主编　郭业才
阮怀林

随机信号分析

SUIJI XINHAO FENXI

合肥工业大学出版社

随机信号分析

主　编　郭业才　阮怀林
副主编　韩迎鸽　柴立功　樊甫华

合肥工业大学出版社

内容提要

本书系统介绍了随机信号的特点和分析方法。主要内容有：随机信号基础，随机过程的基本概念、统计特性及几种典型常用的随机过程，平稳随机过程的时域与频域分析方法，随机信号通过线性系统与非线性系统的分析方法，非平稳随机过程的分析方法。每章都有相应的MATLAB仿真实例与习题，内容组织体现了“重视基础、强调实践、突出理论与实践相结合”的教学原则。

本书可作为高等学校电子、通信、信息工程、光电子和应用数学等专业高年级本科生和研究生的教材及工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/郭业才等著．—合肥：合肥工业大学出版社，2009.8

ISBN 978－7－81093－978－2

Ⅰ．随…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．随机信号—信号分析—中国　Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 085108 号

随机信号分析

主编　郭业才　阮怀林　　　　责任编辑　陆向军

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2009 年 8 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551－2903038	印　张	14.5
	发行部：0551－2903198	字　数	352 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	中国科学技术大学印刷厂
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发　行	全国新华书店

ISBN 978－7－81093－978－2　　　　定价：25.00 元

前　　言

随机信号分析是以随机信号的特点和分析方法为研究对象，为目标检测、信号估计与滤波等信号处理理论的基础，在通信、雷达、自动控制、图像处理、气象预报、生物医学、地震信号处理等领域有着广泛的应用。随着信息技术的发展，其理论和应用将日益广泛和深入。

本书是编者在多年教学实践积累的基础上编写的。目的是使读者通过本课程的学习，掌握随机信号分析的基本理论和系统的分析方法。在教材内容的组织上，先介绍平稳随机信号的特点与分析方法，再介绍非平稳随机信号的特点与分析方法；先介绍随机信号的时域分析方法，再介绍随机信号的频域分析方法；先介绍随机信号通过线性系统的分析方法，再介绍随机信号通过非线性系统的分析方法；先阐述基本概念、基本理论与基本方法，再阐述理论与方法的应用，并给出 MATLAB 仿真实例。教材内容的这种组织方式，体现了“重视基础、强调实践、突出理论与实践相结合”的教学原则。

本书共分七章，第 1 章首先介绍了概率论的基本知识，为后面的学习奠定基础。第 2 章介绍随机过程的基本概念、随机过程的统计特性、平稳随机过程与各态历经性及几种典型常用的随机过程。第 3 章介绍平稳实随机过程及复随机过程的功率谱密度、联合平稳随机过程的互功率谱密度。第 4 章讨论窄带随机过程的物理模型和数学模型，分析窄带随机过程的统计特性与性质及窄带随机过程经包络检波器和平方律检波器后统计特性的变化。第 5 章讨论了随机信号通过线性系统输出信号的概率分布计算问题。第 6 章讨论了随机信号通过非线性系统分析的直接法、特征函数法、级数展开法和包络法。第 7 章介绍了随机过程的高阶统计量及其高阶谱，讨论了循环平稳过程及其循环谱问题。

本书由郭业才、阮怀林、韩迎鸽、柴立功、樊甫华合作编写，其中，第 1 章及第 7 章的第 7.2 与 7.3 节由阮怀林、柴立功、樊甫华共同编写；第 2 章由韩迎鸽编写；第 3 章由柴立功、阮怀林共同编写；第 4 章、第 6 章及第 7 章的第 7.1 节由郭业才编写；第 5 章由樊甫华、阮怀林共同编写；最后由郭业才、阮怀林负责全书的统稿工作。

在本书的编写过程中，得到了许多同志的大力支持与帮助，合肥工业大学出版社为本书的出版给予了大力支持，在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，难免有不少谬误和疏漏，恳请读者给予批评指正。

