

普通高等教育通信类规划教材

电路、信号与系统

分析程序集

(第二版)

DIANLU XINHAO YU XITONG
FENXI CHENGXUJI

吕玉琴 编著
尹雷丽
孙炳旭

北京邮电大学出版社

TN
102

普通高等教育通信类规划教材

电路、信号与系统分析程序集

(第二版)

吕玉琴
尹霄丽 编著
孙炳旭

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 提 要

本书是一本与《电路分析基础》和《信号与系统》两门课程课堂教学配套的机辅分析参考书。其主要内容是将一些成熟的算法介绍给读者,如解线性代数方程的高斯—约当消去法和 LU 分解法,用同化结点法找树的算法,瞬态分析的龙格—库塔法;常用的数值积分法,多项式分解因式的劈因子法等。全书对算法和程序并重,在讲清算法的基础上,用 Turbo C 语言编写了 20 余个主子程序。为了兼顾其他语言,在附录中还附有 Borland C、Visual C++、Pascal 和 Matlab 语言的实用程序举例。

本书重点突出、难点叙述详尽,便于读者自学和上机实践,有利于提高读者编程能力。本书可作为无线电技术、通信、计算机和自动化等专业的教学参考书,也可供有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电路、信号与系统分析程序集 / 吕玉琴, 尹霄丽, 孙炳旭编著. —2 版. —北京: 北京邮电大学出版社, 2000. 9

ISBN 7-5635-0124-X

I. 电… II. ①吕… ②尹… ③孙… III. ①电路分析-计算机辅助分析-应用程序-汇编 ②信号系统-计算机辅助分析-应用程序-汇编 IV. TN

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 44198 号

书 名: 电路、信号与系统分析程序集(第二版)
编 著: 吕玉琴 尹霄丽 孙炳旭
责任编辑: 刘 洋
出 版 者: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编: 100876 电话: 62282185 62283578
网址: <http://www.buptpress.com>
经 销: 新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
印 刷: 北京忠信诚胶厂
开 本: 787 mm × 1 092 mm 1/16 印张: 20 字数: 461 千字
版 次: 2000 年 9 月第 2 版 2002 年 8 月第 2 次印刷
印 数: 3001—6000 册
书 号: ISBN 7-5635-0124-X/TM·5
定 价: 27.30 元

第二版前言

本书是配合“电路分析基础”和“信号与系统”两门课程上机练习用的指导性程序集。自1988年撰写本书的初稿算起,经1994年第一版至今,我校本科生使用本书已有十余年的历史。经多年教学实践证明,正如我们所期望的那样,本书有助于训练学生的计算机操作技能,有助于培养学生严密的科学思维能力并提高他们的编程能力。可以这样认为,这或许是本书的生命力所在。

科学技术日新月异,教学节奏不断加快,知识更新步伐日益加大。学生自觉应用计算机的兴趣浓厚。我们注意到讲基本算法的书较少,本书正是为适应这一需要而编写的。对学生而言,这是一本步入通信专业领域过程中进行计算机应用的入门书。按照教学计划规定的上机学时,要求学生通过自学完成指定作业。因此,如何使本书便于自学、便于上机实践并且适应新的计算机环境;如何使它更有利于提高学生的编程技能,这是我们修订本书的原因之一。

人们公认,“信号与系统”所涉及的学科领域,近20年来发生了很大的变化。从理论到实践发展迅速,分析方法不断更新,技术应用范围也日益扩展。在这种情况下要解决究竟对课程内容和体系有多大影响的问题时,有关学者经过对国内、外院校调查和相互交流,得出的结论是:“信号与系统”课程的教学要求和基本内容是相对稳定的,应当追求在相对稳定中力求变革的目标*。我们赞成并致力于这一目标。这就是说,对本书而言,不仅要求学生掌握基本算法,也要求学生接触和认识国际流行的软件工具。这是我们修定本书的原因之二。

第二版与第一版在内容上不同的是:将第一版中使用的FORTRAN语言改为当前使用较多的C语言;为了兼顾其他语言,在附录中还附有pascal语言的程序举例;由于计算机联网使用的需要,本书增加了介绍在局域网上运行时打印结果的方法,使学生懂得如何形成文件,记录输入数据和输出内容并打印出结果;以C语言取代原来用BASIC语言画连续曲线图的方法;收集并给出了快速付里叶变换的经典方法;考虑到当前国际流行的软件中Matlab影响广泛,本书给出信号分析的例子作以介绍,目的是使学生尽早的接触并认识Matlab的应用。

