中等專業学校教学用書

医藥性質專業适用

三 角

（試用本）

鄒定仪編

高等教育出版社

本书是根据中华人民共和国高等教育部1956年批准的190小时的中等医藥專業数学教学大綱（內三角占16小时）編写的。全书分兩章：第一章是銳角的三角函数，第二章是直角三角形的解法。

本书由鄒定仪先生編写，由北京师范大学程廷熙教授审閱。可作中等医藥性質專業学校三角課程的教学用书。

目录

引　言

三角学的西文原字是由希腊文 τρτγουου (三角形) 和 μετρειυ (測量)二字構成的，直譯过来的意义是三角形的測量，这个問題一般說成解三角形，就是根据三角形一部分的已知边与角来求其余的边与角，它構成了三角学的实用基础。

三角学与其他的科学一样，是在解决具体的实际問題的过程中，由人类的实踐而成長起来的，由于航海、測量等实际的需要，促进了三角学的發展。自从三角函数建立了以后，三角学的研究范圍更加广泛，几何学、物理学以及各种应用技术科学都应用着三角函数，研究高等数学，三角函数也是一种不可缺少的基础知識，因此三角函数的解析研究就成为現代三角学的一个重要內容。在一些科学家創造性的研究之下，使得这門科学在实用上以及理論研究上都具备了它应有的作用与光輝的价值。

第一章　銳角的三角函数

§1.　定义

取任意銳角 α，从它的一边上不与角的頂点 A 重合的任意点 B 向另一边作垂綫 BC，構成含銳角 α 的直角三角形 ABC（圖 1），分别用 a，b 和 c 表示三边 BC，AC 和 AB 的長，对于这三边可以組成六个比：

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b}\text{和}\frac{c}{a}.$$

本書只考慮前面四个比，現在給出下面四个定义：

定义1.　銳角 α 所对的直角边 a 与斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的正弦。用記号 $\sin\alpha$ 来表示，即

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}.$$

定义2.　和銳角 α 相鄰的直角边 b 与斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的余弦。用記号 $\cos\alpha$ 来表示，即

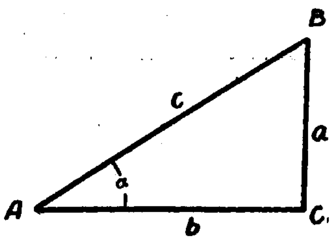

圖 1

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

定义3.　銳角 α 所对的直角边 a 与此角相鄰的直角边 b 的比值，叫做銳角 α 的正切。用記号 $\operatorname{tg}\alpha$ 来表示，即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}.$$

定义4.　銳角 α 相鄰的直角边 b 与此角所对的直角边 a 的比值，叫做銳角 α 的余切。用記号 $\operatorname{ctg}\alpha$ 来表示，即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

下面我們用例来說明，如何用直接度量法求出任意銳角的正弦、余弦、正切和余切的近似数值。

例：求48°角的正弦、余弦、正切和余切的近似值。

利用直尺、圓規和量角器作出直角三角形 ABC，使$\angle BAC=$ $=48°$。为了計算方便起見，取斜边 $AB=100$ 毫米(圖2按实际長度縮为$\frac{1}{2}$)。

由圖上量得：$BC\approx74$毫米；$AC\approx67$毫米。

则 $\sin 48°\approx\frac{74}{100}=0.74$;

$\cos 48°\approx\frac{67}{100}=0.67$;

$\operatorname{tg} 48°\approx\frac{74}{67}=1.1$;

$\operatorname{ctg} 48°\approx\frac{67}{74}=0.90$.

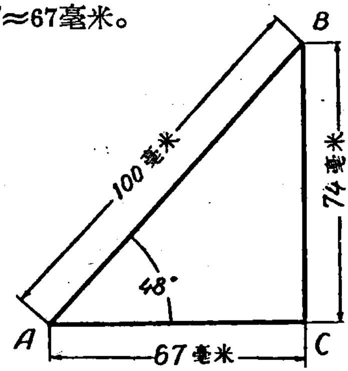

圖 2

用同样的方法，可以求得任意一个銳角的正弦、余弦、正切和余切的近似数值。

定理：若 α 角为已知，则它的正弦、余弦、正切和余切的値即可完全确定。这就是說：这些値与作直角三角形时 B 点的选擇無关。即不論直角三角形的大小怎样，只要 α 角不变动的話，这些値是絕不会变动的。

