

高等学校教学用书

概 率 論 教 程

Б. В. 格涅坚科 著

丁 寿 田 譯

人 民 教 育 出 版 社

清华大学图书馆

501477

高等学校教学用书



概 率 论 教 程

B. B. 格涅坚科 著

丁 寿 田 译

0.211

05/110

11

人民教育出版社

本书是根据苏联国立科学技术理论书籍出版社 (Гостехиздат) 出版的格涅坚科 (В. В. Гнеденко) 著“概率论教程” (Курс теории вероятностей) 的1950年初版译出并根据其1954年修订版改译的。原书经苏联高等教育部审定为国立大学教科书。

概 率 论 教 程

В. В. 格涅坚科著

丁寿田译

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版 (北京景山东街)

京·华·印·书·局·印·装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号K13010·177 开本850×1168¹/₃₂ 印张14¹/₁₆

字数370,000 印数65,501—68,000 定价(6)¥1.30

1956年7月第1版 1962年4月北京第12次印刷

目 次

再版序.....	7
初版序.....	8
緒論.....	9
第一章 概 率 的 概 念	15
§ 1. 必然事件、不可能事件、或然事件.....	15
§ 2. 对于概率定义的种种见解	18
§ 3. 事件体(域)	21
§ 4. 概率的古典定义	25
§ 5. 例	29
§ 6. 几何概率	36
§ 7. 概率的统计定义	42
§ 8. 概率论的公理化结构	48
§ 9. 条件概率及其最简单的基本公式	54
§ 10. 雜例	63
習題	71
第二章 独立試驗叙列	74
§ 11. 概率 $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$	75
§ 12. 局部極限定理	79
§ 13. 积分極限定理	88
§ 14. 德莫哇佛尔-拉普拉斯积分定理的应用	100
§ 15. 普哇松定理.....	105
§ 16. 独立試驗概型例解.....	111
習題.....	114
第三章 馬尔科夫連鎖	117
§ 17. 馬尔科夫連鎖的定义.....	117
§ 18. 轉移陣.....	118
§ 19. 关于極限概率的定理.....	120
習題.....	123

第四章 随机变数与分布函数	125
§ 20. 分布函数的基本性質	125
§ 21. 連續分布与离散分布	132
§ 22. 多元分布函数	136
§ 23. 随机变数的函数	145
§ 24. 斯蒂尔脫耶斯積分	158
習題	163
第五章 随机变数的数字表征	167
§ 25. 数学期望	167
§ 26. 方差	173
§ 27. 关于数学期望与方差的定理	179
§ 28. 柯尔莫哥洛夫公理論中数学期望的定义	186
§ 29. 矩(势量)	189
習題	195
第六章 大数定律	198
§ 30. 大量現象与大数定律	198
§ 31. 大数定律的車貝謝夫的形式	201
§ 32. 大数定律的必要而充分的条件	209
§ 33. 加强大数定律	213
習題	223
第七章 特征函数	224
§ 34. 特征函数定义及其最簡單的性質	224
§ 35. 逆轉公式及惟一性定理	229
§ 36. 海未氏定理	235
§ 37. 特征函数的極限定理	240
§ 38. 正定函数	245
§ 39. 多度随机变数的特征函数	251
習題	257
第八章 古典極限定理	260
§ 40. 問題的提出	260
§ 41. 李亞普諾夫定理	263
§ 42. 局部極限定理	269

習題	273
第九章 無窮可分分布律的理論	273
§ 43. 無窮可分律及其基本性質	273
§ 44. 無窮可分律的典型表示法	281
§ 45. 無窮可分律的極限定理	287
§ 46. 关于和的極限定理問題的提出	290
§ 47. 和的極限定理	291
§ 48. 向正态律及普哇松律收斂的条件	295
習題	298
第十章 斯篤哈斯諦过程論	300
§ 49. 引言	300
§ 50. 条件分布函数及貝叶斯公式	302
§ 51. 廣馬爾科夫方程式	306
§ 52. 連續随机过程 柯尔莫哥洛夫方程式	307
§ 53. 純不連續随机过程 柯尔莫哥洛夫-費拉方程式	317
§ 54. 帶独立增量的均匀随机过程	324
§ 55. 平穩随机过程的概念 欣斤相关系数定理	332
§ 56. 斯篤哈斯諦积分的概念 平穩过程的譜分解	340
§ 57. 柏克賀夫-欣斤的埃尔过得定理	344
第十一章 統計学要領	349
§ 58. 数理統計学的基本問題	349
§ 59. 变異叙列(变叙)及經驗分布函数	352
§ 60. 格利汶科定理及柯尔莫哥洛夫拟合优度准則	354
§ 61. 概率分布不变性的測驗	359
§ 62. 臨界区域的概念 第一種錯誤和第二種錯誤 两个統計假設的比較	365
§ 63. 分布变参数的古典估值法	373
§ 64. 置信限	384
概率論簡史	391
函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 数值表	422