编　者

2009 年 8 月

目　录

第 1 章　随机信号基础

本章的目的是在工科院校已学过概率论的基础上，建立客观事物及其概率的数学模型。从而在已学概率论的基础上对随机现象本质的理解达到进一步的深化。

随机信号分析的基础是概率论。本章将对随机变量的概念、分布、数字特征等与随机信号分析密切相关的特性进行概括性描述。

1.1　概率论的基本术语

1.1.1　随机试验、样本空间

1. 随机试验

试验可以包括各种各样的科学实验，甚至将对某一事物的某个特征的观察也称之为试验。为了研究随机现象的统计规律性，常要做一些与这类现象有联系的观察或试验。这里所说的试验都是指随机试验。例如：

$E1$：抛一枚硬币，观察其正面 H、反面 T 出现的情况（经典的随机试验）；

$E2$：从一批灯泡中，任意抽取一只，测试它的寿命；

$E3$：记录某地 24 小时内的最高和最低气温；

$E4$：观察同一门炮向同一目标射击的弹着点。

这些试验的例子，有如下的共同特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且可以预知试验的所有可能结果；

(3) 试验之前，不能确定会出现哪一个结果。

我们把具有上述三个特点的试验称为随机试验。

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称之为随机现象。

2. 样本空间

虽然在进行随机试验之前，我们不能确定其结果，但是试验的全部可能结果是已知的。我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S。样本空间中的元素，也就是随机试验 E 的一个结果，称为样本点。

按照这个定义，前面的 4 个示例的样本空间分别为：

$S1$：$\{H,T\}$；

$S2$：$\{t \mid t \geqslant 0\}$；

$S3$：$\{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，$x$ 为最低气温，y 为最高气温，并假设它们在 T_0 到 T_1 之间；

$S4$：$\{d \mid d \in D\}$，d 为弹着区域，并假设它包含于 D。

1.1.2 随机事件、事件的概率及独立性

1. 随机事件

在进行随机试验的时候，我们往往关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合。例如，如果规定灯泡的寿命小于500小时为次品，则在试验$E2$中，我们关心的通常是寿命$t \geqslant 500$的灯泡有多少。

一般的，我们把试验E的样本空间S的子集称为E的随机事件，简称事件。如果在试验中，该子集的样本点出现，则称该事件发生。

子集的组成规则是任意的。例如在$E2$中可以研究$\{t \mid t \geqslant 500\}$也可以研究$\{t \mid t \geqslant 600\}$或$\{t \mid t \leqslant 400\}$。

基本事件：由一个样本点组成的单点集。

必然事件：在每次试验时必然发生的事件。样本空间S是自身的子集。

不可能事件：在每次试验时都不会发生。空集$\varnothing$是S的子集，但是不包含任何样本点。

2. 事件的关系

包含：如果事件A发生必然导致事件B发生，则称B包含了A，记为$A \subset B$或$B \supset A$；

并(或和)：事件A与B中至少有一个发生，记为$A \cup B$；

交(或积)：事件A与B同时发生，记为$A \cap B$(或AB)；

差：事件A发生，而事件B不发生，记为$A - B$；

不相容：若事件A与事件B不能同时发生，即$AB = \varnothing$，则称事件A与B互不相容；

对立(互逆)：若A是一个事件，称$\overline{A}$是A的对立事件(或逆事件)。容易知道，$A\overline{A} = \phi$，$A \cup \overline{A} = S$。

3. 事件的概率

定义：随机事件A发生可能性大小的度量(数值)，称为A发生的概率，记为$P(A)$。

概率具有下述性质：

【性质1】 对于每一个事件A，有$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

【性质2】 $P(S) = 1$；$P(\varnothing) = 0$；

【性质3】 有限可加性：若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

【性质4】 设A, B是两个事件，若$A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geqslant P(A)$$

【性质5】 对于任一事件A，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

【性质6】 对于任意两事件A和B，有$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。

4. 事件的独立性

这里我们首先介绍条件概率的定义，然后，借助于条件概率来讨论事件的独立性。

条件概率：设A, B是两个事件，且$P(A) > 0$，称$P(B \mid A) = P(AB)/P(A)$为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率。

条件概率重要性质：$P(ABC) = P(C \mid AB)P(B \mid A)P(A)$。

全概率公式：设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2\cdots,n)$，则有

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式：设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2\cdots,n)$，则有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}$$

