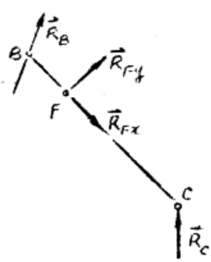
5－33．上题中，将E处改为焊接，支座C改为滚座，求D与F两点作用力的大小。



解：(Ⅰ) 以系统为对象，

得 $R_c=\frac{3}{8}P$，向上。

(Ⅱ) 以BC杆为对象，并把作用于铰链F处的力分解如图示。从 $\Sigma m_B=0$，求

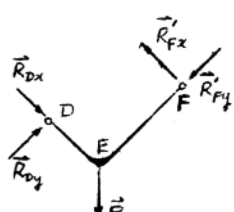


得 $R_{Fy}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}P$

(Ⅲ) 以DEF为对象。从 $\Sigma m_D=0$，求得

$$R'_{Fx}=-\frac{\sqrt{2}}{8}P。$$

此外，有 $R_{Dx}=-\frac{5\sqrt{2}}{8}P$，



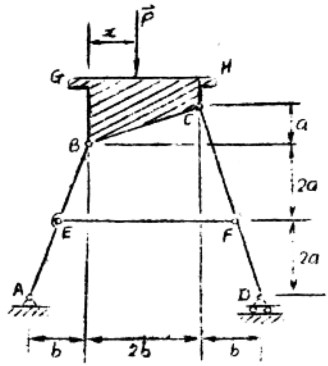
$$R_{Dy}=-\frac{\sqrt{2}}{4}P。$$

(Ⅳ) 于是，

$$R_D = \sqrt{R_{Dx}^2 + R_{Dy}^2} = \sqrt{\frac{29}{32}}\ P$$

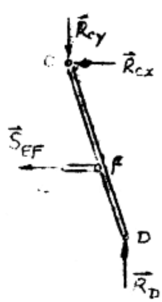
$$R_F = \sqrt{R_{Fx}^2 + R_{Fy}^2} = \sqrt{\frac{37}{32}}\ P$$

5－35。图示结构中，已知P与a、b，不计构件重量，求平衡时的x以及EF杆的内力。



解：(1) 以整个系统为对象，可得$R_D = \frac{b+x}{4b}P$。

(2) 以CD杆以及两力杆EF的一段为对象。



$\Sigma m_C = 0$：

$$3a\,S_{EF} = R_D b$$

$$\therefore \quad S_{EF} = \frac{b+x}{12a}P \qquad (1)$$

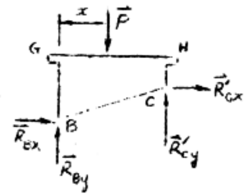
$\Sigma F_x = 0$：

$$R_{cx} = S_{EF} = \frac{b+x}{12a}P$$

(2)

$$\Sigma F_y = 0: \quad R_{cy} = R_D = \frac{b+x}{4b} P \tag{3}$$

(3) 以平台 BCHG 为对象。



$$\Sigma m_B = 0: \quad Px = R_{cx} a + R_{cy} 2b$$

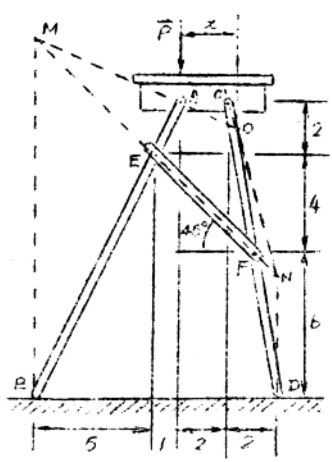
以(1)与(2)代入，得

$$x = \frac{b+x}{12} + \frac{b+x}{2}$$

解得 $\quad x = \frac{7}{5} b$

代入(1)，$S_{EF} = +\frac{b}{5a} P$

5—36。一架子放在光滑地面上并有一铅垂力 $\vec{P}$ 作用如图示。设构件的重量可以不计。问当 $\vec{P}$ 的作用线通过 A 点时，架子能否平衡？如果不能平衡，求平衡时 $\vec{P}$ 的位置以及此时杆 EF 的内力。



解：当铅垂力 $\vec{P}$ 的作用线通过 A 点时，系统显然不能平衡。因为 AB 与 CD 两杆上都只有三个力

作用，如果平衡，根据三力平衡定理，$\vec{R}_A$ 的作用线必须通过M点，而 $\vec{R}_C$ 的作用线必须通过N点如图示。AM与CN相交于O点，那么，平台AC平衡时，$\vec{P}$ 必须通过O点。

与上题同样的计算，可以得出

$$x=\frac{7}{3}\quad,\quad S_{EF}=+\frac{\sqrt{2}}{3}P\quad.$$

5—37．上题中，如果B、D两端用铰座固定，求当 $\vec{P}$ 的作用线通过A点时EF杆的内力以及支座上的约束力。

解：(1) 以整个系统为对象，可得

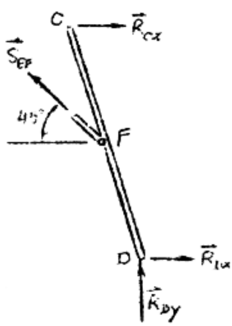
$$R_{By}=\frac{2}{5}P,$$

$$R_{Dy}=\frac{3}{5}P,$$

$$R_{Bx}+R_{Dx}=0$$

(2) 以平台AC为对象，可得

$$R_{cy}=0.$$



(3) 以CD杆以及两力杆EF的一段为对象，受力如图示。

$$\Sigma F_y=0:\quad R_{Dy}+\frac{\sqrt{2}}{2}S_{EF}=0$$