函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 数值表 423

函数 $P_k(a) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$ 数值表 424

函数 $\sum_{m=0}^k \frac{a^m e^{-a}}{m!}$ 数值表 426

函数 $P(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_x^\infty z^{k-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 数值表 428

函数 $S(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{z^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dz$ 数值表 432

函数 $K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$ 数值表 434

文献 436

俄華術語对照表 444

再 版 序

这一版有很大的变动。大家对本书初版的意見，在刊物上發表的以及口头或書面提出的，我都尽量考慮过了。最重要的变化或許就是在前九章里添了習題。其次是，我裁去了書尾那兩個数学方面的附錄，而把附錄 1 編入了正文第一、四、五各章里去；同时在这几章里还有一些別的改变。第十章里則有很多的补充，主要的是擴充了平穩随机过程論的知識。数理統計一章也有很大的变动。在这章里增添了一些新節目，同时也删去了一些旧材料。例如，关于經驗分布与真实分布間極大离差的極限分布，那一个柯尔莫哥洛夫定理的繁重証明删去了；序貫分析一節也删去了。此外，所有在初版里的疏漏和明顯錯誤，只要注意到的，現在都已校正。

有些同志对本書缺点提了坦白的意見而帮助了本書的修訂。我在此恳切地向他們表示感謝。我特別感謝林尼克同志 (Ю. В. Линник)，因为他对本書經常地表示关切，对初版給了很多的批評，并且对再版的稿子進行了商榷。

我知道本書現在这样也还是不免有缺点的，所以請求讀者对这第二版的缺点仍不吝指教，并請对其內容和材料的布置表示意見。如果讀者肯惠予有趣的習題，以便此后在这教本里采用，那就更为感激了。

Б. 格涅坚科

初 版 序

这部教程分兩部分——初等部分（第一章至第六章）与專門部分（第七章至第十一章）。最后五章可以作随机变数求和論、斯篤哈斯諦过程論（中的过程論^①）、数理統計学要領等專門教程的基礎。

概率論在本書中只当作一种数学学科來看，所以它本身的目的并非要獲得一些自然科学或技術的結果。此書本文中所有实例，目的都只是要說明这理論的一般原理并且指示这些原理与自然科学問題的連系。当然，这些实例也同时指明一般理論結果的可能应用範圍，并且培养应用这些結果到具体問題上去的能力。这是好的，如果学概率論时眼前有某种物質世界的現象，使得一般的数学框架里填入了某种确定的意义。循这样途徑去學習讀者能形成一种特殊的概率論的直觀，如此可以在应用解析工具前預先看到結論的一般輪廓。我們还要注意，学概率論不系統地做習題是不行的，尤其是在开始的时候。

第一章的起头四節是柯尔莫哥洛夫的未刊手稿，只稍微有些改动。

我很荣幸地在此对我敬爱的老师柯尔莫哥洛夫和欣斤兩位先生表示感謝。他們关于概率論中心問題的意見和談話給我很多的帮助。

B. 格涅坚科

① 斯篤哈斯諦是希臘文 $\sigma\tau\omicron\chi\alpha\sigma\tau\iota\varsigma$ 一字的音譯，原字是“中的”（打中目标）的意思。
——譯者注。

緒 論

這部書的目的是要講概率論這一門研究或然現象規律性的數理科學的基本原理。

概率論的發源乃屬十七世紀中葉的事情，並且是與惠根斯、巴斯加爾、費爾馬及雅谷·貝努里諸人的名字分不開的。由於賭徒們所提出的一些當時還未能歸入數學範圍的問題，引起了巴斯加爾和費爾馬的通信討論，就在這裡面逐漸結晶出了像概率及數学期望等如此重要的概念。同時我們當然應該明白，這幾位杰出的學者在從事賭博問題中也已預料到這門研究或然現象的科學將起重要的自然哲學的作用。他們相信在大量或然事件的基礎上能發生明確的規律性。可是由於當時自然科學發展水平不高，所以賭博還長時期繼續成為建立概率論概念和方法時所憑借的惟一具體材料。也正是因为這種情況，故解決概率論問題所用的正式數學工具只不過是初等算術的及配列論的方法。概率論後來的發展，以及它的結果和研究方法的被廣泛吸收到自然科學里去——尤其是物理學里——表明古典概念和古典方法現在仍未失去它的興趣。

