# 微積分學

# 微積分學

黃守中
張季信
程綸
合譯

周家樹
張鴻基
校訂

中華書局印行

# 目次

# 微積分學

## 第一章

## 函數　極限值　微分係數

**§1. 函數**　若 $y=x^2+2x$, 可知

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 當 | $x=0$ | 1 | 2 | 3 |
| 則 | $y=0$ | 3 | 8 | 15 |

此處 $x$ 與 $y$ 有如此之關係,即其中一變數之值若有變動,則他一個之值亦必有相當之變動.

當二量有如此情形之關係時,則此量稱爲彼量之**函數**,而二量均謂之**變數**.

其一謂之**自變數**,則他一謂之**因變數**.

自變數爲可給予以任何值之量;因變數則爲一經給予自變數以數值後其值即因以決定之量.

當變數有兩個或多於兩個時,常任擇其一爲自變數.

**$x$ 之函數**常以 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 等符號記之.有時因便利而用字母 $U, V, W$ 以記 $x$ 之函數.如 $ax^2+bx+c$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sin x$, $\tan^2 x$, $1+\sin^2 x$ 皆 $x$ 之函數.

在研究呈 $y=f(x)$ 形式之方程式時,常以 $x$ 爲自變數,則 $y$ 當然爲因變數.

**§2. 極限值**　在等比級數　　　　之增長

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

中,$n$ 項之和 $=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

當項數增加,則 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 漸次縮小;即當使 $n$ 充分大時,此級數之和連續漸近於 2,而終與 2 差一任意甚小之數.

故可云此級數至無窮項之和爲 2.

此亦即下文之省語:所取之項數愈多,則其和愈近似於 2.因 $n$ 無論若何大,其和決不確爲 2.

有時表以

$$\underset{n=\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2.$$

試就 $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ 一式論之.當使 $x=0$ 時,此式呈 $\frac{0}{0}$ 之形式,爲無意義,又稱爲**不定式**.

由二項式定理,若 $x<1$,在 $n$ 爲任何值時,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n\overline{n-1}}{|\underline{2}}x^2+\frac{n\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{|\underline{3}}x^3+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{1}{x}\left[nx+\frac{n\overline{n-1}}{|\underline{2}}x^2+\frac{n\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{|\underline{3}}x^3+\cdots\right]$$

$$=n+\frac{n\overline{n-1}}{|\underline{2}}x+\frac{n\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{|\underline{3}}x^2+\cdots$$

若 $x$ 連續減小漸近於零,則式中凡第一項以後之

[illegible]小而終成爲零.

[illegible]時,此極限 $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$,

或 $\underset{x=0}{Lt}\left[\frac{(1+x)^n-1}{x}\right]=n.$

以下二式爲三角學中所常見者;

$\underset{x=0}{Lt}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1.$ $\underset{x=0}{Lt}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1.$ (參看32頁)

要留心記着此即是下列文句之省語:即謂當 $x$ 無限減小時此二式連續漸近於壹,又由所取之 $x$ 有充分小,則可使之與壹相差一任意甚小之數.

**當 $x=a$ 時求 $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ 之極限值.**

若使 $x=a$ 則此式成 $\frac{0}{0}$ 之形式爲不定式.今使 $x=a+h$ 而 $h$ 爲一微量,則

$$\text{原式}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}$$

$$=2a+h \qquad h\text{可以任意小.}$$

故若 $h$ 連續減小,此式連續漸近於 $2a$.

$\therefore$ 當 $x=a$ 時 $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ 之極限值爲 $2a$.

此際務要記着,這就是下文之省語:即謂當 $x$ 連續漸近於值 $a$, 此式 $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ 連續漸近於值 $2a$,且可使與之相差一任意微數.