証明 就含有銳角 α 的几个直角三角形来考慮，例如圖 3 中的直角三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$，这几个直角三角形都相似，由平面几何学，它們的对应边之比应相等。于是

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\sin\alpha;$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}=\cos\alpha;$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'}=\frac{AC''}{B''C''}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

根据以上所述，本定理的正确性已被証明。

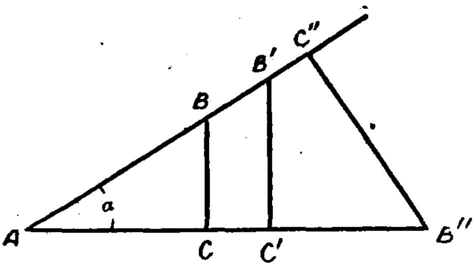

圖 3

因此，对应于一个已知的銳角 α，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 就有完全确定的值。当角 α 变化时，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值也跟着变化，所以它們都是角 α 的函数，这些函数叫做三角函数。

注意 （1）任意銳角的三角函数都是数字量，每个三角函数是表示一个長度对另一个長度的比，我們切不可以長度看待它。

注意 （2）直角三角形中，斜边为最長，根据上面所述的定义，凡以斜边为分母的比，总是小于1，而不含斜边的比，則沒有这样的限制，因兩銳角所对的边，它們之間的大小是沒有严格規定的。由此可推得：

一个銳角的正弦和余弦的値是小于1的正数。

一个銳角的正切和余切的値可以为任何正数。

§2. 互余兩角的三角函数

兩个銳角的和为一直角时，我們叫此兩銳角互为**余角**。直角三角形中的兩个銳角是互为余角的。

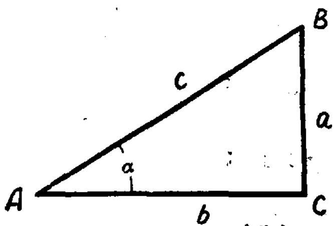

圖 4

若直角三角形 ABC（$\angle C=90^\circ$）中，銳角 $BAC=\alpha$（圖 4），則第二个銳角 $ABC=90^\circ-\alpha$。

根据三角函数的定义，得

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{c}=\cos\alpha.$$

$$\cos(90°-\alpha)=\frac{a}{c}=\sin\alpha.$$

这就是說：兩角互为余角时，其中一角的正弦等于他一角的余弦。

同样：
$$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha.$$
$$\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha.$$

这就是說：兩角互为余角时，其中一角的正切等于他一角的余切。

例 $\sin 30°=\cos 60°$ $\cos 30°=\sin 60°$

$\sin 72°=\cos 18°$ $\operatorname{tg} 13°20'=\operatorname{ctg} 76°40'$

$\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$.

§3. 由銳角的已知三角函数值求作这个角

在§1里，我們明确了三角函数的定义，并知道如何用度量方法求出已知銳角的三角函数的近似值，現在我們来研究相反的問題，即已知三角函数值，怎样作出与它对应的銳角。这类問題的解法，我們可用下面各例来說明。

例1. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$，求作銳角 α.

解：在任意直綫上取綫段 $DE=3$（圖5），过 E 点引直綫 $EF\perp DE$，以 D 为中心，4 为半徑作一圓弧交直綫 EF 于 K 点，作綫段 KD. 則角 EKD 就是所求的銳角 α.

因为它的正弦等于 $\frac{DE}{DK}=\frac{3}{4}$.

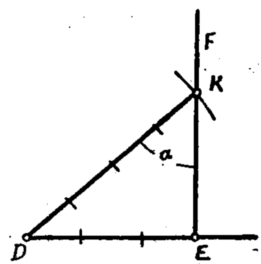

圖5

例2. 已知 $\cos\alpha=\frac{2}{5}$，求作銳角 α.

解：在任意直綫上取綫段 $BC=2$（圖6），过 C 点引直綫 $CM\perp BC$，以 B 点为中心，5 为半徑作一圓弧交直綫 CM 于 A 点，作綫段 AB. 則角 ABC 的余弦等于 $\frac{BC}{BA}=\frac{2}{5}$，因此，$\angle ABC$ 就是所求的銳角 α.