自然科學方面（觀察誤差的理論、射擊論問題、統計學問題——尤其是人口統計問題）的迫切要求使概率論有繼續發展的必要並且有引用更發達的解析工具的必要。在概率論解析方法的發展中，特別重要的角色是德莫娃佛爾、拉普拉斯、高斯、普哇松諸氏。由純解析方面來說，與這方向有關的還有非歐幾何創始者羅巴契夫斯基的一種講球面上量度誤差理論的並且建立描述宇宙的幾何體系的著作。

由十九世紀中葉大約至本世紀初二十年間，概率論的發展特別是與車貝謝夫（П. Л. Чебышев）、馬爾科夫（А. А. Марков）及李亞普諾夫

(А. М. Ляпунов) 諸俄罗斯学者的名字分不开的。俄罗斯科学的这种成就就是布尼亞科夫斯基(В. Я. Бунаковский)所培养的,他廣泛地在俄罗斯推行把概率論应用到統計学上去的研究——特別是应用到保險事業和人口統計上去的研究。他寫了俄罗斯第一部概率論教程,这对概率論在俄罗斯的兴趣的發展給了很大的影响。車貝謝夫、馬尔科夫和李亞普諾夫在概率論中的貢獻的主要永久性意义在随机变数概念的導入及其廣泛的应用。車貝謝夫关于大数定律的結果,“馬尔科夫連鎖”及李亞普諾夫極限定理我們將在本書相应部門中細講。

概率論在我們这时代的發展,其特点是对它的兴趣的普遍高漲,以及它的实际应用范围的擴大。在这緊張的科学工作中苏联概率論学派繼續占有突出的地位;如果說到一般的問題,則在它們的發展中苏联概率論学派簡直占第一位。在苏联学者的代表人物中首先應該提起別倫師謙(С. Н. Бернштейн)、柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)和欣斤(А. Я. Хинчин)諸人的名字。在講述过程中由于問題的本質我們必然要把讀者引到苏联学者的改变概率論面貌的概念和結果的道路上去。如此,在第一章我們就要說到別倫師謙和柯尔莫哥洛夫对概率論的奠基的基本工作。在我們这世紀的头二十年里,欣斤、柯尔莫哥洛夫、斯盧茨基(Е. Е. Слуцкий)及列維(P. Lévy)建立了概率論与度量函数論間的密切連系。这連系是很富于成果的。在这途徑上达成了車貝謝夫已經提出过的古典問題的徹底解决,并且大大推廣了概率論的内容。完全屬於蘇維埃时代的是三十年來柯尔莫哥洛夫和欣斤所創立的斯篤哈斯諦过程論(中的过程論,随机过程論或机变过程論),这种理論現在已成為概率論中的基本研究方向。在此数学家掌握了自然科学上關鍵問題的物理本質而給它找到了適當的数学語言。故这种理論可以說是数学思想与自然科学思想的有机綜合的一个極好的典型例子。我們很要注意,概率論古典問題的解决是密切連系着斯篤哈斯諦过程的。概率論的这一重要新節目將在本書第十章里講其概要。最后我們要提到一

个(大半由 A. H. 柯尔莫哥洛夫和 H. B. 斯米尔諾夫所建立的)数理統計新部門,叫做“統計學非參變問題”。关于这科学部門的內容將在 § 58—61 里講一些概念。

一般地應該說,最近一百年間概率論的蓬勃發展是不斷連系着俄罗斯科学的傳統和成就,而現在是連系着苏維埃科学的成就的。并且不僅是一些新的基本定理是我們苏联人所証明的,概率論發展的新道路也是我們苏联人所开辟的。現在任何有价值的概率論書籍或論文沒有不根据或引証苏联作家的著作的,由这一点已可判断苏联学者的工作在当代概率論發展上的影响如何了。

最近数十年間概率論在自然科学中的地位更無比地提高了。在物質構造的分子概念獲得了普遍承認后,概率論在物理学和化学中的廣泛应用就成了不可避免的事情。我們要注意,由分子物理学的观点看來每一物体都由無數小質点所組成,而这些質点是不断运动着并且在运动过程中彼此影响着的。同时对于这些質点的性質,对于其間所存在的相互作用、其运动的性質等等我們知道得很少。基本上我們所知道的只是这些組成物体的質点为数甚多并且在均匀物体中这些質点性質上是相近的。自然,在这情況下尋常適用於物理理論的数学研究方法是沒有力量的了。例如,在所說这情况中微分方程工具就不能达到重大的結果。事实上,物質的構造及物体質点間相互作用的規律都不能充分研究,而在这情況下应用微分方程工具是不免牽强的。但即使这困难不存在,單是这些質点的数量也已經使运动的研究如此困难,这要靠尋常力学方程式來克服是不可能的。