前已指出,本书是一本通信院校计算机应用的入门书。因此,熟练操作技能,理解并掌握基本的编程方法是我们的基本要求。同时,学习应用有关的通用软件将有利于提高学生的整体素质和能力。

为了适合学生的不同需要,在完成指定作业时,学生可以把计算机应用与本教材内容相结合,对电路部分,我们还有自编的“电路分析辅助教学与解题系统”软件供参考。同时还可选用广泛使用的SPICE软件和国际流行的Matlab软件上机练习。

* “信号与系统”(第二版)郑君里 应启珩 杨为理

本书的修订是由几位教师集体完成的。尹霄丽编写 Matlab 应用示例及完成全书插图的编辑，孙炳旭编写 C 语言画图示例及在局域网上运行时打印结果的方法介绍。吕玉琴编写其他修订内容并完成对全书的统稿。

在本书修订过程中，得到了吴新余、汪载生、姜大富、沈拓、胡春铃等许多老师及同学的支持和帮助，在此一并表示感谢。

赫慈辉教授再次审阅了书稿并提出了宝贵意见，对此表示诚挚的感谢！

由于我们的水平有限，书中难免有错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2000 年 7 月于北京邮电大学电子工程学院

前 言

熟练地掌握计算机技术是当代大学生的一项基本功。因此，学生在校期间必须做到“使用计算机不断线”。为贯彻这一精神，兄弟院校做了许多有益的尝试并取得不少成果，我院也从1981年开始将计算机技能的训练相继引入“电路分析基础”和“信号与系统”等课程中。

电路的计算机辅助分析和设计从理论到实际应用已发展到相当成熟的程度。这方面系统而全面的书在国内外已出版了许多种。由于内容涉及知识面广泛而深入，对于刚接触到专业基础课的学生而言，显得偏高和偏深。因此，很需要一种与“电路分析基础”、“信号与系统”课堂教学配套的机辅分析参考书，以便让学生尽早地接触计算机的实际应用，并不断地得到现代分析方法的训练，这是加强计算机能力教育的重要方面，也是作者编写此书的指导思想。

本书的前身是“电路、信号与系统分析程序”讲义，曾在北京邮电学院多次使用过。通过教学实践，根据学生反映及作者的教学心得，对讲义作了修改和增删。

本书在内容取材上密切配合上述两门课的基本要求，将一些成熟的算法介绍给读者，如解线性代数方程的高斯—约当消去法和LU分解法，用同化结点法找树的算法，瞬态分析的龙格—库塔法；常用的数值积分法，多项式分解因式的劈因子法等。在结点分析中，本书采用一个二端元件定义一支路的概念，这种处理方法在网络分析中，虽然较采用标准支路增加了一些结点数目，但在体系上与改进结点法是统一的，且具有输入简单、易于掌握的优点。为弥补其不足，在附录中又给出了在标准支路定义下结点分析法的实用程序，供读者参考。

本书对算法和程序并重。在讲清算法的基础上，通过流程图使读者理解编写通用程序的思路和方法。通过对程序的阅读和独立编写，不仅要求读者掌握基本的理论与方法，而且要对一切可能出现的情况和细节作全面而深入的考虑。在编写时，作者力求做到符合循序渐进的认识规律，重点放在使读者了解计算机究竟是怎样形成方程并解方程的。为便于读者入门，前面章节叙述详尽，流程图完整，选择有针对性的例题以增强读者对算法的理解。

由于FORTRAN语言仍是目前应用较为广泛的语言，它具有结构严谨、清晰、程序格式规范化、输出格式灵活等优点。本书采用FORTRAN77语言编写了20余个主子程序。为了兼顾其他语言，在附录中还附有C语言和BASIC语言的实用程序举例。

本书所附习题难易搭配，易者可以用手算核对编程的正确性，难者则必须用计算机分析与校核。有些内容，如含变压器元件的电路编程；数值计算中的变步长程序设计，差分方程的求解等则留给读者自己完成。

本书便于读者自学掌握，可以少占用或不占用课堂学时，分组指定学生完成不同的上机内容。编者希望，本书能够有助于提高读者的编程能力，培养读者严密的科学思维

能力和熟练计算机的操作技能。

本书在编写过程中，得到北京邮电学院舒贤林教授的鼓励和支持；得到本院“信号、电路与系统”教研室老师们热情帮助。上官右黎老师详细地阅读了本书全部书稿，并提出了许多宝贵意见。在此一并表示感谢。