例3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$，求作銳角 α。

解：在直角 MON（圖 7）的一条边 OM 上，从頂点 O 取綫段 $OA=3$，而在另一条边上取綫段 $OB=2$，連結 A 点和 B 点，則 $\angle OAB$ 的正切等于 $\frac{OB}{OA}=\frac{2}{3}$，因此，$\angle OAB=\alpha$。

例4. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=3$，求作銳角 α。

解：仿照前面的作圖法，在直角 LKM（圖 8）的兩边上，取綫段 KA 和 KC，使 $KA=3KC$，連結 A 点和 C 点，則 $\angle KAC$ 的余切等于 $\frac{KA}{KC}=3$，因此 $\angle KAC=\alpha$。

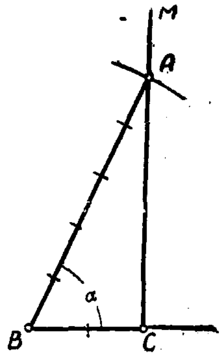

圖 6

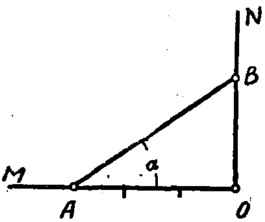

圖 7

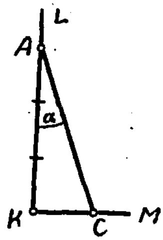

圖 8

習 題 一

1. 在下列各圖中，試讀出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正弦、余弦、正切和余切。

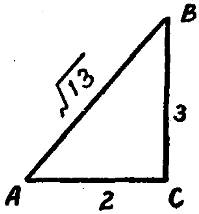

圖 9

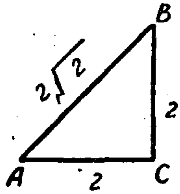

圖 10

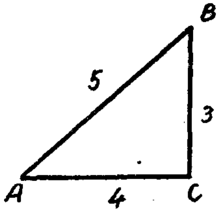

圖 11

2. 用 3 米为一边，画一个正方形，作对角綫，試求它的長，并

求45°的三角函数值。又用4米为一边，画一个正方形，再求45°的三角函数值。

3. 作一个等边三角形，它的一边長为3厘米，从一个頂点到它的对边作一条垂綫，由此圖形，求60°的三角函数值。再画一个每边等于5厘米的等边三角形，再求60°的三角函数值。

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 求作銳角α。

5. 已知 $\cos\alpha=0.4$ 求作銳角α。

6. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$ 求作銳角α。

7. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{5}$ 求作銳角α。

8. 一棵树的影子長30米，从树頂到影子一端的一条直綫与地面成30°的角，問树高多少米？

答 約17米。

§4. 同一銳角的三角函数間的关系

取任意的銳角α，并作出直角三角形ABC，使它的一个銳角A等于α(圖12)。

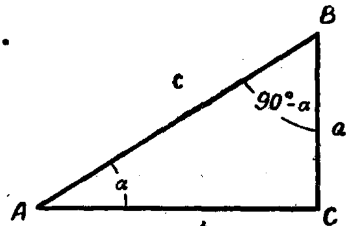

圖 12

設 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$。

1. 根据勾股定理，得

$$a^2+b^2=c^2$$

用c^2去除这个等式的兩端，得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

但 $\frac{a}{c}=\sin\alpha$, $\frac{b}{c}=\cos\alpha$

因此，得 $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1.$

通常指数为正整数时，把指数記在函数符号的右上角，不再用括弧。例如$(\sin\alpha)^2$記做$\sin^2\alpha$，又$(\cos\alpha)^2$記做$\cos^2\alpha$。

这样，上面的等式可以写为

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{1}$$

这就是說：一銳角的正弦的平方与余弦的平方之和等于1。

2. 由 $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ 及 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$. 可得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{2}$$

这就是說：一銳角的正切等于它的正弦与余弦的比。

3. 由 $\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$ 及 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$. 可得

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{3}$$

这就是說：一銳角的余切等于它的余弦与正弦的比。

4. 由 $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$. 可得

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1; \tag{4}$$

这就是說：一銳角的正切与它的余切互为倒数。

上面的等式(1),(2),(3),(4)表示同一銳角的三角函数間的关系，对于任何銳角都能成立，我們把它們叫做**三角恒等式**。这四个恒等式表示了三角函数間的基本关系，利用它們可以証明其他恒等式，或化簡含三角函数的式子，下面就是这样的例。

例1. 証明恒等式 $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$

（第一法） 改变右端

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

（第二法） 改变左端

$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha.$$

例2. 証明恒等式

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha).$$

改变左端

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

改变右端

$$\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

由于已知等式的兩端都变成了同一的式子 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，由此我們可以断定已知的恒等式成立。

例3. 化簡 $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha$.