况且,在方法論上这种途徑也是不能令人滿意的。事实上,这里所發生的問題不是在研究質点的个别运动,而在研究那些發生于运动着并交互作用着的大数質点的总体中的規律。这些因参与的分子的集体性而發生的規律自有其固有的特征,而不能归結为个别运动的單純相加。并且,这些規律在某种限度內是和發生这些規律时所参与的質点

的个别特殊性無關的。自然，为了研究这些新規律應該也找出適當的新的数学研究方法。对这些方法究竟首先应提出什么要求呢？顯然，对它們首先应估計到所研究的現象是集体性的；因此，对于这些方法說不應該因为有大量相互作用着的質点存在而添加困难，这反而可以使所發生的規律更容易研究。其次，关于質点的性質和構造的知識的不充分以及关于它們相互作用的性質的知識的不充分也不應該影响其应用的效率。概率論方法最能滿足这些要求。

为了对上面所說的不致有錯誤的理解，我們再一度強調下面这种情况。在說概率論工具比較適宜于研究分子現象时，我們絕不是要說，自然科学中应用概率論的哲学前提是在“知識的不充分”。基本的原則在此：研究集体現象时發生特殊的新規律。在研究被大量分子的作用制約着的現象时，不需要計及每个分子的一切性質。事实上，在研究自然界的現象时必须撇开不关重要的細節。考慮所有細節，所有存在着的連系，对当前現象不关重要的連系也一包在內，这样只会使現象本身被蒙蔽，而因为这种人为的复雜化情况耽誤了我們对現象的掌握。馬克思主义的經典著作屢次強調这种情况。

要看現象的概型化做得如何成功，它的研究所需数学工具選擇得如何成功，这我們可按理論与經驗或理論与实际的符合性來判断。自然科学的發展，特別是物理学的發展，告訴我們概率論这种工具是很適用于研究許多自然現象的。

上面所說概率論与現代物理的要求的連系最可以說明为什么最近几十年來概率論变成了一种發展最快的数学部門。新的理論結果給自然科学創造应用概率論方法的新可能性。自然現象的全面研究推动概率論去找由偶然性產生的新規律。概率論不和別种科学的需要相隔絕，而和自然科学的一般發展取一致的步調。顯然，这并不是說概率論只是解决某些实际問題的輔助工具。相反地，應該強調，最近三十年來概率論变成了一种嚴整的数学学科，具有其自己的問題和証明方法。同时

判明了，概率論的最重要的問題也恰好能有助于自然科学上种种問題的解決。

我們一开始就把概率論下定义为研究或然現象的科学。“或然現象(事件)”这概念的意义到第一章再細講。我們目下只說几句话。虽然在尋常的觀念中，在日常的实务中，往往認為或然事件是極稀少的，是違反事物确定秩序的，是違反事件規律性發展的，但在概率論中我們并不采取这样的看法。按概率論里的理解，或然事件具有一系列的特征；特别是，它們都在集体現象中發生。所謂集体現象(大量現象)我們理解为在大量平等的或几乎平等的事物总体中所發生的，并且即由現象的这种集体性質所决定而与个别成分的本性只有很少的关系。

我們要注意，概率論整个發展过程告訴我們，它的概念和要旨是在唯物概念与唯心概念的多么激烈的斗争中結晶出來的。一方面是 J. 貝努里，拉普拉斯，罗巴契夫斯基，車貝謝夫，馬尔科夫及过去許多別的卓越学者的自發的唯物看法。另一方面是許多数学家和統計学家 (K. 皮尔遜，П. A. 涅克拉索夫，R. 封·米賽斯等) 的公开的唯心主張。這兩方面的斗争現在仍繼續着。由米賽斯概率定义这个例子可以看出，与苏联学者在馬克思列宁主义指导下發展出來的看法对立着有唯心論的結構，它們有时很苦心地用“經驗”“實踐”“自然科学”等等字眼作掩护。

概率論，和別的数学部門相似，是由实际要求發展出來的；它以抽象的形式反映着集体性或然事件所特有的規律。这些規律在物理学及其他自然科学部門，軍事，各种技術学科，經濟学等等中起非常重大的作用。最近連系着大規模生產企業的廣大發展，概率論結果不但用來檢出既成產物的廢品，而更重要的是应用在生產过程本身的組織上(生產中的統計控制)。