本书由北京邮电学院赫慈辉教授审阅。

限于水平，书中难免有错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

1992年9月于北京邮电学院

目 录

第一章 用高斯—约当消去法和 LU 分解法解线性方程组	1
§ 1.1 用计算机形成电阻矩阵 R	1
§ 1.2 用高斯—约当消去法解网孔电流	4
1.2.1 高斯—约当消去法举例	4
1.2.2 高斯—约当消去法原理	6
1.2.3 用高斯—约当消去法解线性方程的基本步骤	6
1.2.4 列主元消去法	8
§ 1.3 高斯—约当消去法解网孔电程序	9
§ 1.4 用 LU 分解法解线性方程组	18
习 题	29
第二章 结点分析法	31
§ 2.1 网络的图	31
§ 2.2 结点方程	31
§ 2.3 结点分析法的算法	33
§ 2.4 形成 G_n , J_n 的直接填写法	43
§ 2.5 改进结点方程	47
§ 2.6 改进结点分析法的算法	51
§ 2.7 含受控源支路的结点分析法	61
2.7.1 电路中含有 VCVS 支路	61
2.7.2 电路中含有 VCCS 支路	63
2.7.3 电路中含有 CCVS 支路	66
2.7.4 电路中含有 CCCS 支路	67
2.7.5 混合型方程组的一般形式	68
§ 2.8 含受控源支路的结点分析法算法	69
2.8.1 算法的总体考虑	69
2.8.2 关于 VCVS 函数	75
2.8.3 关于 VCCS 函数	78
2.8.4 关于 CCVS 函数	82
2.8.5 关于 CCCS 函数	85
2.8.6 综合例题	87
习 题	89
第三章 求连通图的一棵生成树	94
§ 3.1 树	94

§ 3.2 用同化结点法求一棵生成树	95
§ 3.3 应用举例	100
习 题	102
第四章 割集分析法	103
§ 4.1 割集与基本割集	103
§ 4.2 基本割集矩阵	103
§ 4.3 求基本割集矩阵的算法	105
§ 4.4 应用举例	112
§ 4.5 割集分析法	114
§ 4.6 割集分析法的算法	115
4.6.1 算法的总体结构	115
4.6.2 建立割集方程的 cuf 函数	115
4.6.3 求支路电压、电流的 vib 函数	117
4.6.4 割集分析法的函数	118
习 题	129
第五章 瞬态电路数值方法	131
§ 5.1 欧拉法	131
§ 5.2 四阶龙格—库塔法 (四阶 R—K 法)	134
§ 5.3 误差与步长的选择	136
§ 5.4 程序的组成	137
5.4.1 求 RC 电路的零状态响应	137
5.4.2 求 RC 电路的全响应	143
5.4.3 求二阶电路的零状态响应	151
习 题	162
第六章 正弦稳态电路的结点分析法	164
§ 6.1 正弦稳态电路的特点	164
§ 6.2 正弦稳态的改进结点法	166
§ 6.3 含有互感元件电路的处理	168
习 题	196
第七章 卷积积分的数值计算	198
§ 7.1 用矩形法表示卷积积分公式	198
§ 7.2 用矩形法计算分段定义函数的卷积	200
习 题	207
第八章 周期信号傅里叶级数系数的计算	209
§ 8.1 梯形法	209
§ 8.2 辛普生法	211
习 题	219

第九章 离散傅里叶变换 (DFT) 和快速傅里叶变换 (FFT)	221
§ 9.1 离散傅里叶变换 (DFT)	221
§ 9.2 快速傅里叶变换 (FFT)	224
§ 9.3 快速傅里叶变换 (FFT) 的实现	234
第十章 拉普拉斯反变换 (求部分分式展开的系数)	246
§ 10.1 求 $A(s)$, $B(s)$ 方程的根—劈因子法	246
§ 10.2 比较重根	248
§ 10.3 求部分分式展开系数	249
习 题	260
附录一 pascal 语言程序例	262
附录二 处理标准支路的结点分析程序	270
附录三 牛顿—拉夫逊法解非线性电路程序	282
附录四 画图程序示例	286
附录五 MATLAB 应用示例	305
参考文献	310