独立事件：设 A，B 是两个事件，如果具有等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A，B 为相互独立的事件。

定理：设 A，B 是两个事件，且 $P(A)>0$。若 A，B 相互独立，则 $P(B\mid A)=P(B)$。反之亦然。

n 个事件相互独立：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，具有等式 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件。

1.2　随机变量及其分布

为了全面地研究随机试验的结果，揭示客观存在着的统计规律性，我们将随机试验的结果与实数对应起来，将随机试验的结果数量化，引入随机变量的概念。

1.2.1　一维随机变量的分布函数与概率密度

1. 随机变量定义

设有随机试验 E，其样本空间为 $S=\{e_i\}$。如果对于每一个 $e_i\in S$，都有一个实数 $X(e_i)$ 与之对应，则对所有的元素 $e\in S$，就得到一个定义在样本空间 S 上的实单值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为随机变量，简写为 X。

2. 随机变量分类

（1）根据变量的取值来分

离散随机变量：其全部可能取到的值是有限多个或可列无限多个；

非离散(型)随机变量：其取值是不可列的。

在非离散型随机变量里面，我们主要研究的是连续随机变量。

（2）根据变量的维数来分

一维、二维和多维随机变量。

3. 一维随机变量分布函数

设 X 为一个随机变量，x 是任意实数，定义 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\tag{1.2.1}$$

如果把一维随机变量 X 看成是数轴上的一个随机点的坐标，那么，分布函数 $F(x)$ 在 x 处

的函数值，就表示了 X 落在区间 $(-\infty, x)$ 上的概率。

从上述定义可知，分布函数这个概念既适用于连续型随机变量，也适用于离散型随机变量。

概率分布函数性质：

【性质 1】 $F(x)$ 是 x 的单调非减函数，即对于 $x_2 > x_1$，有

$$F(x_2) \geqslant F(x_1) \tag{1.2.2}$$

【性质 2】 $F(x)$ 为非负值，且取值满足

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \tag{1.2.3}$$

而且 $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$，$F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$；

【性质 3】 随机变量在 x_1, x_2 区间内的概率为

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) \tag{1.2.4}$$

【性质 4】 $F(x)$ 是右连续，即

$$F(x^+) = F(x) \tag{1.2.5}$$

离散随机变量的分布函数除满足以上性质外，还具有阶梯形式，阶跃的高度等于随机变量在该点的概率，即

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, u(x - x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i u(x - x_i) \tag{1.2.6}$$

式中，$u(x)$ 为单位阶跃函数，P_i 为 $X = x_i$ 的概率。

4. 一维随机变量概率密度函数

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，则称 X 为连续型随机变量，其中，函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度。

由定义中的积分式可知，连续型随机变量的分布函数是连续函数。

概率密度函数性质：

【性质 1】 概率密度函数为非负的，即

$$f(x) \geqslant 0 \tag{1.2.7}$$

【性质 2】 概率密度函数在整个取值区间积分为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.2.8}$$

【性质 3】 概率密度函数在 (x_1, x_2) 区间积分，给出该区间的概率，即

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.2.9}$$

对于连续型随机变量有 $P\{X=a\}=0$，而事件 $\{X=a\}$ 并非是不可能事件。就是说，若 A 是

不可能事件，则有 $P(A)=0$；反之，若 $P(A)=0$，并不意味着 A 一定是不可能事件。

从前面对离散型随机变量分布函数的讨论可知，在定义冲激函数 $\delta(x)$ 后，则离散型随机变量的概率密度为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)\delta(x-x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\delta(x-x_i) \tag{1.2.10}$$

1.2.2　多维随机变量的分布函数及概率密度

设 E 是一个随机试验，它的样本空间为 $S\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫做二维随机变量（或二维随机向量）。类推可以定义 n 维随机变量。

多维随机变量的性质，不仅与每一个随机变量有关，而且还依赖于这些随机变量之间的相互关系。

1. 二维随机变量分布函数及概率密度

(1) 分布函数

$$F_{XY}(x,y)=P\{(X\leqslant x)\cap(Y\leqslant y)\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\} \tag{1.2.11}$$