§3. **記法** 若 $y$ 爲 $x$ 之任何函數,則以 $\Delta x$, $\Delta y$ 各爲 $x$ 及 $y$ 之相當變動或增長,

如 $y=x^2$, $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$;

" $y=\sin x$, $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$;

" $y=f(x)$, $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

增長本可正可負,但實際上常以 $x$ 之增長

## 微分係數

§4. **定義** 若$f(x)$爲$x$之任何函數，$f(x+\Delta x)$爲$x+\Delta x$之同一函數，**則當使$\Delta x$無限小時$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$之極限值，謂之$f(x)$對於$x$之微分係數.**

若$y=f(x)$，而$\Delta x$，$\Delta y$爲$x$及$y$之相當增長，則

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

$$\therefore \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

故若$y$爲$x$之任何函數，而$\Delta x$，$\Delta y$爲$x$及$y$之相當增長，**則當使$\Delta x$無限小時$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$之極限值爲$y$對於$x$之微分係數.**

學者須熟悉此定義之兩種形式.

**$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$之極限值亦用$\dfrac{dy}{dx}$之符號記之.**

此定義中假定$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$有一極限.

**導來式** 微分係數有時稱爲**導來式或導來函數.**

例題一 **求$x^2$對於$x$之微分係數.**

設$y=x^2$，$\Delta x$，$\Delta y$爲$x$及$y$之相當增長，則$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$.

由減法 $$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

故至極限時(即$\Delta x$爲無限小)

$$\frac{dy}{dx}=2x.$$

例題二　若$y=x^5$,求$\frac{dy}{dx}$之值.

設$\triangle x$及$\triangle y$為$x$及$y$之相當增長,則

$$y+\triangle y=(x+\triangle x)^5.$$

又 $$y=x^5.$$

∴由減法 $$\triangle y=(x+\triangle x)^5-x^5$$
$$=x^5+5x^4\triangle x+\frac{5.4}{1.2}x^3(\triangle x)^2$$
$+$含$\triangle x$高次乘方之各項$-x^5$

(二項式定理)

∴$\frac{dy}{dx}=5x^4+10x^3\triangle x+$含$\triangle x$乘方之各項.

∴至極限時$\frac{dy}{dx}=5x^4$.

例題三　若$y=3x^2+5x-4$,求$\frac{dy}{dx}$之值.

設$\triangle x$及$\triangle y$為$x$及$y$之相當增長,則

$$y+\triangle y=3(x+\triangle x)^2+5(x+\triangle x)-4.$$

又 $$y=3x^2+5x-4.$$

∴由減法 $$\triangle y=6x\triangle x+3(\triangle x)^2+5\triangle x$$

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=6x+5+3\triangle x.$$

∴至極限時即當$\triangle x=0$時$\frac{dy}{dx}=6x+5$.

例題四　若$y=\frac{1}{3t-4}$,求$\frac{dy}{dt}$之值.

設$\triangle t$及$\triangle y$為$t$及$y$之相當增長,

則 $$y=\frac{1}{3t-4},\quad y+\triangle y=\frac{1}{3(t+\triangle t)-4}.$$

∴由減法 $$\triangle y=\frac{1}{3(t+\triangle t)-4}-\frac{1}{3t-4}$$

$$=\frac{-3\triangle t}{[3(t+\triangle t)-4](3t-4)}.$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle y}{\triangle t}=\frac{-3}{[3(t+\triangle t)-4](3t-4)}.$$

$\therefore$ 至極限時卽當 $\triangle t=0$ 時, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-3}{(3t-4)^2}$.

[註] $\dfrac{dy}{dt}$ **爲 $y$ 對於 $t$ 之微分係數**

**常數之微分係數爲零.**

設 $y=a$ 式中 $a$ 爲任何常數.

$a$ 不能變動,故 $y$ 不能變動.

$$\therefore \triangle y=0.$$

故無論 $\triangle x$ 爲何值 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=0$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=0.$$

若讀者已知微分係數爲速度量數,而 $\dfrac{dy}{dx}$ 所代表者爲 $y=f(x)$ 圖解上切線之斜率,此點或較易於了解.

## 習題一$_a$

求以下之極限値.

1. $\dfrac{x^2-3ax+2a^2}{x-a}$ 當 $x=a$ 時. 2. $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$ 當 $x=1$ 時.

3. $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$ 當 $x=1$ 時. 4. $\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2-4}$ 當 $x=2$ 時.

就下列各題求其對於變數之微分係數.

5. $ax^2$. 6. $x^3$. 7. $ax^2+bx+c$.

8. $x^7$. 9. $6x^9$. 10. $ax^3+bx^2$.