第一章 用高斯—约当消去法和 LU 分解法解线性方程组

§ 1.1 用计算机形成电阻矩阵 R

结点分析法和网孔分析法是线性网络的一般分析方法。以网孔分析为例，一个三网孔网络的网孔方程为

$$\left. \begin{aligned} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + R_{13}I_3 &= U_1 \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + R_{23}I_3 &= U_2 \\ R_{31}I_1 + R_{32}I_2 + R_{33}I_3 &= U_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

R_{ii} ($i=1, 2, 3$) 为自电阻, R_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3; i \neq j$) 为互电阻, U_i ($i=1, 2, 3$) 为相应网孔电源电压的代数和。写成矩阵形式, 则有

$$RI = U \quad (1-2)$$

式中, 电流列矢量 $I = [I_1 \ I_2 \ I_3]^T$, 电压列矢量 $U = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T$, 3×3 阶网孔电阻矩阵

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

网孔电流矩阵 I 为被求变量。能否正确列写电阻矩阵 R 是求解网孔电流矩阵的重要环节。

给出两个电路分别如图 1-1 和图 1-2 所示。设网孔电流一律为顺时针方向, 并假定两网孔之间 (公共支路) 只有一个电阻元件。图中各变量所用单位: 电阻为欧姆, 电压为伏特, 电流为安培。

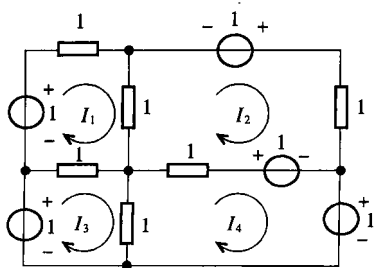


图 1-1

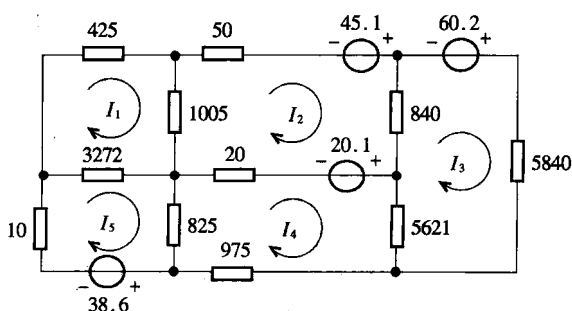


图 1-2

用观察法容易写出图 1-1 电路的电阻矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

然而，当电路复杂时，手写 R 矩阵就会很困难。用计算机形成电阻矩阵的流程图如图 1-3 所示，其功能由 xz 函数完成。现以图 1-2 为例给出相应参考程序，程序中各变量及其意义说明如下：

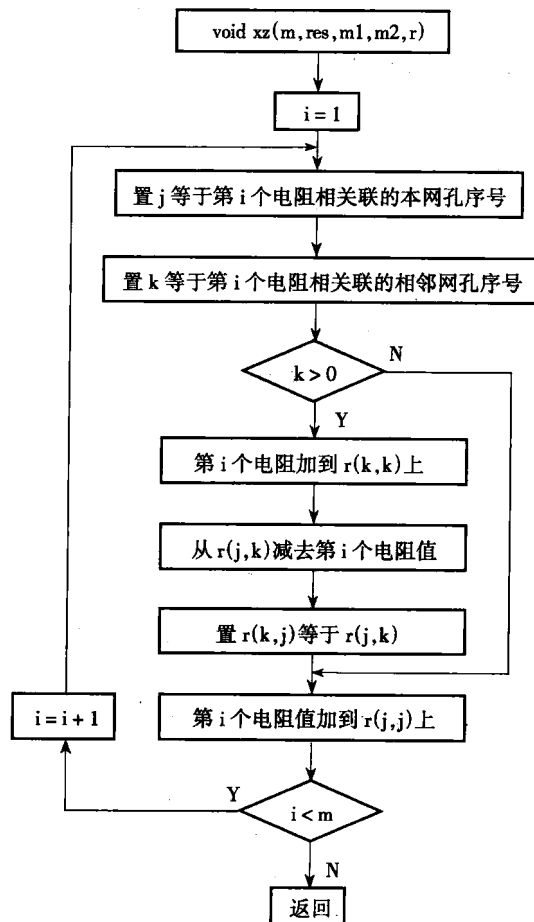


图 1-3 形成电阻矩阵函数的流程图

n ——网络的网孔数。

m ——网络的电阻数。

res ——一维数组。变量 $res[i]$ 存储第 i 个电阻的电阻值。

$m1$ ——一维数组，整型变量 $m1[i]$ 存储与第 i 个电阻相关联的第一网孔(本网孔)的序号。

$m2$ ——一维数组, 整型变量 $m2[i]$ 存储与第 i 个电阻相关联的第二网孔(相邻网孔)的序号。如果第 i 个电阻仅出现在第一网孔内, 变量 $m2[i]$ 必置零。