(2) 概率密度

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F_{XY}(x,y)$，如果存在非负函数 $f_{XY}(x,y)$，使得对于任意 x,y，有 $F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，则称 (X,Y) 是连续型二维随机变量，称函数 $f_{XY}(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，或称之为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度。

(3) 概率密度 $f_{XY}(x,y)$ 的性质

【性质 1】　二维概率密度为非负的，即

$$f_{XY}(x,y)\geqslant 0 \tag{1.2.12}$$

【性质 2】　二维概率密度在整个取值区域积分为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=F_{XY}(\infty,\infty)=1 \tag{1.2.13}$$

【性质 3】　设 D 是 XOY 平面上的一个区域，点 (X,Y) 落在 D 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.2.14}$$

【性质 4】　若 $f_{XY}(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则有

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}=f_{XY}(x,y) \tag{1.2.15}$$

(4) 边缘分布

二维随机变量 (X,Y) 作为一个整体，具有分布函数 $F_{XY}(x,y)$。而 X 和 Y 都是随机变量，也有各自的分布函数，将它们分别记为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，依次称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数。边缘分布函数可以由 (X,Y) 的分布函数 $F_{XY}(x,y)$ 按照如下关系

式进行确定：

$$F_X(x)=F_{XY}(x,\infty),\quad F_Y(y)=F_{XY}(\infty,y)$$

对于连续型随机变量(X,Y)，设它的概率密度为$f_{XY}(x,y)$，则

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{1.2.16}$$

X是一个连续型随机变量，且其概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y \tag{1.2.17}$$

同样，Y也是一个连续型随机变量，且其概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.2.18}$$

$f_X(x)$和$f_Y(y)$分别称为边缘概率密度。

(5) 条件分布和独立性

在$X\leqslant x$的条件下，随机变量Y的条件概率分布函数和条件概率密度分别为

$$F_Y(y\mid x)=\frac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)} \tag{1.2.19}$$

$$f_Y(y\mid x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.2.20}$$

若有$f_X(x\mid y)=f_X(x)$，$f_Y(y\mid x)=f_Y(y)$，则称X、Y是相互统计独立的两个随机变量。两个随机变量相互统计独立的充要条件为

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1.2.21}$$

即随机变量X,Y的二维联合概率密度等于X和Y的边缘概率密度的乘积。

2. n维随机变量分布函数及概率密度

仿照二维随机变量的情况，定义n维随机变量的n维分布函数和概率密度分别为

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\} \tag{1.2.22}$$

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1.2.23}$$

对于$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，一条重要的性质是

$$f_X(x_1,\cdots,x_m)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-m)\text{重}}f_X(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{m+1}\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.2.24}$$

可见，低维的概率密度可以由高维的概率密度通过积分而得到。

n维随机变量相互统计独立的充要条件是对所有的$x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i) \tag{1.2.25}$$

1.3　随机变量的数字特征

在实际问题中，一方面由于概率分布函数和概率密度通常不容易得到，另一方面，由于有时我们只需要关注随机变量的主要特征，如平均值和偏离平均值的程度。这样，我们就要用到随机变量的数字特征。随机变量的数字特征主要有均值、方差和相关函数等。

1.3.1　数学期望(期望、均值、统计平均、集合平均)

1. 数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=P_i$，$i=1,2,\cdots$，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i$ 绝对收敛，则称该级数的和为随机变量 X 的数学期望 $E[X]$（或 m_X），即

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i \tag{1.3.1}$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称该积分的值为随机变量 X 的数学期望 $E[X]$（或 m_X），即

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x \tag{1.3.2}$$

数学期望有着明确的物理意义：如果把概率密度 $f(x)$ 看成是 X 轴的密度，那么其数学期望便是 X 轴的几何重心。

2. 数学期望的性质

【性质 1】　设 C 是常数，则 $E[C]=C$；

【性质 2】　设 X 是一个随机变量，C 是常数，则 $E((CX)=CE(X)$；

【性质 3】　设 X,Y 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

【性质 4】　设 X,Y 是相互独立的随机变量，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

1.3.2　方差

方差表达了随机变量 X 的取值与其均值之间的偏离程度，或者说是随机变量在数学期望附近的离散程度。方差用 $D(X)$（$\mathrm{Var}(X)$ 或 σ_X^2）表示。