11. $8t-14t^2$. 12. $ut+\frac{1}{2}ft^2$,式中 $u$ 及 $f$ 爲常數.

13. $\dfrac{1}{x}$. 14. $\dfrac{1}{x^2}$. 15. $(x+1)(x+4)$.

16. $\frac{1}{x+2}$. 17. $\frac{4}{x-2}$. 18. $\frac{1}{1-x}$.

19. $\frac{10}{v^2}$. 20. $\frac{8}{v-2}$. 21. $\frac{1}{3x-4}$.

22. $(1-x)(1-3x)$. 23. $x^2+3x+1$. 24. $(1+x)(1-2x)$.

**§5. 求證在 $n$ 爲任何值時 $\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$.**

設 $y=x^n$, $\triangle x$, $\triangle y$, 爲 $x$ 及 $y$ 之相當增長,則 $y+\triangle y=(x+\triangle x)^n$.

由減法
$$\triangle y=(x+\triangle x)^n-x^n$$
$$=x^n\left[\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^n-1\right]$$
$$=x^n\left[\frac{n\triangle x}{x}+\frac{n\overline{n-1}}{\underline{|2}}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2+\text{含}\triangle x\text{高次乘方之各項}\right]$$

(二項式定理,參看本節註)

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=x^n\left[\frac{n}{x}+\frac{n\overline{n-1}}{\underline{|2}}\frac{\triangle x}{x^2}+\text{含}\triangle x\text{乘方之各項}\right].$$

故至極限時 $\frac{dy}{dx}=\frac{nx^n}{x}=nx^{n-1}$.

故可知 $\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$. $n$ 可爲任何數,整數分數正數或負數均可.

〔註〕由二項式定理所得 $(1+x)^n$ 之展開式,只當 $n$ 爲負數或分數時始成聚性;卽只當 $x$ 小於壹時,含算術之意義.在此情形,可使 $\triangle x$ 爲任意微數,或竟爲零.故可使 $\frac{\triangle x}{x}$ 小於壹.

**例題** $\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

$$\frac{d(x^{-7})}{dx}=-7x^{-8}.$$

**求 $x$ 任何乘方之微分係數,可乘以指數而將指數減壹.**

**若 $a$ 爲常數, $u$ 爲 $x$ 之函數,則 $au$ 對於 $x$ 之微分係數爲 $a\frac{du}{dx}$.**

設 $y=au$ 而 $\triangle y, \triangle u, \triangle x$, 爲 $y, u$,及 $x$ 之相當增長,則 $y+\triangle y=a(u+\triangle u)$.

由減法 $\triangle y=a\triangle u$, $\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=a\frac{\triangle u}{\triangle x}$.

$\therefore$ 至極限時 $\frac{dy}{dx}=a\frac{du}{dx}$.

例題 $\frac{d}{dx}(ax^2)=2ax$. $\frac{d}{dx}(c^2x^n)=nc^2x^{n-1}$.

**各項之和之微分係數等於各項微分係數之和.**

設 $y=u+v-w\cdots\cdots$, 式中 $u, v, w, \cdots\cdots$ 皆爲 $x$ 之函數,又設 $\triangle y, \triangle u, \triangle v, \triangle w, \cdots\cdots$ 爲 $y, u, v, w, \cdots\cdots$ 之相當增長,則 $y+\triangle y=u+\triangle u+v+\triangle v-w-\triangle w\cdots\cdots$.

由減法 $\triangle y=\triangle u+\triangle v-\triangle w\cdots\cdots$,

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle v}{\triangle x}-\frac{\triangle w}{\triangle x}\cdots\cdots,$$

故至極限時 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}\cdots\cdots$.

例題

(1) $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=\frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dx}(bx)+\frac{d}{dx}(c)$
$=2ax+b$.

(2) $\frac{d}{dx}(x^3+x^{-3})=3x-3x^{-4}$.