r ——二维数组, 变量 $r[i][j]$ 存储电阻矩阵 R 的元素 r_{ij} 。

```

/* 电路电阻矩阵形成函数 */
#include <math.h>
#include <stdio.h>
main()
{
void xz();
float res[20], r[10][10];
int m, n, i, j, m1[20], m2[20];
//输入数据
scanf("%d %d", &n, &m);
for(i = 0; i < m; i++)
    scanf("%d %d %f", &m1[i], &m2[i], &res[i]);
//数组清零
for(i = 0; i < 10; i++)
for(j = 0; j < 10; j++)
    r[i][j] = 0;
//形成 R 矩阵
xz(m, res, m1, m2, r);
printf("\n 输出结果: \n\n");
printf("          * * * * * R * * * * * \n\n");
for(i = 1; i < n + 1; i++)
{
    for(j = 1; j < n + 1; j++)
        printf("%15.5e", r[i][j]);
    printf("\n");
}

/* 形成 R 矩阵函数 */
void xz(m, res, m1, m2, r)
float res[20], r[10][10];
int m, m1[20], m2[20];
{
int i, j, k;
for(i = 0; i < m; i++)

```

```

{
j = m1[i];
k = m2[i];
if(k > 0)
{
r[k][k] = r[k][k] + res[i];
r[j][k] = r[j][k] - res[i];
r[k][j] = r[j][k];
}
r[j][j] = r[j][j] + res[i];
}
}

```

输入数据:

```

5 11
1 0 425.    2 0 50.    1 2 1005.    2 3 840.
3 0 5840.   3 4 5621.   2 4 20.    4 0 975.
4 5 825.    1 5 3272.   5 0 10.

```

输出结果:

```

          * * * * * R * * * * *
4.70200e+03  -1.00500e+03  0.00000e+00  0.00000e+00  -3.27200e+03
-1.00500e+03  1.91500e+03  -8.40000e+02  -2.00000e+01  0.00000e+00
0.00000e+00  -8.40000e+02  1.23010e+04  -5.62100e+03  0.00000e+00
0.00000e+00  -2.00000e+01  -5.62100e+03  7.44100e+03  -8.25000e+02
-3.27200e+03  0.00000e+00  0.00000e+00  -8.25000e+02  4.10700e+03

```

§ 1.2 用高斯—约当消去法解网孔电流

1.2.1 高斯—约当消去法举例

为了便于叙述,先考虑图 1-4 电路。其网孔方程为

$$RI = U$$

即

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

应用高斯—约当消去法计算网孔电流的方法如下：

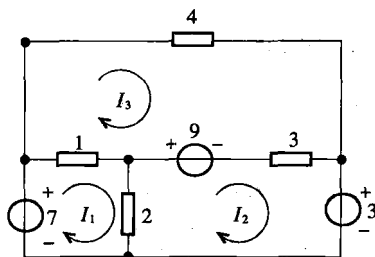


图 1-4

第一步，定义增广矩阵 R_a ，即把电压列矩阵 U 作为第四列与 R 伴随，则式(1-4)的增广矩阵为

$$R_a = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & -12 \\ -1 & -3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

将 R_a 的第一行除 3，使第一个元素为 1，称归一。保持第二、第三行不变，得

$$R'_a = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -2 & 5 & -3 & -12 \\ -1 & -3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

第二步，将 R'_a 的第一行乘 2 加到第二行，将第一行加至第三行，称消元。保持第一行不变，得

$$R''_a = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & \frac{34}{3} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

第三步，将 R''_a 的第二行乘 $3/11$ ，则第二行的第一个非零元素为 1。将归一后的第二行乘 $2/3$ 加至第一行，归一后的第二行乘 $11/3$ 加至第三行，得

$$R'''_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

上述矩阵最后一行乘 $1/4$ ，则第三行第一个非零元素为 1。将归一后的第三行乘以 1 分别加到第二和第一行，消元得

$$R''''_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

经过数次初等变换，增广矩阵 R_a 变为 R''''_a ，其中第四列元素即为网孔电流列矢量。

$$I = [2 \quad -1 \quad 1]^T$$

亦即 $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = -1 \text{ A}$, $I_3 = 1 \text{ A}$ 。