对于离散和连续随机变量，分别为

$$D[X]=E\{(X-E[X])^2\}=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2P_i \tag{1.3.3}$$

$$D[X]=E\{(X-E[X])^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2f(x)\mathrm{d}x \tag{1.3.4}$$

方差开方后称为标准差或均方差

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)} \tag{1.3.5}$$

方差的性质：

【性质 1】　设 C 是常数，则 $D(C)=0$；

【性质 2】　设 X 是随机变量，C 是常数，则 $D(CX)=C^2D(X)$；

【性质 3】　设 X,Y 是相互独立的随机变量，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。

数学期望的不同表现为概率密度曲线沿横轴的平移，而方差的不同则表现为概率密度曲线在数学期望附近的集中程度。

【例 1.1】　已知高斯随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$，求它的数学期望和方差。

解：根据数学期望和方差的定义

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $t=\frac{x-m}{\sigma}$，$\mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t$，代入上式并整理

$$E(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=m$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

与前面做同样的变换，即令 $t=\frac{x-m}{\sigma}$ 整理后

$$D(X)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

查数学手册的积分表，可得：

$$\int_{0}^{\infty}x^{2n}e^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

令 $n=1$ 及 $a=1/2$，利用上式的积分结果，可得

$$D(X)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sigma^2$$

可见，高斯变量的概率密度由它的数学期望和方差唯一决定。

1.3.3　矩函数

1. 矩的定义

设 X 和 Y 是随机变量，则矩的定义为

若 $m_k=E\{X^k\}$，$k=1,2\cdots$ 存在，称它为 X 的 k 阶原点矩。

若 $\mu_k=E\{[X-E(X)]^k\}$，$k=1,2\cdots$ 存在，称它为 X 的 k 阶中心矩。

若 $m_{kl}=E\{X^kY^l\}, k,l=1,2\cdots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩。

若 $\mu_{kl}=E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}, k,l=1,2\cdots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。

可见，一阶原点矩就是数学期望，二阶中心矩就是方差。

当 $k=1,l=1$ 时，二阶混合原点矩就是 X 和 Y 的相关矩，即

$$m_{11}=E\{XY\}=R_{XY} \tag{1.3.6}$$

而此时的二阶混合中心矩即为协方差，为

$$\mu_{11}=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=C_{XY} \tag{1.3.7}$$

相关矩和协方差反映了两个随机变量相互之间的关联程度。用协方差对两个随机变量各自的均方差进行归一化处理，得到相关系数

$$r_{XY}=\frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{1.3.8}$$

相关系数只反映两个随机变量的关联程度，与随机变量的数学期望和方差均无关。

【例 1.2】 随机变量 $Y=aX+b$，其中 X 为随机变量，a、b 为常数且 $a>0$，求 X 与 Y 的相关系数。

解：根据数学期望的定义，若 $E(X)=m_X$，则

$$E(Y)=E(X)+b=am_X+b=m_Y$$

先求协方差，再求相关系数

$$C_{XY}=E\{(X-E[X])(Y-E[Y])\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])(y-E[Y])f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将 $Y=aX+b, m_Y=am_X+b$ 代入，并由概率密度性质，消去 y，得到

$$C_{XY}=a\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2f_X(x)\mathrm{d}x=a\sigma_X^2$$

同理，将 $X=(Y-b)/a, m_X=(m_Y-b)/a$ 代入，并由概率密度性质，消去 x，则有

$$C_{XY}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_Y)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_Y)^2f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{\sigma_Y^2}{a}$$

由前两式联立，解得

$$\sigma_Y^2=a^2\sigma_X^2$$

$$C_{XY}=\sigma_X\sigma_Y$$

可见，当 X 与 Y 呈线性关系 $Y=aX+b$，且 $a>0$ 时，二者的相关系数

$$r_{XY}=\frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=1$$