如上面所指出，概率論与实际需要的連系是它在最近三十年間蓬勃發展的主要原因。它的許多部門都是剛剛連系着解決实际問題而發展的。在此順便重提一下我國概率論學派奠基者 П. Л. 車貝謝夫氏这

句名言：“理論与实际的接近是最有益处的，——得到好处的不僅是实际，科学本身也受实际的影响而發展。实际可以給科学开发新的研究对象或在早已知道的对象中开发新的方面……。理論如果由于旧方法的新应用或由其新發展而多有所獲，則由于新方法的开发將有更多的收获，并且在这場合科学給它自己在实际中找到了正确的引路者。”

第一章 概率的概念

§ 1. 必然事件、不可能事件、或然事件

在观察和实验的基础上，科学可以得出被研究的现象所遵循的规律。我們所能建立的科学规律，其最简单最普遍的概型(схема)如下：

1. 只要一組条件 $\odot$ 一实现，則事件 A 必定發生。

例如，水在 760 公厘大气压力之下热到攝氏 100° 以上（条件組 $\odot$ ），則化为蒸汽（事件 A ）。或另举一例：任何物質進行任何化学变化时，如果与周围环境沒有物質的交流（条件組 $\odot$ ），則物質总質量保持不变（事件 A ）。这一論断叫做“物質不滅定律”。讀者容易自己由物理学、化学、生物学及其他科学中指出另一些这类规律的实例。

一个事件，如果它在条件組 $\odot$ 每次实现之下不可避免地要發生，則叫做必然事件。一个事件 A ，如果在条件組 $\odot$ 的每次实现之下恒不發生，則称为不可能事件。一个事件 A ，如果在条件組 $\odot$ 的实现之下可以發生也可以不發生，則称为或然事件（偶然事件，随机事件）。

由这些定义可以明白，在說某事件的必然性、不可能性或偶然性时，我們总是連系着某个一定的条件組而言的。

命題 1 說的是在条件組 $\odot$ 实现之下事件 A 的必然性。至于說在条件組 $\odot$ 实现之下某事件不可能，則这本質上并不是一个新的命題，因为它很容易化为类型 1：事件 A 的不可能性就与对立事件 $\bar{A}$ 的必然性等价，而这所謂事件 $\bar{A}$ 就是事件 A 不發生。

光是断言某事件的或然性，这种命題的認識价值是有限的：它只是指明条件組 $\odot$ 不反映事件 A 出現的全部必要而充分的原因。但这样指明某事件的或然性也不能看作是完全沒有意义的，因为它可以刺戟我們來進一步研究事件 A 的出現条件，只是它本身还未給我們肯定的

知識。

但有許多這樣的現象：在條件組 $\odot$ 多次實現之下事件 A 發生的次數的百分率與某平均數字很接近，其差異只間或有相當大的數值，如此，該數就可以當作對事件 A 的大量手續（條件 $\odot$ 的多次重複）的示性指標。

對上面所說的現象不只是能單純斷定事件 A 的或然性，並且也能對其出現可能性作數量的估值。這估值法可以用這樣形狀的命題表示出來：

2. 在條件組 $\odot$ 實現之下事件 A 發生的概率等於 p 。

這第二類規律叫做概率性規律或斯篤哈斯諦規律（中的式規律）。概率性規律在很多科學部門中占重要的地位。例如，沒有方法可預言某一個鐳原子在某一段時間內是否蛻變（裂變），但可以根据實驗資料來決定這蛻變的概率：鐳原子在 t 年這段時間內蛻變的概率是

$$p = 1 - e^{-0.000436t}.$$

在這例中條件組 $\odot$ 就是“所考慮的鐳原子在所指定這段時間內不受任何不尋常的外來影響，像受高速質點的轟擊之類，而其他方面的條件就不關重要了：在什麼環境之下，在什麼溫度之下，諸如此類的情況是不重要的”。事件 A 就是“這原子在所指定的 t 年這時期內蛻變”。

現在我們很自然地會想到：在某些條件之下或然現象 A 的概率可以用某一個數

$$p = P(A)$$

作其數量的估值，這最初在十七世紀費爾馬（1601—1665），巴斯加爾（1623—1662），惠根斯（1629—1695）並且特別是 J. 貝努里（1654—1705）輩的著作中得到了系統的發展。他們的研究也就奠定了概率論的基礎。由那時起概率論成為一門數學學科不斷地發展着，內容也就日新月異地充實起來。它的应用到種種現實現象的研究上去的可能性也得到了層出不窮的輝煌證明。