1.2.2 高斯—约当消去法原理

为什么增广矩阵经过初等变换所得 R_a'''' 的第四列即为电流列矢量呢？为了便于理解，把式 (1-1) 写成

$$I_1 R_{i1} + I_2 R_{i2} + I_3 R_{i3} = U_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-10)$$

如果一组确定的电流 I_1, I_2, I_3 是上述方程的解答，当上式两边乘以任意常数时，则 I_1, I_2, I_3 也为以下方程

$$KI_1 R_{i1} + KI_2 R_{i2} + KI_3 R_{i3} = KU_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

之解。同理，这组解答对下列变换

$$I_1(R_{11} + KR_{21}) + I_2(R_{12} + KR_{22}) + I_3(R_{13} + KR_{23}) = U_1 + KU_2$$

同样成立。此结论可推广到式 (1-10) 做其他变换的情况，即对方程乘以任意常数并加到其他两方程上都不会改变这组方程的解。若变换成以下形式

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 &= C_1 \\ 0 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 &= C_2 \\ 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 &= C_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

显然， $I_1 = C_1$, $I_2 = C_2$, $I_3 = C_3$ 。在增广矩阵中的运算恰好是上面所证明的过程。因此，当其增广矩阵左边已变成单位矩阵时，则增广矩阵 R_a'''' 右边的列元素正是式 (1-11) 中的 C_1, C_2, C_3 ，即它们是网孔电流 I_1, I_2, I_3 的解。

从式 (1-5) 到式 (1-9) 可直观地用笔算来完成变换过程，但当方程组的未知变量增加时，笔算困难，必须进一步规格化，以便于编程。

1.2.3 用高斯—约当消去法解线性方程的基本步骤

n 个网孔电阻矩阵

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

增广矩阵

$$R_a = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} & R_{1,n+1} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} & R_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} & R_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

式中右边列元素，据式 (1-1) 可知就是电压列矢量的元素，即

$$R_{i,n+1} = U_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \quad (1-14)$$

如上所述，高斯—约当消去法实际上是反复执行两个步骤：归一和消元。

归一：就是使主对角线元素为 1。

消元：就是在第 i 行经运算完成后，使除第 i 行以外的各行中，与归一的主对角线元素相对应列上的各元素都为 0。

现在，我们按归一、消元反复执行的步骤给出变换过程。

首先，定义归一化元素 α ，令

$$\alpha = R_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-15)$$

第 i 行归一时，对 i 行各列元素作如下置算

$$R_{ij} = R_{ij}/\alpha \quad (j = i, i+1, \dots, n+1) \quad (1-16)$$

其次，定义消元元素 β ，令

$$\beta = R_{ki} \quad (k = 1, 2, \dots, n, k \neq i) \quad (1-17)$$

第 i 行归一后，对 k ($k \neq i$) 行各列元素作如下置算

$$R_{kj} = R_{kj} - \beta R_{ij} \quad (j = i, i+1, \dots, n+1) \quad (1-18)$$

式 (1-16)，式 (1-18) 两式中等号表示“赋以新值”之意，等号左边各量是经过归一消元后的新元素。

据式 (1-15) 至式 (1-18) 定义，图 1-4 网孔方程的增广矩阵变换过程可以简明地表述如下（每一步归一、消元过程中的列号 $j = i+1, i+2, \dots, n+1$ ）：

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} 3 & -2 & -1 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & -12 \\ -1 & -3 & 8 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{归一}]{\substack{i=1 \\ \alpha = R_{11} = 3}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ -2 & 5 & -3 & -12 \\ -1 & -3 & 8 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{k=2 \\ \beta = R_{21} = -2}} \\ & \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \\ -1 & -3 & 8 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{k=3 \\ \beta = R_{31} = -1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{23}{3} & \frac{34}{3} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{归一}]{\substack{i=2 \\ \alpha = R_{22} = \frac{11}{3}}} \\ & \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & \frac{34}{3} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{k=1 \\ \beta = R_{12} = -\frac{2}{3}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & \frac{34}{3} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{k=3 \\ \beta = R_{32} = -\frac{11}{3}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\text{归一}]{\substack{i=3 \\ \alpha = R_{33} = 4}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{k=1 \\ \beta = R_{13} = -1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{k=2 \\ \beta = R_{23} = -1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

高斯—约当法是解线性方程组的基本方法之一。设方程组的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$