(3)　若 $y=\frac{1}{(x-3)^6}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

設 $\triangle x, \triangle y$ 為 $x$ 及 $y$ 之相當增長，則 $y=(x-3)^{-6}$

又 $y+\triangle y=(x+\triangle x-3)^{-6}$

$$\therefore \triangle y=(x-3+\triangle x)^{-6}-(x-3)^{-6}$$

$$=(x-3)^{-6}\left[\left(1+\frac{\triangle x}{x-3}\right)^{-6}-1\right]$$

〔註因 $\triangle x$ 可為任意微數，故 $\frac{\triangle x}{x-3}$ 可使之小於壹〕

$=(x-3)^{-6}\left[-\frac{6\triangle x}{x-3}+\frac{6.7}{1.2}\frac{(\triangle x)^2}{(x-3)^2}+\right.$ 含 $\triangle x$ 乘方之各項〕.

〔二項式定理〕

$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x}=(x-3)^{-6}\left[-\frac{6}{x-3}+\frac{3.7\triangle x}{(x-3)^2}+\right.$ 含 $\triangle x$ 乘方之各項〕

故至極限時 $\frac{dy}{dx}=(x-3)^{-6}\times\frac{-6}{x-3}=-6(x-3)^{-7}$.

(4)　若 $y=x^3+8x^2-7x+5$，求 $x=2$ 時 $\frac{dy}{dx}$ 之值.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+16x-7.$$

當 $x=2$，$\frac{dy}{dx}=3\times4+16\times2-7=37$.

## 習題一 b

由第一原則求下列各題中 $\frac{dy}{dx}$ 之值.

**1.** $\sqrt{x}$.　　**2.** $x^{\frac{5}{2}}$.　　**3.** $x^{-4}$.　　**4.** $x^{-n}$.

**5.** $(3x+1)^6$.　　**6.** $\frac{1}{(1-x)^4}$.　　**7.** $\frac{1}{(a+x)^5}$.

**8.** $(x+a)^n$，式中 $n$ 為任何值.

**9.** $(ax+b)^n$，$n$ 為任何值.

**10.** $ax+b+\frac{c}{x}$.　　**11.** $\frac{1}{1+x^2}$.　　**12.** $\frac{1}{a+bx^2}$.

13. $\sqrt{3x-5}$. [以 $y=\sqrt{3x-5}$, 則 $y^2=3x-5$].

14. $\sqrt{1+x^2}$.　　15. $\sqrt[3]{1+x}$.　　16. $\sqrt[3]{2+5x}$.

17. $(5x-7)^{-8}$.　　18. $(a-bx)^{-n}$.　　19. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$.

20. $(2-3x)^{-\frac{1}{3}}$.　　21. $\frac{a-x}{x}$.　　22. $\frac{a+bx}{\sqrt{x}}$.　　23. $\sqrt{1+x}$.

求下列微分係數之值.

24. $x^2+2x$, 當 $x=1$ 時.　　25. $x^3-3x^2+3x-1$, 當 $x=2$ 時.

26. $ax^2+bx+c$, 當 $x=0$ 時.

27. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$, 當 $x=1$ 時.

28. 若 $x^2+y^2=4$, 求$\frac{dy}{dx}$之值,以 $x$ 及 $y$ 表之.

29. 若 $y^2=4ax$, 求$\frac{dy}{dx}$之值,以 $x$ 及 $y$ 表之.

30. 若$y^2=ax^2+bx+c$,求$\frac{dy}{dx}$之值,以 $x$ 及 $y$ 表之.

31. 若$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 求$\frac{dy}{dx}$之值,以 $x$ 及 $y$ 表之.

## 習題一$_c$ (口答)

筆答或口答下列各式中對於變數之微分係數.

1. $\frac{1}{x}$.　　2. $\frac{1}{x^2}$.　　3. $x^{-4}$.　　4. $ax^7$.

5. $x^{-7}$.　　6. $x^{\frac{5}{2}}$.　　7. $x^6+ax^5-bx$.　　8. $ax^{-n}$.

9. $a^2x^2+bx+c$.　　10. $\frac{c}{x}$.　　11. $\frac{a}{x^3}$.

12. $\frac{x^3+ax^2+b}{x}$.　　13. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b}{x}$.　　14. $px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}$.

15. $1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}$.　　16. $\frac{x^{10}}{\underline{|10}}-\frac{x^9}{\underline{|9}}+\frac{x^8}{\underline{|8}}$.