解: $$(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha=\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha=$$
$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

§5. 根据銳角的一个三角函数值計算此角的其余三角函数值

根据上节的公式，可以从銳角的一个三角函数值，求出此角的其余三角函数值。下面我們用例子来說明是怎样进行計算的。

例1. 已知 $\sin\alpha=\frac{20}{29}$，計算銳角 α 的其余三角函数值。

解: 从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$

把 $\sin\alpha$ 的已知值$\frac{20}{29}$代入，得

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{20}{29}\right)^2=\frac{29^2-20^2}{29^2}=\frac{(29+20)(29-20)}{29^2}=\frac{49\cdot9}{29^2}.$$

于是 $$\cos\alpha=\frac{7\cdot3}{29}=\frac{21}{29}.$$

要求 $\operatorname{tg}\alpha$，可用公式 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{20}{29}:\frac{21}{29}=\frac{20}{21}.$$

要求 $\operatorname{ctg}\alpha$，可用公式 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ 得

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{21}{20}.$$

例2. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{45}{28}$，計算銳角 α 的其余三角函数值。

解：由公式 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ 得 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{28}{45}.$

由公式 $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 得 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{45}{28}$；

將这个等式的兩端平方，得 $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{45^2}{28^2}.$

在上式的兩端各加1，得

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\frac{45^2}{28^2},$$

或

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{28^2+45^2}{28^2}.$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，于是

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{784+2025}{28^2},\quad \sin^2\alpha=\frac{28^2}{784+2025}=\frac{28^2}{53^2}.$$

由此得

$$\sin\alpha=\frac{28}{53}.$$

从公式 $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 得 $\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha.$

把上面所知的 $\sin\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值代入，得

$$\cos\alpha=\frac{45}{28}\cdot\frac{28}{53}=\frac{45}{53}.$$

例3. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$，求銳角 α 的其余三角函数值。

解：从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{49}}=\frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{7}}{\frac{2}{7}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

例4. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$，求銳角 α 的其余三角函数值。

解：利用公式　$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$，得

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{2}.$$

由公式　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}$.

將这个等式的兩端平方，得　$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2^2}{3^2}$.

在上式的兩端各加1.　$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\frac{2^2}{3^2}$，

或　$$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{3^2+2^2}{3^2}.$$

因为　$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，

于是　$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{9+4}{3^2}=\frac{13}{3^2}$，　$\cos^2\alpha=\frac{3^2}{13}$

由此得　$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

由公式 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 得 $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$.

把 $\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的已知值代入，得

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

以上各例，也可以用下面比較簡便的方法来解。

法则　根据已知三角函数的定义，用已知值的分子与分母作为直角三角形的兩边，作出一个对应的直角三角形，然后应用勾股定理求出他一边，再根据其余各三角函数的定义求出它們的值。

例1的解法如下：

$$\sin\alpha=\frac{20}{29}.$$

以29为斜边，以20为銳角 α 所对的直角边，作一个直角三角形(圖13)，它的另一直角边等于

$$\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{(29+20)(29-20)}=$$

$$=\sqrt{49\cdot 9}=7\cdot 3\quad 21.$$

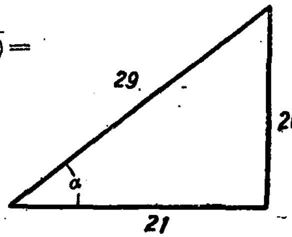

圖 13

根据定义，得 $\qquad \cos\alpha=\frac{21}{29}$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{20}{21},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{21}{20}.$$

例2的解法如下：

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{45}{28}.$$

以28为銳角 α 所对的直角边，以45为角 α 相鄰的直角边，作一个直角三角形(圖14)，它的斜边等于

$$\sqrt{28^2+45^2}=53.$$

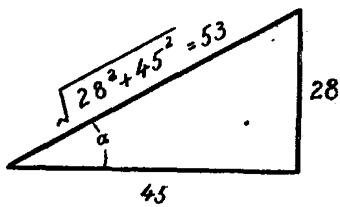

圖 14

根据定义，得 $\sin\alpha=\frac{28}{53}$,

$$\cos\alpha=\frac{45}{53},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{28}{45}.$$