17 $\frac{x^n}{\underline{|n}}+\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}+\frac{x^{n-2}}{\underline{|n-2}}$.　　18. $x^{-3}+x^{-1}$.

19. $(1+x)(1+2x)$.　　20. $(x+1)(x+1)$.

21. $\frac{a-x}{x}$.　22. $(1+x)^2$.　23. $\frac{1}{2x^2}$.

24. $\frac{ax+b}{\sqrt{x}}$.　25. $\frac{t^3}{3}+\frac{at^2}{2}+bt+c$.　26. $\frac{2\sqrt{x}}{7}$.

27. $\frac{1+x}{x^2}$.　28. $\frac{(1+x)^2}{x}$.　29. $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

30. $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.　31. $x-\frac{1}{x}$.　32. $\frac{x^3-1}{x}$.

33. $4t(t-1)$.　34. $a+bt+\frac{c}{t}$.

**§6. 疊次微分係數** $\frac{dy}{dx}$之微分係數寫作

$\frac{d^2y}{dx^2}$.〔讀爲 $d$ 二 $y$ 對於 $dx$ 平方〕,

稱爲 $y$ 之**第二微分係數**,或**第二導來式**,或**第二導來函數**.

仿此$\frac{d^2y}{dx^2}$之微分係數寫作$\frac{d^3y}{dx^3}$,稱爲 $y$ 之**第三導來式**.

$f(x)$之第一導來式或第一微分係數記以$f'(x)$.

" " " 二 " " " " " 二 " " " " " " $f''(x)$.

" " " 三 " " " " " 三 " " " " " " $f'''(x)$.

例題　若 $y=6x^4-4x^3+3x^2-x+4$

$$\frac{dy}{dx}=24x^3-12x^2+6x-1.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=72x^2-24x+6.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=144x-24.$$

## 習題一$_d$

求下列之第二導來式.

1. $ax^2+6x+c$.  2. $(x+2)(x-3)$.  3. $x^3-3x^2$.

4. $\frac{x^n}{n}-\frac{6x^{n-1}}{n-1}+\frac{7x^{n-2}}{n-2}$.

5. $\frac{x^n}{n(n-1)}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)}+\frac{x^{n-2}}{(n-2)(n-3)}$.

求下列之第三導來式.

6. $1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}$.  7. $\frac{x^6}{\underline{|6}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}-\frac{x^8}{\underline{|8}}-\frac{x^9}{\underline{|9}}$.

8. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$.

9. 若$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$, 求$\frac{d^2s}{dt^2}$, $u$ 與 $f$ 爲常數.

# 第二章

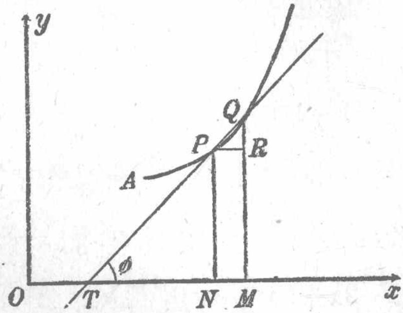
## $\frac{dy}{dx}$ 之幾何解釋

§7. 凡曾習解析幾何學之讀者必知以下之定義.

若一曲線上任何點之切線與 $x$ 軸之 $OX$ 正向所成角爲 $\phi$, 則 $\tan\phi$ 謂之此切線之斜率或斜度.

〔工程師亦常用斜度代表 $\phi$ 角之正弦.〕

設 $P, Q$ 爲曲線 $APQ$ 上彼此相鄰之二點.




圖一

設 $(x, y)$ 爲 $P$ 之坐標, $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ 爲 $Q$ 之坐標.

作縱坐標 $PN, QM$, 又作 $PR$ 平行於 $ox$, 遇 $QM$ 於 $R$, 則 $QR=\triangle y$, 而 $PR=\triangle x$. 連 $PQ$, 向兩端延長,使遇 $ox$ 於 $T$

由是 $\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{QR}{PR}=\tan QPR=\tan PTN$.

至極限時, $Q$ 無限漸近於 $P$, 則 $TPQ$ 成爲此曲線之切線,故 $\tan PTN$ 成爲此切線之斜率.

又至極限時 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ 成爲 $\frac{dy}{dx}$.