例3的解法如下：

$$\cos\alpha=\frac{2}{7}.$$

以 7 为斜边，以 2 为銳角 α 相鄰的直角边，作一个直角三角形(圖15)，它的另一直角边等于

$$\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

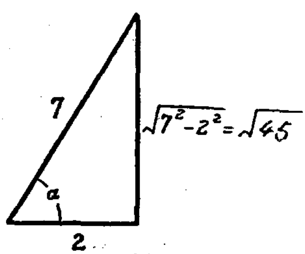

圖 15

根据定义，得

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{45}}{7}=\frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

上面的法則，对于一个三角函数的已知值是文字数或整数(整数可以把它看成是分母为1的分数)时，也可以应用。現在举二个例子来說明:

例1. 若 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$，求銳角 α 的其余三角函数值。

解: 以p为銳角α所对的直角边，q为其相鄰的直角边，作一个直角三角形(圖16)，它的斜边等于$\sqrt{p^2+q^2}$。根据三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{q}{p}.$$

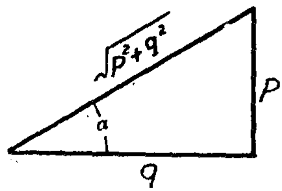

圖 16

例2. 若 $\operatorname{ctg}\alpha=3$，求銳角 α 的其余三角函数值。

解: $$\operatorname{ctg}\alpha=3=\frac{3}{1}.$$

以3为銳角α相鄰的直角边，1为它的对边，作一个直角三角形(圖17)，它的斜边等于$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. 于是

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}.$$

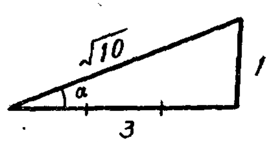

圖 17

習 題 二

1. 計算銳角 α 的一切三角函数值，已知

(*a*) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$.　　　(*b*) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

(*c*) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{24}$.　　　(*d*) $\operatorname{ctg}\alpha=7$.

2. 若 $\sin\beta=\frac{1}{5}$，求 $\operatorname{ctg}\beta$.

3. 若 $\cos\phi=\frac{2}{3}$，求 $\operatorname{tg}\phi$.

4. 若 $\operatorname{tg}\gamma=\kappa$，求 $\sin\gamma$.

5. 簡化下列各式:

(*a*) $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$.　　　(*b*) $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$.

(*c*) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$.　　　(*d*) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

(*e*) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$.　　　(*f*) $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$.

(*g*) $(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin\alpha)$.

(*h*) $\dfrac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

6. 証明恒等式:

(*a*) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$.

(*b*) $(1-\sin^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

(*c*) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

(*d*) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

(*e*) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

(*f*) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$.

(*g*) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

(*h*) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

§6. 30°,45°和60°各角的三角函数

某些特殊的銳角，如30°，45°和60°的三角函数値，可以根据几何圖形的性質来推算，現在分别說明如下：

1. **30°和60°角的三角函数。**

作直角三角形 ABC ($\angle C=90°$)，使它的一个銳角 $A=30°$ (圖18)；那末，另一銳角 $B=60°$，因为 $\angle B=2\angle A$，根据几何定理，这个直角三角形的斜边应等于 30° 角所对直角边的 2 倍。因此假定 $a=1$，則 $c=2$，随而另一直角边 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$。

利用 §1 中三角函数的定义，求得 30° 角的一切三角函数：

$$\sin 30°=\frac{a}{c}=\frac{1}{2},$$

$$\cos 30°=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30°=\frac{b}{a}=\sqrt{3}.$$

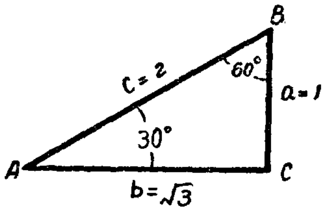

圖 18

根据互余兩角的三角函数間的关系，得

$$\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60°=\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60°=\operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. **45°角的三角函数值。**

作等腰直角三角形 ABC (圖19)，則它的兩个銳角 $\angle A=\angle B=45°$。